
Stanford University Libraries
3 6105 024 620 390



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Vierunddreissigster Theil.

Mit vier lithographirten Tafeln und einem Holzschnitt.

Greifswald.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
Th. Kunike.

1860.

Druck der Königl. Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike in Greifswald.

Inhaltsverzeichniss des vierunddreissigsten Theils.

Geometrie.

Trigonometrie.

Praktische Geometrie.

Praktische Mechanik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Astronomie.

Physik.

Krystallographie.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Zur Geschichte des Dualismus in der Geometrie.

Von

Herrn Oberschulrath Dr. *J. H. T. Müller*

zu Wiesbaden.

Einsender dieses hatte in seinem Lehrbuche der Stereometrie (Halle 1851) am Schlusse in den historischen Notizen bemerkt, dass er die ersten Spuren des Dualismus bei Maurolycus (D. Francisci Maurolyci, Abbatis Messanensis, Opuscula mathematica. Venetiis MDLXXV. 4.) gefunden. Bei der Seltenheit dieses Werkes dürfte es vielleicht Manchem erwünscht sein, die betreffende Stelle, deren Mittheilung dort unterblieb, wörtlich kennen zu lernen. Sie findet sich in der, wahrscheinlich 1532 geschriebenen Vorrede zu seiner Uebersetzung des 13. Buchs der Euklidischen Elemente.

> Quinque sunt solida regularia Geometrarum, scilicet cubus, sive hexahedrum, quod sex basibus quadratis, et octo angulis solidis clauditur. Octahedrum, quod octo triangulis basibus et sex angulis solidis finitur. unde haec sibi invicem correlativa sunt: quia quot bases habet unum, tot solidos angulos habet reliquum. Sequitur Icoshaedrum viginti triangulis basibus et duodecim angulis solidis constructum. Inde Dodecahedrum sub duodecim basibus pentagonis et viginti angulis solidis clausum. et est aliud par correlativorum corporum vicissim alternans basium et angulorum numerum. Quintum vero solidum Pyramis unicum est, ac solitarium, correlativo carens. ipsum enim met sibi respondet: quandoquidem quatuor triangulas bases et totidem solidos sortitur.

Der von Maurolycus für unser „dual" gebrauchte Name correlativ ist sehr bezeichnend und lässt vermuthen, dass jene Gegenüberstellung der regulären Polyeder kein flüchtiger Einfall gewesen, sondern bei ihm aus anderweitigen Studien hervorgegangen sei. Diess bestätiget sich, wenn man dessen Arithmetik (Ej. Arithmeticorum libri duo, nunc primum in lucem editi. Venet. MDLXXV. 4.) vergleicht, worin er sich, der damaligen Richtung gemäss, namentlich mit den figurirten Zahlen beschäftigt. In der Einleitung zum 2. Theile des 1. Buches behandelt er (wie es scheint zum ersten Male) die centrale Anordnung der Punkte in den regulären Körpern.

Seite 47.: Agendum nunc de solidis regularibus centralibus, in quibus semper vnitas in centro ponitur sicut et in planis numeris centralibus. Sed opereprecium est intelligere inprimis quo pacto disponendae sint caeterae unitates, et quibus in locis, ad efformanda, ut decet, talia solida numeralia. Nec dubium, quin in singulis, posita unitate centri tam per singulos solidos angulos, quam per singula basium centra singulae sint unitates disponendae. Itaque cum pyramis habeat quatuor angulos et totidem bases, habebit cum centrali unitate novem unitates. Cum autem octahedrum habeat sex angulos et octo bases et centrum; habebit unitates quindecim. et totidem unitates cubus: quandoquidem habet angulos octo et bases sex et centrum. Unde sicut secundus ab unitate octahedrus, secundo adequatur cubo; ita et tertius tertio, etc. ut postea demonstrabimus. Deinde cum icosbaedrum habeat 12 angulos solidos, bases autem 20 et centrum; constituetur ex unitatibus 33. et ex totidem unitatibus dodecahedrus, ut pote qui habet angulos 20. bases 12 et centrum, hoc est secundus Icosbaedrus secundo Dodecahedro aequalis est. Et similiter deinde tertius tertio etc.: et sequentes sequentibus singuli singulis Icosbaedri Dodecahedris in infinitum semper adaequabuntur propter eandem, quae in Octahedro et Cubo, reciprocam angulorum et basium numerorum aequalitatem. Sed quo pacto sequentes solidi numeri, hoc est, sequentium locorum formentur, audi. Nec te, perspicacissime lector, taedeat ea perpendere, quae ad hujusmodi numerarias formas, ab aliis omissa, et ad speculationis Arithmeticae perfectionem maxime spectant. Cognosces enim proprietates earum notatu dignissimas, nec nisi curiosis ingeniis patulas. Imaginor itaque in hisce quinque singulis regularibus solidis, a centro ad angulos educi singulas semidiametros: quae quidem in pyramide erunt 4, in octahedro 6, in cubo 8, in icosbaedro 12, in dodecahedro 20: quot scilicet sunt solidi anguli, seu vertices solidorum. Deinde in iisdem intelligo linearia latera

quae vertices ipsos coniungunt. in pyramide scilicet latera 6. In octahedro 12. In cubo totidem. In icoshaedro 30. In dodecahedro totidem. Quae quidem, cum semidiametris latera singula binis totidem triangulos continent quot sunt latera.

Aus Letzterem ergiebt sich zugleich, wie nahe Maurolycus bereits dem Eulerschen Satze, dass $e+f=k+2$, gewesen ist.

Die Verfolgung des oben angedeuteten Zweckes hat unwillkürlich in ein anderes Gebiet, das der figurirten Zahlen im weiteren Sinne des Wortes, geführt, und vielleicht bei Manchem die Frage nach des Maurolycus' Centralzahlen der successiven regulären Körper mit längseinander fallenden Halbmessern angeregt. Da die wörtliche Mittheilung des Originals hier zu viel Raum in Anspruch nehmen würde, zumal ihr die Darstellung der Centralzahlen der ebenen Polygone vorausgehen müsste: so wird ein kurzer Auszug aus dem Ganzen genügen und vielleicht selbst erwünschter sein.

Den Mittelpunkt jedes regulären ebenen Vielecks sieht Maurolycus als dessen Kern, als die Einheit, an. Aus diesem zieht er nach allen Ecken die Halbmesser. Dann ist die Zahl jedes Halbmessers $=1$, also die Centralzahl

des Isten 3ecks, 4ecks, 5ecks,....

$$= 1+3.1,\quad 1+4.1,\quad 1+5.1,\ldots.$$

Werden alle Halbmesser verdoppelt und zu deren Endpunkten die 2ten Vielecke construirt, so sind

$$3.2,\quad 4.2,\quad 5.2,\ldots.$$

die Zahlen dieser Halbmesser. Hierzu kommen jetzt noch die Halbirungspunkte der neuen Vielecksseiten, so dass die Centralzahlen der zweiten Vielecke

$$=1+3.2+3.1,\quad 1+4.2+4.1,\quad 1+5.2+5.1,\ldots.$$

sind.

Durch Verdreifachung der Halbmesser gelangt man zu den dritten Vielecken, deren Seiten zu dritteln sind, weshalb die Centralzahlen der 3ten Vielecke

$$=1+3.3+3.3,\quad 1+4.3+4.3,\quad 1+5.3+5.3,\ldots.$$

und die der $n$ten Vielecke

$$=1+3.n+3.\frac{n-1.n}{1.2},\quad 1+4.n+4.\frac{n-1.n}{1.2},\quad 1+5.n+5.\frac{n-1.n}{1.2},\ldots$$

sind.

Baut man aus diesen successiven

3ecken, 4ecken, 5ecken, ...

mit den Centralzahlen

1,	1,	1, ...
4	5	6
10	13	16
19	25	31
31	41	51
⋮	⋮	⋮

die 3-, 4-, 5-, ... seitigen **Pyramiden** auf, so sind die Zahlen (nicht die Centralzahlen) dieser Pyramiden:

1,	1,	1, ...	
5	6	7	
15	19	23	(Φ)
34	44	54	
65	85	105	
⋮	⋮	⋮	

Diese hier erhaltenen Werthe nun setzen uns in den Stand, die Centralzahlen der regulären Polyeder zu finden.

Wie bei den Polygonen bildet nach **Maurolycus** auch bei den Polyedern der Mittelpunkt dessen Kern oder das nullte Polyeder mit dem Werthe 1.

Aus diesem Mittelpunkte werden die Halbmesser nach allen Polyederscheiteln gezogen, wodurch eben so viel Dreiecke, als das Polyeder Kanten, und eben so viel Pyramiden bestimmt sind, als das Polyeder Flächen hat.

Die 2ten, 3ten, 4ten, ... zugehörigen Polyeder erhält man durch Ver- 2-, 3-, 4-, ... fachung der Halbmesser der fünf 1sten Polyeder, wenn durch die Endpunkte der Verlängerungen die entsprechenden Ebenen gelegt werden.

Demnach

	Halbmesser	Dreiecke	Pyramiden
hat das Tetraeder	4	6	4 3seitige,
„ „ Oktaeder	6	12	8 3seitige,
„ „ Hexaeder	8	12	6 4seitige,
„ „ Ikosaeder	12	30	20 3seitige,
„ „ Dodekaeder	20	30	12 5seitige.

Nach **Maurolycus** nun sind für die 1ten, 2ten, 3ten, 4ten,....

Polyeder die Zahlen für die Dreiecke	=	0,	1,	3,	6,....
die Zahlen für die 3seitig. Pyramiden	=	1,	5,	15,	34,....
„ „ „ „ 4seitig. „	=	1,	6,	19,	44,....
„ „ „ „ 5seitig. „	=	1,	7,	23,	54,....

Vergl. (Φ).

Hiernach ergeben sich folgende **Centralzahlen** für die 1sten, 2ten, 3ten, 4ten,.... Polyeder, und zwar

für das **Tetraeder:**

Kern. Halbm., Dreiecke, Pyram.

$$1 + 4.1 + 6.0 + 4.1 = 9$$
$$1 + 4.2 + 6.1 + 4.5 = 35$$
$$1 + 4.3 + 6.3 + 4.15 = 91$$
$$1 + 4.4 + 6.6 + 4.34 = 189$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

für das **Oktaeder:** für das **Hexaeder:**

$$1+6.1+12.0+8.1 = 15 = 1+8.1+12.0+6.1$$
$$1+6.2+12.1+8.5 = 65 = 1+8.2+12.1+6.6$$
$$1+6.3+12.3+8.15 = 175 = 1+8.3+12.3+6.19$$
$$1+6.4+12.6+8.34 = 369 = 1+8.4+12.6+6.44$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

für das **Ikosaeder:** für das **Dodekaeder:**

$$1+12.1+30.0+20.1 = 33 = 1+20.1+30.0+12.1$$
$$1+12.2+30.1+20.5 = 155 = 1+20.2+30.1+12.7$$
$$1+12.3+30.3+20.15 = 427 = 1+20.3+30.3+12.23$$
$$1+12.4+30.6+20.34 = 909 = 1+20.4+30.6+12.54$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass von den Reihen in (Φ), nämlich von

$$1,\ 5,\ 15,\ 34,\ 65,\dots.$$
$$1,\ 6,\ 19,\ 44,\ 85,\dots.$$
$$1,\ 7,\ 23,\ 54,\ 105,\dots.$$

die $n$ten Glieder beziehungsweise

$$\frac{n.n^2+1}{1.2},\quad \frac{n.2n^2+1}{1.3},\quad \frac{n.5n^2+1}{1.6}$$

sind.



Von den drei Reihen unserer Centralzahlen aber, nämlich von

1, 9, 35, 91, 189, ...
1, 15, 65, 175, 369, ...
1, 33, 155, 427, 909, ...

erhalten wir als *n*tes Glied:

$(2n-1)(n^2-n+1)$ für das Tetraeder;

$(2n-1)(2n^2-2n+1)$ „ „ Octaeder / Hexaeder;

$(2n-1)(5n^2-5n+1)$ „ „ Ikosaeder / Dodekaeder.

II.

Geometrische Aufgaben durch Berechnung gelöst.

Von

Herrn ***H. J. Heller***,

Oberlehrer an der Königlichen Realschule zu Berlin.

Die Lösung einer geometrischen Aufgabe durch Construction zu treffen, ist oft eine Sache des Zufalls; in nicht wenigen Fällen ist man des Erfolges bei vorhergehender Berechnung gewisser. Allerdings ist die Construction gewöhnlich kürzer und eleganter, die Berechnung nicht selten weitläufig und schwerfällig. Dagegen gelangt man bisweilen auf dem berechnenden Wege zur ganz allgemeinen Construction algebraischer Ausdrücke. Ich lasse ein paar Beispiele solcher Lösungen durch Rechnung folgen, die, meines Wissens, noch nicht veröffentlicht sind, obgleich Lösungen durch Construction allgemein bekannt sind.

Aufgabe. **Ein beliebiges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.** (Taf. I. Fig. 1.)

Gesetzt, ABC ist das gefundene gleichseitige Dreieck und AD ein Loth, so ist

$$AC^2 = AD^2 + DC^2,$$

und da $DC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC$:

$$AC^2 = AD^2 + \frac{1}{4}AC^2,$$

oder

$$AD^2 = \frac{3}{4}AC^2,$$

oder

$$4AD^2 = 3AC^2,$$

also

$$2AD = AC\sqrt{3}$$

oder

$$AD = \frac{1}{2}AC\sqrt{3}.$$

Da aber $DC = \frac{1}{2}AC$, so verhalten sich

$$AD : DC = \frac{1}{2}AC\sqrt{3} : \frac{1}{2}AC,$$

d. h.

$$AD : DC = \sqrt{3} : 1.$$

Zieht man AE parallel DC und CE parallel AD, so ist das Rechteck $AECD =$ Dreieck ABC. Die Aufgabe wird also gelöst sein, wenn man das gegebene beliebige Dreieck in ein Rechteck verwandelt, dessen Seiten sich wie $\sqrt{3} : 1$ verhalten.

Man verwandelt also zuerst das gegebene beliebige Dreieck in ein Parallelogramm, dies in ein Rechteck, das Rechteck in ein Quadrat.

Gesetzt, $abcd$ (Taf. I. Fig. 2.) sei das Quadrat, so muss dies einem Rechtecke gleich gemacht werden, dessen Seiten sich wie $\sqrt{3} : 1$ verhalten.

Es sei dies das Rechteck $cefg$. Da man die Länge der Seite ce nicht kennt, werde sie mit x, und ef mit y bezeichnet; oder da $x : y = \sqrt{3} : 1$, so ist $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Wird nun das Quadrat $abcd = 1$ gesetzt, so ist

$$x \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = 1$$

oder

$$x^2 = \sqrt{3}, \quad x = \sqrt[4]{3}$$

und

$$y = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}.$$

Die Construction dieser Ausdrücke ergiebt sich auf folgende Weise:

Legt man die Seite des Quadrats in Taf. I. Fig. 2., das man durch Verwandlung bekommen hat, und welches man, wie seine Seite $=1$ gesetzt hat, doppelt an einander in mn (Taf. I. Fig. 3.), und schlägt von ihrer Mitte o einen Halbkreis, trägt ferner von n aus die Seite des Quadrats $=1$ bis p ab und zieht mp, so ist diese Linie $mp = \sqrt{3}$.

Verlängert man mp um die Seite des Quadrats $=1$ bis q und schlägt von r, der Mitte der Linie pq, einen Halbkreis, und trägt von p aus in diesen die Differenz $\sqrt{3}-1$ bis s ab, zieht alsdann qs, so ist diese Linie qs das Doppelte von $\sqrt[4]{3}$, und ihre Hälfte gleich der einen Seite x des gesuchten Rechtecks. Denn

$$qs^2 = (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2,$$

also

$$qs^2 = 4\sqrt{3}$$

und

$$qs = 2\sqrt[4]{3}, \quad \frac{qs}{2} = \sqrt[4]{3} = x.$$

Man sieht sogleich, dass durch Fortsetzung desselben Verfahrens sich eben so würden $\sqrt[8]{3}$, $\sqrt[16]{3}$ und überhaupt $\sqrt[2^n]{3}$ (n als ganze positive Zahl genommen) construiren lassen.

Errichtet man ferner über x ein Quadrat, theilt es in 3 gleiche Rechtecke und verwandelt eines derselben, welches also $=\frac{x^2}{3}$ ist, in ein Quadrat, so ist die Seite dieses Quadrats $\sqrt{\frac{x^2}{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}$ oder $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = y$, d. h. gleich der andern Seite des gesuchten Rechteckes, dessen Verwandlung in das verlangte gleichseitige Dreieck sich aus Taf. I. Fig. 1. ergiebt.

Oder — da aus Taf. I. Fig. 1. deutlich, dass $\angle ACE = \frac{1}{3}R$ ist, — man legt, wenn x gefunden ist, an den einen Endpunkt derselben

einen R, an den andern einen Winkel $= \frac{1}{3}R$ an; die Linie, die mit x den R bildet, wird, bis zum Durchschnittspunkt mit der anderen angelegten Linie, y sein.

In einem Lehrbuche der Geometrie, welches dem Unterrichte in einer preussischen höheren Lehranstalt zu Grunde gelegt wird, findet sich folgende Lösung der vorstehenden Aufgabe, — eine Lösung, die so abenteuerlich ist, dass ich mir ihre Mittheilung nicht versagen kann.

„Auflösung. Man gebe dem gegebenen Dreiecke einen Winkel von $\frac{2}{3}R$; und es sei ABC (Taf. I. Fig. 4.) das auf diese Weise entstandene Dreieck, dessen Winkel bei B jene Grösse hat. Man lege nun in A auch einen Winkel von $\frac{2}{3}R$ an, wodurch das gleichseitige Dreieck BAD entsteht, halbire CD in G und ziehe GE parallel mit AD, so ist BEG das gesuchte Dreieck."

Bei dieser Construction wird vorausgesetzt, wenn $\Delta BEG = \Delta BAC$ sein soll, dass $\Delta CFG = \Delta AFE$ ist. Das Letztere scheint der Erfinder dieser Constructionsmethode ohne Weiteres deshalb angenommen zu haben, weil $CG = GD = EA$ ist.

Jene Dreiecke aber sind ungleich. Denn verbindet man A und G, so müssten, wenn ΔCFG und ΔAFE gleich sein sollten, auch ΔCAG und ΔAGE gleich sein, da zu jenen Dreiecken nur das gemeinschaftliche ΔGAF hinzugekommen ist.

Nun sind aber ΔCAG und ΔAGE ungleich; denn sie haben zwar die gleichen Grundlinien CG und EA, aber ihre Höhen AH und GK sind ungleich, da $GK < DL$, DL aber $= AH$ ist.

Folglich sind auch ΔCFG und ΔAFE ungleich, also auch das construirte Dreieck BEG dem gegebenen ungleich.

Man sieht aus dem Obigen, dass es bei dieser Constructionsweise auf die Annahme hinausläuft, als könnten Dreiecke von gleichen Grundlinien und ungleichen Höhen dem Flächenraume nach einander gleich sein.

In einer anderen Aufgabe: „Ein beliebiges Dreieck in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Winkel gegeben sind", wird die Sache auf ähnliche Weise angestellt.

D. h. wenn ABC (Taf. I. Fig. 5.) das Dreieck ist, in dem man den einen gegebenen Winkel bei B schon angelegt hat, so soll der andere Winkel bei A an BA angelegt werden, so dass BAD der zweite gegebene Winkel ist; es soll ferner CD in E halbirt und EF parallel AD gezogen werden, um $\Delta BFE = \Delta BAC$ zu bekommen.

Aber diese Construction ist wiederum falsch.

Denn, bezeichnet man AB mit c, BC mit a, CD mit b, CE mit $\frac{b}{2}$, BF mit y, so muss sich, da FE parallel AD ist, verhalten:

$$(a+b):(a+\frac{b}{2})=c:y,$$

d. h.

$$y=\frac{(a+\frac{b}{2})c}{a+b}.$$

Ferner ist, wenn $\Delta BEF=\Delta BAC$,

$$(a+\frac{b}{2})y=ac,$$

d. h.

$$y=\frac{ac}{a+\frac{b}{2}},$$

folglich müsste

$$\frac{(a+\frac{b}{2})c}{a+b}=\frac{ac}{a+\frac{b}{2}}$$

sein, oder

$$\frac{a+\frac{b}{2}}{a+b}=\frac{a}{a+\frac{b}{2}}$$

oder

$$(a+\frac{b}{2})^2=a(a+b)$$

oder

$$a^2+\frac{2ab}{2}+\frac{b^2}{4}=a^2+ab$$

oder

$$a^2+ab+\frac{b^2}{4}=a^2+ab,$$

welches falsche Resultat nur von der unrichtigen Annahme, dass $\Delta BEF=\Delta BAC$ ist, herrührt.

Solche Constructionen den Schülern vormachen, das heisst doch, sie hinter das Licht führen.

Die richtige constructive Lösung ist bekanntlich dieser zweiten Aufgabe mit der ersteren gemeinsam. Wie bei jener aber setze ich auch für diese Aufgabe eine auf Rechnung gegründete Lösung her.

Gesetzt wieder, ABC (Taf. I. Fig. 6.) sei das Dreieck, dem man schon den einen Winkel bei B gegeben hat, $\angle BAD$ sei der zweite Winkel, der dem zu construirenden Dreieck gegeben werden soll, so handelt es sich darum, zwischen C und D den Punkt zu finden, von dem aus die Parallele mit AD gezogen werden muss, durch welche ein dem ΔABC gleiches Dreieck entsteht, welches einen dem $\angle BAD$ gleichen Winkel hat.

Ist F dieser Punkt und FG die Parallele, so werde BC mit a, CD mit b, BA mit c, die noch unbekannte CF mit x, die ebenfalls noch unbekannte GA mit y bezeichnet. Danach ist $FD = b - x$.

Sollen die Dreiecke CFH und GAH gleich sein, was bei der Lösung der Aufgabe stattfinden muss, so muss GC parallel AF sein.

Alsdann verhält sich:

$$a : x = (c - y) : y,$$

und da auch GF parallel AD,

$$(c - y) : y = (a + x) : (b - x),$$

folglich

$$a : x = (a + x) : (b - x),$$

oder

$$a(b - x) = x(a + x),$$

$$ab - ax = ax + x^2,$$

$$ab = 2ax + x^2.$$

Die Construction ist also so zu machen, dass die Gleichung $x^2 + 2ax = ab$ stattfindet.

Zu diesem Zwecke schlägt man um BD einen Halbkreis, errichtet in C ein Loth, das den Halbkreis in J treffen möge, zieht BJ, schlägt von B aus mit BJ einen Kreis, und wenn dieser die BD in F trifft, so verhält sich, da $BJ = BF = a + x$ ist,

$$a : (a + x) = (a + x) : (a + b)$$

oder

$$(a + x)^2 = a(a + b),$$

$$a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + ab$$

oder

$$2ax + x^2 = ab.$$

Dies ist aber die erforderliche Gleichung.

III.

Die Fläche des sphärischen Vierecks.

Von

Herrn Dr. *J. F. König*,

Professor am Kneiphöf'schen Gymnasio zu Königsberg i. Pr.

Der Herr Herausgeber dieses Archivs fordert Theil II. Seite 326. die Leser desselben auf, für das sphärische Viereck einen Ausdruck zu suchen, welcher dem entspricht, den Herr Director Strehlke dort für das ebene Viereck gegeben hat. So viel ich weiss ist nur der verstorbene Professor Sohncke dieser Aufforderung in soweit nachgekommen, dass er Thl. IV. S. 447. einige zwar interessante Flächenformeln für's sphärische Viereck mittheilt, von denen aber wohl keine der fraglichen entsprechend genannt werden kann. Mehr dürfte in dieser Beziehung die zunächst folgende Formel befriedigen.

Bezeichnet man die auf einander folgenden Seiten AB, BC, CD, DA mit a, b, c, d, die Diagonale AC mit e, $a+b+c+d$ mit $2s$, dann hat schon Herr Strehlke a. a. O. die auch auf etwas anderm Wege leicht abzuleitende Gleichung:

$$\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\sin(s-d) = (\tfrac{1}{2}\sin a\sin b\sin B + \tfrac{1}{2}\sin c\sin d\sin D)^2$$
$$+ \sin a\sin b\sin c\sin d\cos\tfrac{1}{2}(B+D)^2$$

gefunden. Hieraus ist nun:

$$\sin a \sin b \sin B + \sin c \sin d \sin D$$

$$=2\sqrt{\{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\sin(s-d) - \sin a \sin b \sin c \sin d \cos \tfrac{1}{2}(B+D)^2\}}$$

$$=2V,$$

und, wenn man die Flächen der Dreiecke ACB und ACD mit f und f' bezeichnet, da

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin B = \cos\frac{e}{2}\sin\frac{f}{2},$$

$$\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\sin D = \cos\frac{e}{2}\sin\frac{f'}{2}$$

ist:

$$\sin\frac{f}{2} = \frac{2V - \sin c \sin d \sin D}{4\cos\frac{e}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}},$$

$$\sin\frac{f'}{2} = \frac{2V - \sin a \sin b \sin B}{4\cos\frac{e}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}.$$

Ferner ist:

$$\cos\frac{f}{2} = \frac{1+\cos e+\cos a+\cos b}{4\cos\frac{e}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}},$$

$$\cos\frac{f'}{2} = \frac{1+\cos e+\cos c+\cos d}{4\cos\frac{e}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}};$$

und diese vier Werthe, in das aufgelöste

$$\sin\left(\frac{f}{2}+\frac{f'}{2}\right) = \sin\frac{F}{2}$$

gesetzt, geben, wenn man noch mit

$$4\cos\frac{e^2}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}$$

multiplicirt:

$$4\cos\frac{e^2}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\sin\frac{F}{2} = 2V\left\{\cos\frac{e^2}{2} + \frac{\cos a+\cos b+\cos c+\cos d}{4}\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\cos\frac{e^2}{2}(\sin a \sin b \sin B + \sin c \sin d \sin D)$$

$$-\left\{\sin a \sin b \sin B\frac{\cos a+\cos b}{4} + \sin c \sin d \sin D\frac{\cos c+\cos d}{4}\right\}.$$

Nun ist

$$\sin a \sin b \sin B + \sin c \sin d \sin D = 2V,$$

$$\sin a \sin b \sin B \frac{\cos a + \cos b}{4} = 2V \frac{\cos a + \cos b}{4} - \sin c \sin d \sin D \frac{\cos a + \cos b}{4},$$

$$\sin c \sin d \sin D \frac{\cos c + \cos d}{4} = 2V \frac{\cos c + \cos d}{4} - \sin a \sin b \sin B \frac{\cos c + \cos d}{4};$$

also

$$\sin a \sin b \sin B \frac{\cos a + \cos b}{4} + \sin c \sin d \sin D \frac{\cos c + \cos d}{4}$$

$$= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + \cos d}{2} V - \tfrac{1}{2} \Big\{ \sin a \sin b \sin B \cos\frac{c+d}{2} \cos\frac{c-d}{2}$$

$$+ \sin c \sin d \sin D \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} \Big\},$$

und durch Substitution schliesslich:

$$\sin\frac{F}{2} = \frac{\sqrt{\left\{ \begin{array}{c} \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\sin(s-d) \\ -\sin a \sin b \sin c \sin d \cos\frac{B+D^2}{2} \end{array} \right\}}}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}$$

$$+ \frac{\sin a \sin b \sin B \cos\frac{c+d}{2}\cos\frac{c-d}{2} + \sin c \sin d \sin D \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{8\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\frac{e^2}{2}}.$$

Aber

$$\cos\frac{e^2}{2} = \cos\frac{a+b^2}{2} + \sin a \sin b \cos\frac{B^2}{2} = p$$

$$= \cos\frac{c+d^2}{2} + \sin c \sin d \cos\frac{D^2}{2} = p',$$

also auch

$$= \frac{p+p'}{2} = \sqrt{p.p'}.$$

Diese Formel giebt für $d=0$ den richtigen Werth für $\sin\frac{f}{2}$, da dann $c=e$ und der Zähler des zweiten Bruches $=2\cos\frac{e^2}{2}V$ wird, und entspricht wohl dem Flächenausdrucke des Herrn

Strehlke für's ebene Viereck. Dass die Wurzelgrösse nicht allein vorkommen kann, wie bei'm ebenen Viereck, folgt schon daraus, dass hier allgemein nicht $\cos\frac{B+D}{2}^2 = \cos\frac{A+C}{2}^2$, wie es bei'm Viereck in der Ebene der Fall ist.

Satz. Die Fläche des sphärischen Dreiecks ist durch die Grundlinie und den die beiden anderen Seiten halbirenden Bogen bestimmt.

Beweis 1. Heisst in unserer Figur der a und b halbirende Bogen γ, so ist:

$$\cos\frac{e}{2}^2 = \cos\frac{a+b}{2}^2 + \sin a \sin b \cos\frac{B}{2}^2$$

$$= \cos\frac{a}{2}^2 \cos\frac{b}{2}^2 + \sin\frac{a}{2}^2 \sin\frac{b}{2}^2 + \tfrac{1}{2}\sin a \sin b \cos B,$$

$$\cos\gamma = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos B;$$

also

$$\cos\gamma^2 = \cos\frac{a}{2}^2 \cos\frac{b}{2}^2 + \sin\frac{a}{2}^2 \sin\frac{b}{2}^2 \cos B^2 + \tfrac{1}{2}\sin a \sin b \cos B$$

und

$$\cos\frac{e}{2}^2 - \cos\gamma^2 = \sin\frac{a}{2}^2 \sin\frac{b}{2}^2 \sin B^2 = \cos\frac{e}{2}^2 \sin\frac{f}{2}^2,$$

d. h.

$$\cos\frac{f}{2} = \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{e}{2}}.$$

Beweis 2. Setzt man in

$$\cos\gamma = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos B$$

für $\cos B$ den Werth, nämlich

$$\frac{\cos e - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

so entsteht:

$$\cos\gamma = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos e}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}} = \cos\frac{e}{2}\cos\frac{f}{2}.$$

Hieraus folgt zugleich, dass immer $\gamma > \frac{e}{2}$ sein muss und dass sich γ als Hypotenuse, $\frac{f}{2}$ und $\frac{e}{2}$ als Catheten zu einem rechtwinkligen Dreieck verbinden lassen.

Heisst der c und d halbirende Bogen δ, so hat man:

$$\cos\frac{f}{2} = \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{e}{2}}, \quad \sin\frac{f}{2} = \frac{1}{\cos\frac{e}{2}} \sqrt{\cos\frac{e}{2}^2 - \cos\gamma^2}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{e}{2}} \sqrt{\sin(\gamma + \frac{e}{2}) \sin(\gamma - \frac{e}{2})},$$

$$\cos\frac{f'}{2} = \frac{\cos\delta}{\cos\frac{e}{2}}, \quad \sin\frac{f'}{2} = \frac{1}{\cos\frac{e}{2}} \sqrt{\sin(\delta + \frac{e}{2}) \sin(\delta - \frac{e}{2})};$$

also

$$\sin\frac{f+f'}{2} = \sin\frac{F}{2}$$

$$= \sec\frac{e^2}{2} \{\cos\gamma \sqrt{\sin(\delta + \frac{e}{2}) \sin(\delta - \frac{e}{2})} + \cos\delta \sqrt{\sin(\gamma + \frac{e}{2}) \sin(\gamma - \frac{e}{2})}\},$$

$$\cos\frac{f+f'}{2} = \cos\frac{F}{2}$$

$$= \sec\frac{e^2}{2} \{\cos\gamma \cos\delta - \sqrt{\sin(\gamma + \frac{e}{2}) \sin(\gamma - \frac{e}{2}) \sin(\delta + \frac{e}{2}) \sin(\delta - \frac{e}{2})}\}.$$

Setzt man für $\cos\gamma$ und $\cos\delta$ die Werthe, also auch gleich

$$\sin a^2 \sin b^2 \sin B^2 \text{ für } \cos\frac{e^2}{2} - \cos\gamma^2,$$

$$\sin c^2 \sin d^2 \sin D^2 \text{ für } \cos\frac{e^2}{2} - \cos\delta^2;$$

so erhält man, was man auch ohne Einführung der Bogen γ und δ findet,

$$\sin\frac{F}{2} = \sec\frac{e^2}{2} \{\sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \cos\frac{d}{2} \sin B$$

$$+ \sin c \sin d \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \sin D + \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \sin\frac{d}{2} \sin(B+D)\},$$

$$\cos\frac{F}{2} = \sec\frac{e^2}{2} \{\cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \cos\frac{d}{2} + \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \cos\frac{d}{2} \cos B$$

$$+ \sin\frac{c}{2} \sin\frac{d}{2} \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos D + \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2} \sin\frac{d}{2} \cos(B+D)\}.$$

Dividirt man $\cos\frac{F}{2}$ durch $\sin\frac{F}{2}$ und dann Zähler und Nenner durch $\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}$, so entsteht für $\cot\frac{F}{2}$ der Ausdruck des Herrn Sohnke a. a. O. S. 448.

Ferner ist

$$\tang\frac{F}{4}=\frac{\sin\frac{f}{2}+\sin\frac{f'}{2}}{\cos\frac{f}{2}+\cos\frac{f'}{2}}=\frac{\sqrt{\sin(\gamma+\frac{e}{2})\sin(\gamma-\frac{e}{2})}+\sqrt{\sin(\delta+\frac{e}{2})\sin(\delta-\frac{e}{2})}}{\cos\gamma+\cos\delta}.$$

Gewiss giebt es auch für $\tang\frac{F}{4}$ einen Ausdruck, der für $d=0$ in die $\tang\frac{f}{4}$ des Simon Lhuilier übergeht; aber wie findet man ihn?

IV.

De integralibus quibusdam definitis.

Auctore

Dre. *Christiano Fr. Lindman*,

Lect. Strengnesensi.

(Ex conspectu Actorum Reg. Acad. Scient. Holm.)

Abhinc aliquot annos Reg. Societas scient. Upsaliensis in novis Actis suis (Vol. I seriei tertiae. Ups. 1855.) locum dedit commentariolo meo de functione transcendente $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{Cot}\,ax\,dx\,(=H(a))$, ex qua multa integralia pendent. Non pauca l. c. sunt allata; postea vero in alia incidi, quae formula

$$^mJ_n = \int_0^1 \frac{x^{m-1}lx\,dx}{1+x^n}$$

continentur, ubi sunt m et n numeri integri positivi et $m < n$.

Si brevitatis caussa posuerimus

$$\frac{(2p+1)\pi}{n} = \varphi_p,$$

$$l(1-2x\,\mathrm{Cos}\,\varphi_p + x^2) = L_p,$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\frac{x\,\mathrm{Sin}\,\varphi_p}{1-x\,\mathrm{Cos}\,\varphi_p} = A_p,$$

indefinita integratio dabit*):

($n=$ num. par.)

$$\int\frac{x^{m-1}lx\,dx}{1+x^n} = -\frac{lx}{n}\left\{\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}-1}\mathrm{Cos}\,m\varphi_p\,.\,L_p - 2\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}-1}\mathrm{Sin}\,m\varphi_p\,.\,A_p\right\}$$

$$+\frac{1}{n}\int\frac{dx}{x}\left\{\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}-1}\mathrm{Cos}\,m\varphi_p\,.\,L_p - 2\sum_{p=0}^{p=\frac{n}{2}-1}\mathrm{Sin}\,m\varphi_p\,.\,A_p\right\},$$

($n=$ num. imp.)

$$\int\frac{x^{m-1}lx\,dx}{1+x^n}$$

$$=\frac{lx}{n}\left\{(-1)^{m-1}l(1+x) - \sum_{p=0}^{p=\frac{n-3}{2}}\mathrm{Cos}\,m\varphi_p\,.\,L_p + 2\sum_{p=0}^{p=\frac{n-3}{2}}\mathrm{Sin}\,m\varphi_p\,.\,A_p\right\}$$

$$+\frac{(-1)^m}{n}\int\frac{dx}{x}l(1+x) + \frac{1}{n}\int\frac{dx}{x}\left\{\sum_{p=0}^{p=\frac{n-3}{2}}\mathrm{Cos}\,m\varphi_p\,.\,L_p - 2\sum_{p=0}^{p=\frac{n-3}{2}}\mathrm{Sin}\,m\varphi_p\,.\,A_p\right\},$$

quae integralia, ut inveniatur integrale ^mJ_n, intra limites 0 et 1 sumenda sunt. Occurrit tamen difficultas quaedam, quod termini, a signo $\int$ soluti, si est $x=0$, in formam indeterminatam $0\times\infty$ abeunt. Posito autem, ut verus valor inveniatur,

$$u = lx\,l(1-2x\,\mathrm{Cos}\,\varphi_p + x^2),$$

facile apparet, esse

$$2lx\,l(1+x) > u > 2lx\,l(1-x).$$

---

*) Vide Minding, Integral-Tafeln pag. 57.

Evolutis $l(1+x)$ et $l(1-x)$, termini harum functionum fiunt forma $\frac{x^r}{r}lx$, qui quidem, si est $x=0$, in nihilum abeunt, atque ideo functiones $2lx\,l(1+x)$, $2lx\,l(1-x)$ cum interjacente u. Prior igitur summa $=0$ est, exsistente $x=0$.

Positoque

$$\omega = lx \operatorname{Arc tg} \frac{x \operatorname{Sin} \varphi_p}{1 - x \operatorname{Cos} \varphi_p}$$

et deinde

$$\frac{x \operatorname{Sin} \varphi_p}{1 - x \operatorname{Cos} \varphi_p} = \operatorname{tg} \psi,$$

habebimus

$$x = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{Sin}\varphi_p + \operatorname{tg}\psi \operatorname{Cos}\varphi_p} = \frac{\operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin}(\varphi_p+\psi)},$$

$$\omega = \psi l \operatorname{Sin}\psi - \psi l \operatorname{Sin}(\varphi_p+\psi).$$

Quia est $\psi=0$, si est $x=0$, valor functionis ω, posito $\psi=0$, quaerendus est. Illico patet, hunc terminum tum evanescere, id quod de illo quoque solita ratio docet. Omnes igitur termini extra $\int$ evanescunt, si est $x=0$, id quod quoque fit, si est $x=1$. Itaque est

($n=$ num. par.)

$$^mJ_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{dx}{x} \mathop{S}_{p=0}^{p=\frac{n}{2}-1} \operatorname{Cos} m\varphi_p \, l(1-2x\operatorname{Cos}\varphi_p + x^2)$$

$$- \frac{2}{n}\int_0^1 \frac{dx}{x} \mathop{S}_{p=0}^{p=\frac{n}{2}-1} \operatorname{Sin} m\varphi_p \operatorname{Arc tg} \frac{x\operatorname{Sin}\varphi_p}{1-x\operatorname{Cos}\varphi_p};$$

($n=$ num. imp.)

$$^mJ_n = \frac{(-1)^m}{n}\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1+x)$$

$$+ \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{dx}{x} \mathop{S}_{p=0}^{p=\frac{n-3}{2}} \operatorname{Cos} m\varphi_p \, l(1-2x\operatorname{Cos}\varphi_p + x^2)$$

$$- \frac{2}{n}\int_0^1 \frac{dx}{x} \mathop{S}_{p=0}^{p=\frac{n-3}{2}} \operatorname{Sin} m\varphi_p \operatorname{Arc tg} \frac{x\operatorname{Sin}\varphi_p}{1-x\operatorname{Cos}\varphi_p}.$$

Integrale igitur, de quo agitur, ex his tribus

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1+x),\quad \int_0^1 \frac{dx}{x} l(1-2x \operatorname{Cos}\varphi_p + x^2),$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \operatorname{Arctg} \frac{x \operatorname{Sin}\varphi_p}{1-x\operatorname{Cos}\varphi_p}$$

pendet. Evoluto $l(1+x)$, integratio dabit

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1+x) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{cett.}$$

Quia summa hujus seriei $= \frac{\pi^2}{12}$ est, evadit

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1+x) = \frac{\pi^2}{12} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Jam cognitum est *)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} l \frac{1+x}{\sqrt{1+2x\operatorname{Cos}\gamma + x^2}} = \tfrac{1}{2}\gamma^2, \quad (\pi > \gamma > 0),$$

quod integrale ope theorematis cogniti evadit

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x} l \frac{1+x}{\sqrt{1+2x\operatorname{Cos}\gamma + x^2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x} l \frac{1+x}{\sqrt{1+2x\operatorname{Cos}\gamma + x^2}}.$$

Substituto in posteriore termino $\frac{1}{x}$ pro x, invenitur

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} l \frac{1+x}{\sqrt{1+2x\operatorname{Cos}\gamma + x^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x} l \frac{1+x}{\sqrt{1+2x\operatorname{Cos}\gamma + x^2}}.$$

Itaque est

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1+x) - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1+2x\operatorname{Cos}\gamma + x^2) = \tfrac{1}{4}\gamma^2,$$

quae aequatio, de aequatione (1) deducta, multiplicatione per 2 facta, dabit

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1+2x\operatorname{Cos}\gamma + x^2) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\gamma^2}{2}.$$

Posito $\gamma = \pi - \varphi_p$, invenitur

*) Vide **Minding** l. c. pag. 149.

(2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} l(1-2x\,\mathrm{Cos}\,\varphi_p+x^2) = \frac{\pi^2}{6}-\tfrac{1}{2}(\pi-\varphi_p)^2 = \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{2}[1-\frac{2p+1}{n}]^2.$$

Jam restat, ut integrale tertium inveniatur. Posito igitur

$$\mathrm{Arctg}\frac{x\,\mathrm{Sin}\,\varphi_p}{1-x\,\mathrm{Cos}\,\varphi_p} = \psi,$$

habebimus

$$x = \frac{\mathrm{Sin}\,\psi}{\mathrm{Sin}(\varphi_p+\psi)}, \quad \frac{dx}{x} = \mathrm{Cot}\,\psi d\psi - \mathrm{Cot}(\varphi_p+\psi)\,d\psi.$$

Quia limitibus $x=0$, $x=1$ resp. respondent limites $\psi=0$, $\psi=\frac{1}{2}(\pi-\varphi_p)$, evadit

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\mathrm{Arctg}\frac{x\,\mathrm{Sin}\,\varphi_p}{1-x\,\mathrm{Cos}\,\varphi_p}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\varphi_p)} \psi d\psi\,\mathrm{Cot}\,\psi - \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\varphi_p)} \psi d\psi\,\mathrm{Cot}(\varphi_p+\psi).$$

In termino priore dextri membri posito

$$\psi = \frac{\pi-\varphi_p}{\pi} z,$$

invenitur ($\varphi_p = \frac{2p+1}{n}\pi$):

$$\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\varphi_p)} \psi d\psi\,\mathrm{Cot}\,\psi = (1-\frac{2p+1}{n})^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} z dz\,\mathrm{Cot}(1-\frac{2p+1}{n})z$$

$$=(1-\frac{2p+1}{n})^2 H(1-\frac{2p+1}{n}).$$

Integrale posterius ad eandem functionem transcendentem reduci potest. Posito enim

$$\varphi_p+\psi = z,$$

fit

$$\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\varphi_p)} \psi d\psi\,\mathrm{Cot}(\varphi_p+\psi) = \int_{\varphi_p}^{\frac{1}{2}(\pi+\varphi_p)} z dz\,\mathrm{Cot}\,z - \varphi_p\int_{\varphi_p}^{\frac{1}{2}(\pi+\varphi_p)} \mathrm{Cot}\,z dz$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+\varphi_p)} z dz\,\mathrm{Cot}\,z - \int_0^{\varphi_p} z dz\,\mathrm{Cot}\,z - \varphi_p\int_{\varphi_p}^{\frac{1}{2}(\pi+\varphi_p)} \mathrm{Cot}\,z dx.$$

Posito jam in primo integrali $z = \frac{\pi + \varphi_p}{\pi} y$ et in secundo $z = \frac{2\varphi_p}{\pi} y$ introductoque valore ipsius φ_p, inveniemus

$$\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\varphi_p)} \psi d\psi \operatorname{Cot}(\varphi_p + \psi) = (1 + \frac{2p+1}{n})^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dy \operatorname{Cot}(1 + \frac{2p+1}{n})y$$

$$-4\left(\frac{2p+1}{n}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dy \operatorname{Cot} \frac{2(2p+1)}{n} y + \frac{(2p+1)\pi}{n} l2 \operatorname{Sin} \frac{(2p+1)\pi}{2n}$$

vel

$$\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\varphi_p)} \psi d\psi \operatorname{Cot}(\varphi_p + \psi) = (1 + \frac{2p+1}{n})^2 H(1 + \frac{2p+1}{n})$$

$$-4\left(\frac{2p+1}{n}\right)^2 H\left(\frac{2(2p+1)}{n}\right) + \frac{(2p+1)\pi}{n} l2 \operatorname{Sin} \frac{(2p+1)\pi}{2n}.$$

Substitutione igitur recte facta, habebimus

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \operatorname{Arctg} \frac{x \operatorname{Sin} \varphi_p}{1 - x \operatorname{Cos} \varphi_p} = (1 - \frac{2p+1}{n})^2 H(1 + \frac{2p+1}{n})$$

$$-(1 + \frac{2p+1}{n})^2 H(1 + \frac{2p+1}{n}) + 4\left(\frac{2p+1}{n}\right)^2 H\left(\frac{2(2p+1)}{n}\right)$$

$$-\frac{(2p+1)\pi}{n} l2 \operatorname{Sin} \frac{(2p+1)\pi}{2n}.$$

In commentariolo, cujus mentio supra facta est, demonstratur esse

$$(1-b)^2 H(1-b) - (1+b)^2 H(1+b) = 2b^2[H(b) - 2H(2b)],$$

$$(b < 1)$$

atque ideo est

$$(1 - \frac{2p+1}{n})^2 H(1 - \frac{2p+1}{n}) - (1 + \frac{2p+1}{n})^2 H(1 + \frac{2p+1}{n})$$

$$= 2\left(\frac{2p+1}{n}\right)^2 [H\left(\frac{2p+1}{n}\right) - 2H\left(\frac{2(2p+1)}{n}\right)]$$

et

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \operatorname{Arctg} \frac{x \operatorname{Sin} \varphi_p}{1 - x \operatorname{Cos} \varphi_p} = 2\left(\frac{2p+1}{n}\right)^2 H\left(\frac{2p+1}{n}\right)$$

$$-\frac{(2p+1)\pi}{n} l2 \operatorname{Sin} \frac{(2p+1)\pi}{2n}. \quad (3)$$

Tribus his integralibus in ${}^mJ_n$ introductis et reductionibus quibusdam factis, invenimus

$$(n = \text{num. par.})$$

$$
{}^mJ_n = \frac{\pi^2}{2n} \overset{p=\frac{n}{2}-1}{\underset{p=0}{S}} \operatorname{Cos} m\varphi_p [\tfrac{1}{3} - (1 - \frac{2p+1}{n})^2]
$$

$$
- \frac{4}{n} \overset{p=\frac{n}{2}-1}{\underset{p=0}{S}} \frac{2p+1}{n} \operatorname{Sin} m\varphi_p \left[\frac{2p+1}{n} H\left(\frac{2p+1}{n}\right) - \frac{\pi}{2} l 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\varphi_p \right]. \quad (4)
$$

$$(n = \text{num. imp.})$$

$$
{}^mJ_n = \frac{(-1)^m \pi^2}{12n} + \frac{\pi^2}{2n} \overset{p=\frac{n-3}{2}}{\underset{p=0}{S}} \operatorname{Cos} m\varphi_p [\tfrac{1}{3} - (1 - \frac{2p+1}{n})^2]
$$

$$
- \frac{4}{n} \overset{p=\frac{n-3}{2}}{\underset{p=0}{S}} \frac{2p+1}{n} \operatorname{Sin} m\varphi_p \left[\frac{2p+1}{n} H\left(\frac{2p+1}{n}\right) - \frac{\pi}{2} l 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\varphi_p \right]. \quad (5)
$$

$$
(\varphi_p = \frac{(2p+1)\pi}{n}).
$$

Si definiti valores numeris m et n dantur, saepenumero reductiones haud contemnendae auxilio formularum *), in commentariolo demonstratarum, fieri possunt. Huc accedit, ut integralia, in quibus, usurpata prius formula (4), post substitutionem quandam formula (4) aut (5) uti liceat, diversarum functionum H inter se nexum praebeant. Positis, ut exemplum proferam, $m = 1$, $n = 4$, habebimus

$$
{}^1J_4 = - \frac{1}{8\sqrt{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{2} + \pi l(\sqrt{2}+1) + H(\tfrac{1}{4}) - H(\tfrac{1}{2}) \right\}.
$$

Attamen formula illa multaeque aliae in simpliciorem formam transeunt, introducta alia transcendente $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\operatorname{Sin} ax}$, quae l. c. per $L(a)$ designata est quaeque cum $H(a)$ hac simplici conjuncta est aequatione

$$
L(a) = H\left(\frac{a}{2}\right) - H(a).
$$

---

*) E quibus afferam

$$
(1-b)^2 H(1-b) + (1+b)^2 H(1+b) = \frac{\pi}{2} l 2 \operatorname{Cos} \frac{b\pi}{2}.
$$

Quo facto, formula nuper allata mutatur in

$$^1J_4 = -\frac{1}{8\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi^2}{2} + \pi l(\sqrt{2}+1) + L(\tfrac{1}{2})\right\}.$$

Quod si integrale sine auxilio formulae (4) quaerimus, incidimus in integrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \operatorname{Arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},$$

quod solitis rationibus invenire non potui. Quum vero sit

$$\operatorname{Arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} = \operatorname{Arctg} \frac{x}{\sqrt{2}-x} + \operatorname{Arctg} \frac{x}{\sqrt{2}+x},$$

invenitur

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \operatorname{Arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} = \tfrac{1}{4}\{\pi l(\sqrt{2}+1) + L(\tfrac{1}{2})\}.$$

Duplex usus formulae (4) et (5) demonstrari potest integrali

$$^3J_6 = \int_0^1 \frac{x^2 lx\, dx}{1+x^6},$$

quod, substituendo x pro x^3, mutatur in

$$^3J_6 = \tfrac{1}{9}\int_0^1 \frac{lx\, dx}{1+x^2}.$$

Quum formula (4) in utroque adhibitur, invenimus, reductionibus quibusdam factis,

$$6H(\tfrac{1}{2}) - L(\tfrac{1}{2}) = \frac{3\pi}{2}\, l4 \operatorname{Cot}\frac{\pi}{12},$$

vel, quia est $H(\tfrac{1}{2}) = H(1) + L(1) = \frac{\pi}{2} l2 + L(1)$,

$$6L(1) - L(\tfrac{1}{2}) = \frac{3\pi}{2}\, l \operatorname{Cot}\frac{\pi}{12}.$$

E functione, quam per $H(\ldots.)$ designavimus, pendet quoque integrale

$$J = \int_0^a \frac{l(1+x)}{1+x^2}\, dx,$$

quod, posito

$$x = \operatorname{tg}\psi, \quad \operatorname{Arctg} a = \varepsilon,$$

mutatur in

$$J = \int_0^\varepsilon l(1 + \operatorname{tg}\psi)\, d\psi.$$

Jam vero, quia est

$$1 + \operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right)}{\operatorname{Cos}\psi},$$

evadit

$$J = \varepsilon l\sqrt{2} + \int_0^\varepsilon l\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right) d\psi - \int_0^\varepsilon l\operatorname{Cos}\psi\, d\psi,$$

vel, per partes integrando:

$$J = \varepsilon l\sqrt{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) - \varepsilon l\operatorname{Cos}\varepsilon - \int_0^\varepsilon \psi\operatorname{Cot}\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right) d\psi - \int_0^\varepsilon \psi\operatorname{tg}\psi\, d\psi.$$

Posito

$$\frac{\pi}{4} + \psi = \varphi$$

invenitur

$$\int_0^\varepsilon \psi\operatorname{Cot}\left(\frac{\pi}{4} + \psi\right) d\psi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\varepsilon} \varphi\operatorname{Cot}\varphi\, d\varphi - \frac{\pi}{4} l\sqrt{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$$

$$= (\tfrac{1}{2} + \frac{2\varepsilon}{\pi})^2 H(\tfrac{1}{2} + \frac{2\varepsilon}{\pi}) - \tfrac{1}{4} H(\tfrac{1}{2}) - \frac{\pi}{4} l\sqrt{2}\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right).$$

Positoque $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, invenitur

$$\int_0^\varepsilon \psi\operatorname{tg}\psi\, d\psi = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Cot}\varphi\, d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\operatorname{Cot}\varphi\, d\varphi$$

$$= -\frac{\pi}{2} l\operatorname{Cos}\varepsilon - H(1) + (1 - \frac{2\varepsilon}{\pi})^2 H(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi})$$

$$= -\frac{\pi}{2} l2\operatorname{Cos}\varepsilon + (1 - \frac{2\varepsilon}{\pi})^2 H(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}).$$

Si valores inventi substituuntur, prodit

$$J = \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) l\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) + \frac{\pi}{2} l2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - \varepsilon l\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + \tfrac{1}{4}H(\tfrac{1}{2})$$

$$-(\tfrac{1}{2} + \frac{2\varepsilon}{\pi})^2 H(\tfrac{1}{2} + \frac{2\varepsilon}{\pi})(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi})^2 H(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}).$$

Posito $a = 1$ vel $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$, invenimus

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} l2,$$

quod integrale (vide Tom. VI. praec. pag. 448.) a **Serret** et ante eum a **Bertrand** in diario C^i^ **Liouville** propositum est.

V.

Ueber krummlinige Coordinaten.

Von

Herrn Doctor *Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

Im Allgemeinen wird die Lage eines Punktes im Raume dadurch bestimmt, dass man drei sich rechtwinklig kreuzende Axen annimmt und den Punkt als den Durchschnitt von drei auf diesen Axen beziehungsweise perpendikulären Ebenen betrachtet. Diese Ebenen, welche gleichfalls auf einander senkrecht stehen, bilden das erste und einfachste Beispiel eines orthogonalen Flächensystems dar. Eine zweite Bestimmungsweise der Lage eines Punktes im Raume ist die, dass derselbe als der Durchschnitt von drei orthogonalen Flächen zweiten Grades angesehen wird, und zwar von

einem Ellipsoid (ϱ), einem einmantligen Hyperboloid (μ) und einem zweimantligen Hyperboloid (ν). Diese Flächen haben zugleich die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre Hauptschnitte dieselben Brennpunkte haben, wesshalb sie homofokal genannt werden. Die Gleichungen derselben sind:

$$(1)\quad \frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1,\quad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1.$$

Die grossen Halbaxen dieser Flächen sind ϱ, μ, ν; b und c sind die Entfernungen der Brennpunkte vom Mittelpunkt der beiden Hauptschnitte, welche die grosse und mittlere, die grosse und kleine Axe enthalten, also ist $c>b$. Ein Punkt ($\varrho\mu\nu$) im Raume ist sonach bestimmt, wenn die grossen Halbaxen ϱ, μ, ν der drei durch ihn gehenden homofokalen Flächen gegeben sind. Will man von einem Punkt auf dem Ellipsoid zu einem andern auf dieser Fläche übergehen, so bleibt ϱ constant; $\varrho=$ const. ist also die Gleichung aller Punkte auf dem Ellipsoid, gerade so wie z. B. $z=$ const. beim gewöhnlichen Coordinatensystem die Gleichung der Ebene ist, welche auf der z-Achse senkrecht steht. Die Gleichung einer beliebigen, auf dem Ellipsoid (ϱ) gezogenen Linie hat die Form $\mu=f(\nu)$, weil beim Uebergang von einem Punkt des Ellipsoids (ϱ) zu einem anderen von den drei Grössen ϱ, μ, ν sich nur die beiden letzteren ändern. Die Gleichungen einer Durchschnittslinie von zwei homofokalen Flächen, z. B. von (ϱ) und (μ), sind

$$(2)\qquad \varrho=\text{const.},\quad \mu=\text{const.},$$

wie z. B. beim gewöhnlichen Coordinatensystem die Gleichungen einer Linie, die parallel der x-Axe ist, $z=$const., $y=$const. sind.

Nach dem Satze von Dupin schneiden sich orthogonale Flächen in ihren Krümmungslinien; bestimmt man also einen Punkt im Raume durch drei homofokale Flächen oder durch elliptische Coordinaten, so nehmen die Gleichungen der Krümmungslinien die äusserst einfache Form (2) an. Die beiden Brennpunkts-Entfernungen b und c sind unveränderlich für ein elliptisches Coordinatensystem; veränderlich sind nur die Halbaxen ϱ, μ, ν der drei durch den Punkt ($\varrho\mu\nu$) gehenden homofokalen Flächen, wenn man zu einem anderen Punkte ($\varrho'\mu'\nu'$) übergeht. Es liegt in der Natur dieser Flächen, dass immer $\varrho>c$, $\mu<c$ und $>b$, $\nu<b$ sein muss.

Wir bezeichnen die Entfernung eines Punkts $(\varrho\mu\nu)$ vom Mittelpunkte des elliptischen Coordinatensystems (dem gemeinsamen Mittelpunkte der drei homofokalen Flächen) durch D, so ist

$$D^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2. \tag{3}$$

Ist D constant, so erhalten wir die Gleichung einer Kugel in elliptischen Coordinaten:

$$\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 = \text{const.}, \tag{4}$$

welche, wie man sieht, dieselbe Form hat, wie die Gleichung der Kugel in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten, und folgendes Theorem enthält:

Wenn sich ein Punkt auf einer Kugel bewegt, so ist die Quadratsumme der Halbaxen der drei durch ihn gehenden konzentrischen homofokalen Flächen konstant.

Bewegt sich der Punkt auf dem Ellipsoid (ϱ) so, dass seine Entfernung vom Mittelpunkte konstant bleibt, so ist in (3) $D =$ const., $\varrho =$ const. zu setzen, mithin erhält man:

$$\mu^2 + \nu^2 = \text{const.} \tag{5}$$

für die Gleichung einer sphärischen Curve auf einer Fläche zweiten Grades.

Wir betrachten ein durch vier Krümmungslinien auf dem Ellipsoid (ϱ) gebildetes Viereck $abcd$. Die vier Punkte a, b, c, d sind durch elliptische Coordinaten auf folgende Art bestimmt: a durch $(\varrho\mu\nu)$, b durch $(\varrho\mu_1\nu)$, c durch $(\varrho\mu_1\nu_1)$, d durch $(\varrho\mu\nu_1)$. a und c sind also Gegenecken. Die vier vom Mittelpunkte nach den Ecken dieses Vierecks gezogenen Radien sollen D_a, D_b, D_c, D_d heissen. Durch Vergleichung mit (3) erhalten wir die Gleichung:

$$D_a^2 + D_c^2 = D_b^2 + D_d^2; \tag{6}$$

hierin liegt der Satz: Wenn man nach den vier Ecken eines von vier Krümmungslinien auf einer Fläche zweiten Grades gebildeten Vierecks vom Mittelpunkt aus Radien zieht, so ist die Quadratsumme der nach zwei Gegenecken gezogenen Radien gleich der Quadratsumme der beiden andern.

Wir nehmen nun ein zweites Ellipsoid (ϱ') an, welches die vier homofokalen Flächen (μ) und (μ'), (ν) und (ν'), die durch die krummlinigen Seiten des Vierecks $abcd$ bestimmt sind, in dem Viereck $a'b'c'd'$ schneiden, so sind diese vier neuen Punkte durch elliptische Coordinaten also zu bezeichnen: a' durch $(\varrho'\mu\nu)$, b'

durch $(\varrho'\mu'\nu)$, c' durch $(\varrho'\mu'\nu')$, d' durch $(\varrho'\mu\nu')$; die vier vom Mittelpunkte nach den Ecken $a'b'c'd'$ gezogenen Radien bezeichnen wir mit $D_{a'}$, $D_{b'}$, $D_{c'}$, $D_{d'}$; die Gleichungen (3) und (6) führen nun sogleich auf die Formel:

$$D_a^2 + D_{c'}^2 = D_b^2 + D_{d'}^2 = D_c^2 + D_{a'}^2, \tag{7}$$

d. h.: Zieht man vom Mittelpunkte nach den Ecken eines von sechs homofokalen Flächen gebildeten Parallelepipeds Radien, so sind die Quadratsummen der nach je zwei Gegenecken gezogenen Radien einander gleich.

Die Gleichung (1) lässt sich auch in folgender Weise schreiben:

$$\varrho^6-(b^2+c^2+x^2+y^2+z^2)\varrho^4+\{b^2c^2+b^2(x^2+z^2)+c^2(x^2+y^2)\}\varrho^2-b^2c^2x^2=0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind ϱ^2, μ^2, ν^2, und zwar ist nach der Theorie der Gleichungen:

$$\varrho^2+\mu^2+\nu^2=b^2+c^2+x^2+y^2+z^2,$$
$$\varrho^2\mu^2+\varrho^2\nu^2+\mu^2\nu^2=b^2c^2+b^2(x^2+z^2)+c^2(x^2+y^2),$$
$$\varrho^2\mu^2\nu^2=b^2c^2x^2.$$

Hieraus ergeben sich folgende Werthe:

$$bcx=\varrho\mu\nu,\quad b\sqrt{c^2-b^2}.y=\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}, \tag{8}$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}.z=\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}.$$

Man ziehe nun vom Mittelpunkte O nach einem beliebigen Punkte M oder $(\varrho\mu\nu)$ die Linie $OM=D$, so lassen sich die Cosinus $\frac{x}{D}$, $\frac{y}{D}$, $\frac{z}{D}$ der Winkel, welche OM mit den Axen bildet, zufolge der Gleichungen (3) und (8) sogleich in elliptische Coordinaten umsetzen. Für einen zweiten Punkt M' oder $(\varrho'\mu'\nu')$ sei $OM'=D'$, so ist

$$\cos MOM'=\frac{xx'}{DD'}+\frac{yy'}{DD'}+\frac{zz'}{DD'}$$

oder

$$D.D'\cos MOM' \tag{9}$$
$$=\frac{\varrho\mu\nu\varrho'\mu'\nu'}{b^2c^2}+\frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\varrho'^2-b^2}\sqrt{\mu'^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu'^2}}{b^2(c^2-b^2)}$$
$$+\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\varrho'^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}}{c^2(c^2-b^2)}.$$

Diese Formel, angewendet auf die Winkel aOc und bOd, welche die nach den Ecken des von vier Krümmungslinien auf dem Ellipsoid (ϱ) gebildeten Vierecks gezogenen Radien $Oa=D_a$, $Ob=D_b$, $Oc=D_c$, $Od=D_d$ mit einander machen, führt auf

$$(10) \qquad D_a.D_c.\cos aOc = D_b.D_d.\cos bOd.$$

Nun ist, zufolge eines bekannten geometrischen Satzes:

$$\overline{ac}^2 = D_a^2 + D_c^2 - 2D_a.D_c.\cos aOc$$

und

$$\overline{bd}^2 = D_b^2 + D_d^2 - 2D_b.D_d.\cos bOd.$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit (6) und (10), führt auf:

$$(11) \qquad ac = bd.$$

In jedem von vier Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades gebildeten Viereck ist die Entfernung von zwei Gegenecken gleich der Entfernung der beiden andern Ecken.

Ganz auf ähnliche Art lässt sich der Satz beweisen:

In jedem von sechs homofokalen Flächen gebildeten rechtwinkligen Parallelepiped ist die Entfernung von zwei Gegenecken gleich der Entfernung der beiden andern.

Würde man die acht Ecken dieses Parallelepipeds durch gerade Linien verbinden, so erhielte man ein achteckiges Polyeder, worin die drei Diagonalen gleich sind, welche je zwei Gegenecken verbinden.

Für die Entfernung zweier beliebigen Punkte M und M' haben wir die Relation:

$$\overline{MM'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 - 2OM.OM'.\cos MOM'.$$

Um hieraus die Gleichung einer Kugel zu finden, deren Mittelpunkt M' ist, bezeichnen wir die konstanten Ausdrücke

$$\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - 2b^2 - 2c^2 \text{ mit } \alpha, \quad 2\frac{\varrho'\mu'\nu'}{b^2c^2} \text{ mit } \beta,$$

$$2\frac{\sqrt{\varrho'^2-b^2}\sqrt{\mu'^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu'^2}}{b^2(c^2-b^2)} \text{ mit } \gamma$$

und

$$2\frac{\sqrt{\varrho'^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}}{c^2(c^2-b^2)} \text{ mit } \delta$$

und erhalten:

$$(12)\qquad \overline{MM'}^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 + \alpha - \varrho\mu\nu.\beta$$
$$-\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}.\gamma - \sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}.\delta.$$

Setzt man hier $\varrho = \varrho' = \text{const.}$, so ergibt sich die Gleichung einer sphärischen Curve auf dem Ellipsoid (ϱ), wenn der Mittelpunkt der Kugel auf dieser Fläche liegt.

Man lege durch den Punkt M oder $(\varrho\mu\nu)$ eine Tangential-Ebene an die Fläche (ϱ) und fälle vom Mittelpunkte O auf dieselbe eine Senkrechte P, so ist

$$(13)\qquad P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}.$$

Bezeichnen wir nun die vier Senkrechten, welche von O auf die vier Tangential-Ebenen von (ϱ) in den Ecken des Vierecks $abcd$ gefällt werden können, mit P_a, P_b, P_c, P_d, so erhalten wir aus (13) die Formel

$$(14)\qquad P_a.P_c = P_b.P_d.$$

Die vier Perpendikel, welche vom Mittelpunkte einer Fläche zweiten Grades auf die Ebenen sich ziehen lassen, welche dieselbe in den Ecken eines von Krümmungslinien gebildeten Vierecks berühren, bilden eine Proportion.

Es liessen sich hieraus wieder weitere Consequenzen ziehen hinsichtlich der 24 Perpendikel, die man auf die Ebenen fällen kann, welche sechs homofokale Flächen in den Ecken eines von ihnen gebildeten Parallelepipeds berühren, doch wollen wir davon abstrahiren und zu den wichtigeren Formeln der Krümmungshalbmesser der Normalschnitte übergehen. Wir bezeichnen die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser von (ϱ) im Punkte $(\varrho\mu\nu)$ mit R und R', so ist

$$(15)\qquad R = \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}^3}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}},\quad R' = \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}^3\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}.$$

Hieraus lässt sich analog dem Früheren schliessen, dass die vier Krümmungshalbmesser R_a, R_b, R_c, R_d in den Ecken des von Krümmungslinien gebildeten Vierecks einer Fläche zweiten Grades eine Proportion bilden, und dass diess gleichfalls bei den andern vier Krümmungshalbmessern in diesen vier Ecken stattfindet.

Die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser der Fläche (μ) im Punkte ($\varrho\mu\nu$) bezeichnen wir mit M und M' und diejenigen von (ν) mit N und N', so ist:

$$(16)\quad M=\frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}^3}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},\quad M'=-\frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}^3\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

$$(17)\quad N=-\frac{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}^3\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}},\quad N'=-\frac{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}^3}{\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(18)\qquad R.M'.N'=R'.M.N,$$

$$(19)\qquad \frac{R}{R'}+\frac{M}{M'}=1,\quad \frac{R'}{R}+\frac{N'}{N}=1,\quad \frac{M'}{M}+\frac{N}{N'}=1.$$

Die Gleichung (18) ist von Lamé angegeben worden, welcher in dem Mémoire sur les coordonnées curvilignes die allgemeinen Formeln für ein beliebiges krummliniges Coordinatensystem aufstellte und insbesondere auch als der Schöpfer der elliptischen Coordinaten angesehen werden muss. Die Gleichungen (19) sind von Bertrand. Sie lassen folgende einfache geometrische Deutung zu: Wenn man durch einen Punkt im Raume drei homofokale Flächen legt und auf ihren Normalen die Krümmungsmittelpunkte mit R und R', M und M', N und N' bezeichnet, so liegen die Durchschnittspunkte der durch M und R mit diesen Normalen gezogenen Parallelen auf der Richtung $M'R'$, der durch M' und N gezogenen Parallelen auf MN' und der durch R' und N' gezogenen Parallelen auf NR.

Wenn ϱ um $d\varrho$ wächst, so ist die Entfernung der unendlich nahen Punkte M auf (ϱ) und M' auf $(\varrho+d\varrho)=ds$:

$$(20)\qquad ds=\frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}d\varrho.$$

Bezeichnen wir die Werthe von ds in den vier Ecken $abcd$ mit ds_a, ds_b, ds_c, ds_d, so ist

$$ds_a.ds_c=ds_b.ds_d.$$

Die vier unendlich kleinen Seiten eines von sechs homofokalen Flächen gebildeten Parallelepipeds, wovon zwei gleichartige einander unendlich nahe sind, bilden eine Proportion.

VI.

Allgemeine Berechnung der Stromstärken in Galvanometern.

Von

Herrn Dr. *Wilh. Matzka*,

Professor der Mathematik an der Hochschule zu Prag.

Der Bau der jetzt gebräuchlichen Galvanometer, nemlich Pouillet's und Gaugain's Tangentenboussole, so wie Pouillet's und Poggendorff's Sinus-Boussole, besteht bekanntlich im Wesentlichen darin, dass durch einen in lothrechter Ebene stehenden metallenen Kreisreif ein galvanischer Strom geleitet wird, welcher eine in seiner Nähe befindliche wagrechte Magnetnadel um einen Winkel aus dem magnetischen Meridian ablenkt, aus dessen beobachteter Weite man die jedesmalige Stärke dieses Stromes zu berechnen vermag. Bei Beobachtungen mittels der Tangentenboussolen wird die Ebene des Kreisringes fest in den magnetischen Meridian gestellt, bei jenen mittels der Sinusboussolen dagegen so weit um den lothrechten Durchmesser gedreht, bis die Nadel in die Ebene des Reifes selbst zu stehen kommt.

Ursprünglich stellten die Erfinder dieser galvanischen Messwerkzeuge den Drehpunkt der Nadel, der wegen ihrer Kürze immer in ihrer Mitte zwischen Nord- und Südpol liegend angenommen werden darf, in den Mittelpunkt des Kreisreifs: Gaugain (1853) richtete ihn jedoch verschiebbar in der (zu seiner Ebene senkrechten) Axe des Kreisreifs ein. Diese letztere allgemeinere Einrichtung will ich in vorliegender Abhandlung auch bei den Sinusboussolen dergestalt voraussetzen, dass bei ihrem Gebrauche die Nadel zur Ebene des Stromringes parallel zu stehen kommen solle.

Für die gewöhnlichen Galvanometer, bei denen der Drehpunkt der Magnetnadel mit dem Mittelpunkte des Stromkreises

zusammenfällt, hat Herr Oberlehrer Dr. Hädenkamp (im Archiv 1854, 23. Theil, S. 217—223) die allgemeine Berechnung der Stromstärke genügend skizzirt; für Gaugain's Tangentenboussole aber hat vornehmlich Bravais (in den Annales de Chimie et de Phys., 1853, 3. ser., vol. 38, pag. 301—311) die analytische Untersuchung elegant und vollständig durchgeführt. Im Folgenden sollen nun die allgemeinsten Messwerkzeuge dieser Art rechnend erforscht, sohin die Annahmen gemacht werden: 1) dass der Dreh- oder Mittelpunkt der Nadel wo immer in einer, gegen den beliebig geformten Stromreif unwandelbaren Stellung stehe, und 2) dass während aller Beobachtungen an Tangentenboussolen die Ebene des Stromringes unter einem bestimmten Neigungswinkel gegen den magnetischen Meridian fest stehen gelassen werde, hingegen bei Benützung von Sinusboussolen beim Ablesen der Stellung der Magnetnadel diese mit der Strom-Ebene oder mit dem zu ihr parallelen Durchmesser des unterhalb der Nadel angebrachten und in Grade getheilten Vollkreises einen bestimmten (immer gleich bleibenden) Winkel einschliesse.

Als höchst merkwürdiges Ergebniss aus meinen Rechnungen glaube ich die bisher nicht bekannte Wahrheit hervorheben zu dürfen, dass bei der Sinusboussole die Stromstärke **jederzeit** dem Sinus des Ablenkungswinkels der Magnetnadel aus dem magnetischen Meridian **streng** proportionirt ist, es mag der Stromring in seiner **lothrechten** Ebene was immer für eine krumme Linie bilden, der Drehpunkt der Nadel hinsichtlich des Stromringes und seiner Ebene wo immer fest stehen und bei der Beobachtung der endlichen Nadelstellung diese mit der Ebene des Stromreifs was immer für einen bestimmten unveränderlichen Winkel machen.

1.

Allgemeine Bestimmung der Einwirkung eines elektrischen Stromleiters auf einen magnetisirten **Punkt**.

I. Sei AB (Taf. I. Fig. I.) ein beliebig gestalteter linearer Leiter eines elektrischen Stromes, der auf einen magnetisirten Punkt N einwirkt. Im Punkte M, am Ende des Leiterbogens $AM=s$, beginne das Strom-Element $MM'=ds$, welches gegen dessen Abstand von N, nemlich gegen $NM=r$, unter dem Winkel θ geneigt ist. Des Stromes Stärke (Intensität) sei i, des Punktes N Magnetismus m, die specifische (eigenthümliche) beständige Wechselwirkung der Elektricität und des Magnetismus

s; dann geschieht, gemäss der aus Savart's und Biot's elektromagnetischen Versuchen durch Laplace abgezogenen Proportionalitäten und Lehren, die Wirkung dp des Strombestandtheilchens ids auf den Magnetismus m im Punkte N, nach der auf der Ebene NMM' (von r und ds) senkrechten Richtung $N.dp$ und mit der Stärke

$$dp = \varkappa im \frac{ds.\sin\theta}{r^2},$$

oder wenn man abkürzend $\varkappa im = \mu$ setzt, mit

$$dp = \mu \frac{\sin\theta.ds}{r^2}.$$

II. In Bezug auf ein beliebig wo aufgestelltes System winkelrechter Coordinatenaxen seien x, y, z die Coordinaten des Strompunktes M; so sind dx, dy, dz die Projectionen und $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Richtcosinus *) des Stromtheilchens ds.

Ferner seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Projectionen des Strahles $NM = r$ auf die Coordinatenaxen, also $\frac{\mathfrak{X}}{r}, \frac{\mathfrak{Y}}{r}, \frac{\mathfrak{Z}}{r}$ die Richtcosinus desselben; so hat man für die Richtwinkel α, β, γ der auf ds und r zugleich senkrechten Richtung $N.dp$ der Kraft dp die Bedingungsgleichungen

$$\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma = 0,$$

$$\frac{\mathfrak{X}}{r}\cos\alpha + \frac{\mathfrak{Y}}{r}\cos\beta + \frac{\mathfrak{Z}}{r}\cos\gamma = 0,$$

und sonach die Proportionen

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\mathfrak{Y}}{r}\frac{dz}{ds} - \frac{\mathfrak{Z}}{r}\frac{dy}{ds}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\mathfrak{Z}}{r}\frac{dx}{ds} - \frac{\mathfrak{X}}{r}\frac{dz}{ds}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{\mathfrak{X}}{r}\frac{dy}{ds} - \frac{\mathfrak{Y}}{r}\frac{dx}{ds}} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Demgemäss zerfällt die Elementarkraft dp in die drei zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten

$$dp.\cos\alpha, \quad dp.\cos\beta, \quad dp.\cos\gamma,$$

und folglich, wenn

*) Cosinus der Richtwinkel der Berührungslinie am Punkte M der Krummen AB, d. i. der Winkel der positiven Richtung dieser Geraden mit den positiven Richtungen der Axen der x, y, z.

$$X,\quad Y,\quad Z$$

die eben so gerichteten Componenten der vereinten oder Gesammtwirkung P des ganzen Stromleiters AB auf den magnetisirten Punkt N bedeuten, hat man

$$X = \int dp . \cos\alpha,\quad Y = \int dp . \cos\beta,\quad Z = \int dp . \cos\gamma;$$

oder wenn man nach Obigem die Richtcosinus ausdrückt:

$$X = \mu \int \frac{\mathbf{Y} dz - \mathbf{Z} dy}{r^3},$$

$$Y = \mu \int \frac{\mathbf{Z} dx - \mathbf{X} dz}{r^3},$$

$$Z = \mu \int \frac{\mathbf{X} dy - \mathbf{Y} dx}{r^3};$$

wobei selbstverständlich die Integrationen über die ganze Ausdehnung des Stromleiters AB sich erstrecken.

Hierin ist bekanntlich auch noch

$$r^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2,$$

und die Coordinaten des magnetischen Punktes N sind:

$$x - \mathbf{X},\quad y - \mathbf{Y},\quad z - \mathbf{Z}.$$

2.

Einwirkung des Stroms auf eine Magnetnadel.

Denkt man sich den Magnetismus einer Magnetnadel blos in ihren beiden Polen, dem Nordpole N und dem Südpole S, angehäuft; so mögen für jenen Nordpol die bisher allgemein für einen magnetischen Punkt N angenommenen Grössen und abgeleiteten Ausdrücke gelten, für diesen Südpol S aber die gleichnamigen Grössen je mit einem Striche (Accent) unterschieden werden. Dann findet man die Componenten der elektromagnetischen Wirkung:

$$X' = \mu' \int \frac{\mathbf{Y}' dz - \mathbf{Z}' dy}{r'^3},$$

$$Y' = \mu' \int \frac{\mathbf{Z}' dx - \mathbf{X}' dz}{r'^3},$$

$$Z' = \mu' \int \frac{\mathbf{X}' dy - \mathbf{Y}' dx}{r'^3};$$

für $r' = SM$ den Ausdruck

$$r'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2,$$

und des Südpols Coordinaten:

$$x - X', \quad y - Y', \quad z - Z'.$$

3.

Wirkung des Erdmagnetismus auf die Magnetnadel und Gleichgewicht zwischen den beiderlei Wirkungen.

Auf die Magnetnadel oder auf ihre beiden Pole wirkt auch noch, und zwar ununterbrochen, der Magnetismus des ganzen Erdkörpers — der Erdmagnetismus — nach einer gewissen Richtung und mit einer Stärke, welche beide auf die Dauer der anzustellenden Messbeobachtungen jedesmal für unveränderlich angesehen werden dürfen. Seien u, v, w die Richtcosinus der positiven Richtung dieser Axe der erdmagnetischen Kraft, und sei J die Stärke des auf die Einheit des Magnetismus einwirkenden Erdmagnetismus, also Jm und Jm' seine Wirkungen auf den Nord- und Südpol der Nadel, endlich seien

U, V, W die Componenten des auf den Nordpol
und U', V', W' „ „ „ „ „ Südpol

wirkenden Magnetismus, so gelten bekanntlich die Proportionen:

$$Jm : U : V : W = Jm' : U' : V' : W' = 1 : u : v : w,$$

welche zur Ausdrückung dieser Kraftcomponenten dienen.

Zwischen den Einwirkungen des elektrischen Stromes und des Erdmagnetismus auf die Magnetnadel, welche um eine unverrückbare Axe sich zu drehen vermag, muss nothwendig im Augenblick des Ablesens des Standes der zur Ruhe gelangten Nadel Gleichgewicht herrschen. Es muss demnach sowohl die Summe der Projectionen aller auf die Nadel einwirkenden Kräfte auf diese feste Axe, als auch die Summe der Drehmomente sämmtlicher dieser Kräfte um dieselbe standfeste Axe einzeln verschwinden.

4.

Abschweifung (Digression) auf eine allgemeine Zusammensetzung von Kräften an einem Systeme von Stoffpunkten.

Da erwähnte Gleichgewichtsbedingungen in den Lehrbüchern

der Statik immer nur beschränkt, nemlich blos für den Fall, wo man die feste Axe zu einer Coordinatenaxe gewählt hat, abgehandelt werden; so wollen wir sie, und ihr entsprechend die allgemeine Zusammensetzung von beliebigen, auf ein System von Stoffpunkten einwirkenden Kräften, mittels Zerlegung nach einer willkürlichen Axe hier kurz vornehmen.

I. Sei eine Kraft P am Punkte $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ thätig und in ihre drei winkelrechten Coordinaten X, Y, Z zerlegt; ferner sei eine feststehende Axe, deren Richtcosinus zu a, b, c proportionirt sind, durch einen festgestellten Punkt $x_1 y_1 z_1$ geführt, also ihre Gleichungen:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c},$$

wenn $x\,y\,z$ laufende Coordinaten vorstellen. Wir zerlegen nun die Kraft P parallel und senkrecht zur standfesten Axe in die Kräfte P' und P'', oder wir suchen ihre Projectionen P' und P'' auf diese Axe und auf eine zu ihr senkrechte Ebene.

Setzt man abkürzend

$$a^2+b^2+c^2=h^2,$$

und nimmt h positiv an, so sind $\frac{a}{h}, \frac{b}{h}, \frac{c}{h}$ die Richtcosinus der standfesten Axe, folglich ist die erste Projection:

$$P'=X\frac{a}{h}+Y\frac{b}{h}+Z\frac{c}{h}=\frac{aX+bY+cZ}{h}.$$

Die auf ihr senkrechte zweite Projection ist sonach:

$$P''=\sqrt{P^2-P'^2}=\frac{1}{h}\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)(a^2+b^2+c^2)-(aX+bY+cZ)^2}$$

oder

$$P''=\frac{1}{h}\sqrt{[(bZ-cY)^2+(cX-aZ)^2+(aY-bX)^2]}.$$

Diese Kraft strebt die Drehung ihres Angriffspunktes um die ständige Axe an, mit einem Drehmomente (einem Drehbestreben) $=P''p$, wenn p den senkrechten Abstand der Richtung der Kraft P'' oder der Kraft P von derselben Axe vorstellt.

Dieser Abstand p ist aber die Projection jedweder Verbindungsstrecke der genannten zwei Geraden, also auch der vom Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ zu $\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z}$ hin gehenden Strecke, oder ihrer drei

winkelrechten Projectionen $\dot{x}-x_1=\xi$, $\dot{y}-y_1=\eta$, $\dot{z}-z_1=\zeta$ auf jede zu den beiden angeführten Richtungen zugleich senkrechte Gerade. Nun sind die Richtcosinus der Richtung der Kraft P proportional zu X, Y, Z, jene der festen Axe proportional zu a, b, c, mithin sind die Richtcosinus ihrer gemeinschaftlichen Senkrechten proportional zu

$$bZ-cY,\quad cX-aZ,\quad aY-bX,$$

und sonach ist der fragliche senkrechte Abstand:

$$p=\xi\frac{bZ-cY}{hP''}+\eta\frac{cX-aZ}{hP''}+\zeta\frac{aY-bX}{hP''}.$$

Demgemäss ist endlich das Drehmoment der Kraft P oder die, im Abstande 1 und auf der Axe senkrecht drehend, ihr gleichwirksame (äquivalente) Kraft:

$$P''p=\frac{a}{h}(\zeta Y-\eta Z)+\frac{b}{h}(\xi Z-\zeta X)+\frac{c}{h}(\eta X-\xi Y).$$

II. Seien nunmehr an einem starren Systeme von Stoffpunkten $(\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z})$, $(\dot{x}_1\,\dot{y}_1\,\dot{z}_1)$, $(\dot{x}_2\,\dot{y}_2\,\dot{z}_2)$.... Kräfte P, P_1, P_2,.... oder ihre Componenten (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1),.... angebracht. Da zerfällt jede dieser Kräfte in eine zur Axe gleichlaufende Kraft und in ein auf der Axe senkrechtes Drehmoment, folglich das ganze Kräftesystem in das System der Parallelkräfte P', P_1', P_2',.... und in das System der Drehmomente $P''p$, $P_1''p_1$, $P_2''p_2$, ... Ersteres System hat zur resultirenden Kraft R' die Summe

$$R'=P'+P_1'+P_2'+....=\Sigma\frac{aX+bY+cZ}{h}=\frac{a\Sigma X+b\Sigma Y+c\Sigma Z}{h},$$

wirksam am Punkte $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$, bestimmt durch die auf die Ebenen yz, zx, xy bezogenen Momentengleichungen:

$$R'\mathfrak{x}=\Sigma\frac{aX+bY+cZ}{h}\dot{x}=\frac{a\Sigma X\dot{x}+b\Sigma Y\dot{x}+c\Sigma Z\dot{x}}{h},$$

$$R'\mathfrak{y}=\Sigma\frac{aX+bY+cZ}{h}\dot{y}=\frac{a\Sigma X\dot{y}+b\Sigma Y\dot{y}+c\Sigma Z\dot{y}}{h},$$

$$R'\mathfrak{z}=\Sigma\frac{aX+bY+cZ}{h}\dot{z}=\frac{a\Sigma X\dot{z}+b\Sigma Y\dot{z}+c\Sigma Z\dot{z}}{h};$$

das andere System dagegen hat zum resultirenden Drehmomente $R''r$ die Summe:

$$R''r = P''p + P_1''p_1 + P_2''p_2'' + \ldots.$$

$$= \frac{a}{h}\Sigma(\zeta Y - \eta Z) + \frac{b}{h}\Sigma(\xi Z - \zeta X) + \frac{c}{h}\Sigma(\eta X - \xi Y).$$

III. Indem wir die sonstigen leichten Wahrnehmungen und Schlussfolgen dem Leser überlassen, benützen wir hier nur folgende. Sollen sämmtliche erwähnte Kräfte an dem starren Systeme der Stofftheilchen, mit Hilfe der befestigten Axe und zwar insofern im Gleichgewichte stehen, dass blos die von den Kräften angestrebte Drehung des Systems um diese Axe aufgehoben werde, so muss offenbar das resultirende Drehmoment $R''r$ zu nichte werden, also

$$a\Sigma(\zeta Y - \eta Z) + b\Sigma(\xi Z - \zeta X) + c\Sigma(\eta X - \xi Y) = 0$$

sein. Sollten sie dagegen an einem festen Punkte $(x_1\, y_1\, z_1)$ dermassen im Gleichgewichte stehen, dass die Drehung um jederlei durch diesen Punkt denkbare Axe (a, b, c) behoben werde; so muss diese Gleichung für alle Werthe der drei von einander unabhängigen Grössen a, b, c bestehen, also jeder ihrer Multiplicatoren verschwinden, nemlich gleichzeitig sein:

$$\Sigma(\zeta Y - \eta Z) = 0, \quad \Sigma(\xi Z - \zeta X) = 0, \quad \Sigma(\eta X - \xi Y) = 0.$$

5.

Verwendung. Bedingnissgleichung für die Gleichgewichtsstellung der Magnetnadel am Galvanometer.

I. Da die galvanometrische Magnetnadel um eine feste Axe sich dreht, so seien $x_1\, y_1\, z_1$ die beständigen Coordinaten ihres Drehpunktes C, und die Richtcosinus dieser Drehungsaxe proportionirt zu den Beständigen a, b, c. Dann sind (gemäss Art. 1. und 3.) am Nordpole N, dessen Coordinaten wir gleich

$$\dot{x} = x - \mathbf{X}, \quad \dot{y} = y - \mathbf{Y}, \quad \dot{z} = z - \mathbf{Z}$$

fanden, die Kraftcomponenten

$$X + U, \quad Y + V, \quad Z + W$$

thätig, und die Projectionen der nördlichen Nadelhälfte $CN = L$ sind:

$$\xi = \dot{x} - x_1 = x - \mathbf{X} - x_1,$$
$$\eta = \dot{y} - y_1 = y - \mathbf{Y} - y_1,$$
$$\zeta = \dot{z} - z_1 = z - \mathbf{Z} - z_1.$$

Eben so sind am Südpole S, dessen Coordinaten wir gleich

$$\dot{x}'=x-\mathbf{X}',\quad \dot{y}'=y-\mathbf{Y}',\quad \dot{z}'=z-\mathbf{Z}'$$

fanden, die Kraftcomponenten

$$X'+U',\quad Y'+V',\quad Z'+W'$$

thätig, und die Projectionen der südlichen Nadelhälfte $CS=L'$ sind:

$$\xi'=\dot{x}'-x_1=x-\mathbf{X}'-x_1,$$
$$\eta'=\dot{y}'-y_1=y-\mathbf{Y}'-y_1,$$
$$\zeta'=\dot{z}'-z_1=z-\mathbf{Z}'-z_1.$$

II. Mithin übergeht die vorige allgemeine Bedingungsgleichung für die Drehmomente in dem gegenwärtigen Falle des Gleichgewichts der galvanometrischen Magnetnadel in nachstehende:

$$\begin{aligned}&a[\zeta(Y+V)-\eta(Z+W)+\zeta'(Y'+V')-\eta'(Z'+W')]\\&+b[\xi(Z+W)-\zeta(X+U)+\xi'(Z'+W')-\zeta'(X'+U')]\\&+c[\eta(X+U)-\xi(Y+V)+\eta'(X'+U')-\xi'(Y'+V')]=0,\end{aligned}$$

welche zur Bestimmung der fraglichen Stromstärke i aus der beobachteten Ruhestellung der Magnetnadel dienen wird.

III. Beachtet man noch, dass man den Drehpunkt C dieser Nadel jederzeit mit dem Nordpol N und Südpol S in einer Geraden liegend anzunehmen pflegt, so gelten noch die Proportionen:

$$\frac{\xi}{\xi'}=\frac{\eta}{\eta'}=\frac{\zeta}{\zeta'}=\frac{L}{L'}$$

IV. Die nördliche Hälfte $CN=L$ der Magnetnadel mache mit ihrer Drehungsaxe (a, b, c) den beständigen Winkel v, so ist

$$\cos v=\frac{a}{h}\,\frac{\xi}{L}+\frac{b}{h}\,\frac{\eta}{L}+\frac{c}{h}\,\frac{\zeta}{L}.$$

Die durch die Nadel und ihre Drehungsaxe gehende bewegliche Ebene, deren Normale sonach (wie in Art. I.) die veränderlichen Richtcosinus

$$\frac{b\zeta-c\eta}{hL\sin v},\quad \frac{c\xi-a\zeta}{hL\sin v},\quad \frac{a\eta-b\xi}{hL\sin v}$$

hat, weiche aus einer standfesten solchen Ebene, deren Normale

die ständigen Richtcosinus A, B, C, gebunden an die Bedingungsgleichungen

$$A^2+B^2+C^2=1,$$

$$Aa+Bb+Cc=0,$$

haben möge, um den Winkel δ ab, so ist:

$$\cos\delta=\frac{b\zeta-c\eta}{hL\sin\nu}A+\frac{c\xi-a\zeta}{hL\sin\nu}B+\frac{a\eta-b\xi}{hL\sin\nu}C.$$

Sohin hat man zur Ausdrückung der ξ, η, ζ durch L, ν, δ die Bestimmungsgleichungen:

$$a\xi+b\eta+c\zeta=hL\cos\nu,$$

$$(Bc-Cb)\xi+(Ca-Ac)\eta+(Ab-Ba)\zeta=hL\sin\nu\cos\delta,$$

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=L^2,$$

und sonach bleibt der Ablenkungswinkel δ als alleinige Grundveränderliche übrig, von welcher die in μ und μ' als Factor enthaltene fragliche Stromstärke i eine auszumittelnde Function ist.

6.

Vereinfachungen der aufgestellten Ausdrücke und Bestimmungsgleichungen.

I. Gewöhnlich liegt der Drehpunkt der Magnetnadel mitten zwischen deren Nord- und Südpol, daher ist:

$$L'=-L \text{ und sonach } \xi'=-\xi,\quad \eta'=-\eta,\quad \zeta'=-\zeta,$$

und sonach wird die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes (Art. 5.):

$$\begin{aligned} &a[\zeta(Y-Y'+V-V')-\eta(Z-Z'+W-W')]\\ &+b[\xi(Z-Z'+W-W')-\zeta(X-X'+U-U')]\\ &+c[\eta(X-X'+U-U')-\xi(Y-Y'+V-V')]=0.\end{aligned}$$

II. Wählt man die feste Drehungsaxe der galvanometrischen Magnetnadel zu einer Coordinatenaxe, etwa zur z-Axe, so muss, weil auf ihr die x- und y-Axe senkrecht stehen, $a=0$, $b=0$ sein und blos c willkürlich bleiben. Dann übergeht diese Bedingungsgleichung in

$$\eta(X-X'+U-U')-\xi(Y-Y'+V-V')=0.$$

und die Bestimmungsgleichungen von ξ, η, ζ in Art. 5., IV. verwandeln sich in:

$$\zeta = L\cos\nu,$$
$$B\xi - A\eta = L\sin\nu\cos\delta,$$
$$\xi^2 + \eta^2 = L^2\sin\nu^2,$$

wobei noch $Cc=0$, also $C=0$ und $A^2+B^2=1$ ist.

III. Die Magnetnadel pflegt man jederzeit so vorzurichten, dass sie auf ihrer Umdrehungsaxe senkrecht steht, also $\nu=90^\circ$ ist. Dann hat man:

$$\zeta = 0, \quad B\xi - A\eta = L\cos\delta, \quad \xi^2 + \eta^2 = L^2.$$

IV. Nimmt man die willkürlich festzustellende, durch die Drehungsaxe gehende Ebene (A, B, C) zur Ebene der yz, so kommt zu $C=0$ noch $A=\pm 1$, $B=0$. Wählt man $A=-1$, so wird:

$$\xi = L\sin\delta = -\xi', \quad \eta = L\cos\delta = -\eta', \quad \zeta = 0 = -\zeta',$$

und sonach die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht:

$$(X - X' + U - U')\cos\delta = (Y - Y' + V - V')\sin\delta.$$

V. Da die Magnetnadel wie jeder andere Körper der Schwerkraft unterworfen ist, so lässt man sie am füglichsten wagrecht schweben und in wagrechter Ebene, der xy-Ebene, sich drehen, wonach ihre Drehungsaxe, die z-Axe, lothrecht wird. Dann kann man die ebenfalls lothrechte yz-Ebene, von der aus man die Ablenkungswinkel δ zählt, entweder in den astronomischen oder — was wir hier thun werden — in den magnetischen Meridian verlegen, dabei zugleich die positive Richtung der y-Axe nordwärts und die positive Richtung der x-Axe ostwärts laufen lassen.

Bedeutet da T die wagrechte, längs der y-Axe wirksame Componente des auf den Magnetismus 1 einwirkenden Erdmagnetismus J, so ist nach der (in Art. 3.) gewählten Bezeichnung:

$$J:T = 1:v, \quad \text{also} \quad T = Jv \quad \text{und} \quad Jm: V = 1:v,$$

mithin

$$V = Jmv = Tm \quad \text{und ebenso} \quad V' = Tm'.$$

Zugleich ist, da die Richtung von J im magnetischen Meridian — der yz-Ebene — liegend auf der x-Axe senkrecht steht, der Cosinus $u=0$ folglich auch $U=0$ und $U'=0$.

Danach wird unsere Drehmomenten-Gleichung:

$$(X-X')\cos\delta-(Y-Y')\sin\delta=T(m-m')\sin\delta.$$

Gewöhnlich und mit Recht nimmt man den Magnetismus m' des Südpols jenem m des Nordpols gleich an Grösse, aber entgegengesetzt in der Beschaffenheit an, nemlich $m'=-m$. Dann wird letztere Gleichung:

$$(X\cos\delta-Y\sin\delta)-(X'\cos\delta-Y'\sin\delta)=2mT\sin\delta$$

und

$$\mu'=\varkappa im'=-\varkappa im=-\mu.$$

VI. Stellen wir noch, mit Rücksicht auf die Artikel 1. und 2., zur Abkürzung:

$$\frac{X\cos\delta-Y\sin\delta}{\mu}=H,\quad \frac{X'\cos\delta-Y'\sin\delta}{\mu'}=H',$$

so übergeht letztere Bedingungsgleichung in:

$$(H+H')\varkappa i=2T\sin\delta,$$

und sofort erhält man für die Stromstärke i allgemein deren umgekehrten Werth:

$$\frac{1}{i}=\varkappa\frac{H+H'}{2}:T\sin\delta.$$

Aus dem Absatze IV. und aus Art. 5., I. findet man nunmehr:

$$\mathbf{X}=x-x_1-L\sin\delta,\qquad \mathbf{X}'=x-x_1+L\sin\delta,$$
$$\mathbf{Y}=y-y_1-L\cos\delta,\qquad \mathbf{Y}'=y-y_1+L\cos\delta,$$
$$\mathbf{Z}=z-z_1,\qquad \mathbf{Z}'=z-z_1;$$

daher:

$$r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-2L(w-b)+L^2,$$
$$r'^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+2L(w-b)+L^2,$$

wenn man abkürzend setzt:

$$x\sin\delta+y\cos\delta=w,$$
$$x_1\sin\delta+y_1\cos\delta=b,$$

nemlich mit w und b die Projectionen der Strahlen OM und OC auf die Magnetnadel bezeichnet.

Schreibt man die Ausdrücke von X, Y des Art. 1. und dann obige von $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ in jene von H, so erhält man erst:

$$H = \int \frac{(\mathbf{X}\sin\delta + \mathbf{Y}\cos\delta)\,dz - \mathbf{Z}(dx\sin\delta + dy\cos\delta)}{r^3},$$

und danach:

$$H = \int \frac{(w - b - L)\,dz - (z - z_1)\,dw}{r^3},$$

mithin, wenn man L in $-L$ umtauscht,

$$H' = \int \frac{(w - b + L)\,dz - (z - z_1)\,dw}{r'^3}.$$

Dies sind nun die allgemeinsten Ausdrücke der Hilfsgrössen H und H' durch die laufenden Coordinaten x, y, z der Linie des Stromringes, welche überhaupt wohl auch uneben (doppelt gekrümmt) sein könnte. Kennt man demnach von dieser Linie zwei Gleichungen in x, y, z, so kann man mittels ihrer zwei der Coordinaten durch die dritte oder alle drei durch eine passliche vierte Hilfsveränderliche, also durch selbe auch die Integrande in H und H' darstellen, die danach in der ganzen Ausdehnung des Stromreifs integrirt werden müssen.

Anmerkung. Eine andere interessante Darstellung der Hilfsgrösse H wäre noch folgende. Setzt man oben

$$\mathbf{X}\sin\delta + \mathbf{Y}\cos\delta = \mathbf{T},$$

also

$$\mathbf{T} = (x - x_1)\sin\delta + (y - y_1)\cos\delta - L = w - b - L,$$

so ist

$$d\mathbf{T} = dx.\sin\delta + dy.\cos\delta,$$

folglich, da auch noch $d\mathbf{Z} = dz$ ist, erhält man:

$$H = \int \frac{\mathbf{T}d\mathbf{Z} - \mathbf{Z}d\mathbf{T}}{r^3} = \int \frac{1}{r^3\mathbf{T}^2}\, d\,\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{T}}.$$

7.

Stromlinien in scheitelrechten Ebenen.

Lenken wir jetzt auf die bei Galvanometern vorkommende Beschaffenheit des Stromringes ein, dass er nemlich (Taf. I. Fig. II.) eine in einer scheitel- oder lothrechten Ebene enthaltene geschlossene Linie $ABA'B'$ sei und dass diese Ebene um eine lothrechte Axe, die wir zur z-Axe bestimmen, sich drehen lasse. In dieser Ebene erfassen wir noch als eine fernere oder Hilfsaxe, die auf

derselben z-Axe senkrechte Einschnittslinie OA der Stromebene in die wagrechte Ebene der xy, und zählen auf ihr vom Coordinatenursprunge O aus eine neue Hilfscoordinate t des laufenden Punktes $M(x, y, z)$ im Stromreife. Dann sind in dieser drehbaren Stromebene t und z die beiden zusammengehörigen Coordinaten dieses Punktes, zwischen denen sonach für die gewählte Gestalt der Stromlinie eine eigenthümliche Gleichung, wie

$$f(t, z) = 0 \quad \text{oder} \quad z = f(t),$$

besteht.

Tritt die Stromebene aus dem magnetischen Meridiane (der yz-Ebene), oder die t-Axe aus der y-Axe um den Winkel $yOA = \varepsilon$ heraus, so sind die zwei ursprünglichen Coordinaten x, y des Punktes M die Projectionen der neuen Coordinate t auf die Axen der x und y, also

$$x = t \sin \varepsilon, \quad y = t \cos \varepsilon;$$

daher wird

$$w = t \cos(\delta - \varepsilon).$$

Dieser veränderliche Winkel $\delta - \varepsilon$ wird, wie leicht zu sehen, von der (wagrechten) Magnetnadel mit der scheitelrechten Ebene des Stromrings gebildet und wird in den ferneren Untersuchungen häufig vorkommen, weshalb wir ihn eigens, und zwar durch γ, bezeichnen wollen. Es ist sonach:

$$\delta - \varepsilon = \gamma, \quad w = t \cos \gamma, \quad dw = dt . \cos \gamma.$$

Der Drehpunkt C $(x_1\ y_1\ z_1)$ der Magnetnadel NS erhält jederzeit eine bestimmte unabänderliche Stellung gegen die Stromlinie, nemlich gegen die in ihrer Ebene befindlichen Axen der t und z, so wie gegen die durch den Coordinatenanfang O gehende normale Axe derselben Ebene — die Axe der Stromebene. Es sei demnach der (zur letzteren Axe gleichlaufende) Abstand dieses Drehpunktes von der Stromebene $= D$, sein Abstand von derselben Normalaxe $= E$ und seine Erhöhung über die wagrechte xy-Ebene $= F$; so bleiben diese seine drei Coordinaten ungeändert, wie sich auch die Stromebene um ihre lothrechte z-Axe herumdrehen möge. Projicirt man nun den in der xy-Ebene enthaltenen Coordinatenzug der D und E, welche mit der x-Axe die Winkel $-\varepsilon$ und $-\varepsilon + 90^\circ$ machen, auf diese Axe und ihre Normale (die y-Axe), so hat man für den Drehpunkt C die Urcoordinaten:

$$x_1 = \quad D \cos \varepsilon + E \sin \varepsilon,$$

$$y_1 = - D \sin \varepsilon + E \cos \varepsilon$$

mit dem selbstverständlichen

$$z_1 = F.$$

Schreibt man sofort diese Ausdrücke in Art. 6., VI. ein, so findet man:

$$b = D\sin\gamma + E\cos\gamma,$$

$$w - b = (t-E)\cos\gamma - D\sin\gamma,$$

$$x - x_1 = (t-E)\sin\varepsilon - D\cos\varepsilon,$$

$$y - y_1 = (t-E)\cos\varepsilon + D\sin\varepsilon,$$

$$z - z_1 = z - F,$$

$$r^2 = (t-E)^2 + D^2 + (z-F)^2 - 2L[(t-E)\cos\gamma - D\sin\gamma] + L^2$$
$$= (t - E - L\cos\gamma)^2 + (D + L\sin\gamma)^2 + (z-F)^2.$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$D + L\sin\gamma = g, \quad E + L\cos\gamma = h,$$

so wird

$$r^2 = g^2 + (t-h)^2 + (z-F)^2$$

und

$$H = \int \frac{(tdz - zdt)\cos\gamma - (b+L)\,dz + F\cos\gamma\,.\,dt}{r^3},$$

welche beide Grössen r und H man sich, vermöge der angeführten, zwischen den Coordinaten t und z bestehenden Gleichung der Stromlinie nur durch eine dieser Veränderlichen ausgedrückt zu denken hat.

Denkt man sich nunmehr z durch t ausgedrückt und die angedeutete Integration nach der Grundveränderlichen t innerhalb ihrer, bezüglich der ganzen Ausdehnung des Stromringes festzustellenden bestimmten Grenzen, etwa von $t = t_0$ bis $t = t_1$ vollzogen, so muss das fertige Integral H an der Stelle von t die beständigen Grenzwerthe t_0 und t_1, also nur noch die Veränderliche γ enthalten und kann sohin als Function von γ und L, nemlich $H = \mathfrak{f}(\gamma, L)$ angesehen werden.

Dann ist

$$H' = \mathfrak{f}(\gamma, -L)$$

und sonach:

$$\frac{1}{i} = \frac{\mathfrak{f}(\gamma, L) + \mathfrak{f}(\gamma, -L)}{2} \cdot \frac{\varkappa}{T\sin\delta}.$$

Wenn man daher, wie bei der üblichen Sinusboussole, die wagrechte Magnetnadel mit der scheitelrechten Stromebene gleichlaufend oder einen gewissen, voraus entschiedenen Winkel bildend stehen lässt, folglich $\gamma = 0$ oder diesem beständigen Winkel gleich macht; so ist im Ausdrucke von i Alles, ausser dem $\sin\delta$, vom Winkel δ unabhängig, mithin i proportionirt zu $\sin\delta$.

Hieraus folgt demnach allgemein der Satz:

Wenn man bei einem Galvanometer den Stromring in eine (lothrechte) Ebene versetzt, welche um eine in ihr enthaltene lothrechte Axe drehbar ist (wie bei den gebräuchlichen Sinusboussolen), und wenn man diese Strom-Ebene bei jeder Beobachtung so weit dreht, bis die wagrecht schwebende Magnetnadel mit derselben Ebene einen gewissen voraus bestimmten Winkel, z. B. 0°, 30°, 45°, 90° o. dgl. macht; so ist die Stromstärke jedenfalls streng proportional zum Sinus des Ablenkungswinkels der Magnetnadel vom magnetischen Meridian; es mag der Stromring was immer für eine geschlossene ebene Linie bilden und der Drehpunkt der Magnetnadel was immer für eine gegen die Strom-Ebene und Stromlinie unverrückbare Stellung einnehmen.

Die Giltigkeit dieses Satzes erheischt demnach lediglich blos, dass der Stromring eine einfach gekrümmte (ebene) Linie bilde, dass seine Ebene lothrecht und um eine lothrechte Axe drehbar sei, endlich dass die Magnetnadel wagrecht schwebe.

8.

Stromreife von gewählter Gestalt.

I. Elliptische Stromreife. Strom-Ellipsen.

Weisen wir nunmehr dem Stromringe eine bestimmte Gestalt zu, etwa vorerst die einer Ellipse, deren Halbaxen A und B in der t- und z-Axe liegen mögen, so ist seine Gleichung:

$$\frac{t^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1.$$

Zur weiteren Vereinfachung der Rechnungsausdrücke, vornehmlich der in H und H' stehenden Integrande, kann man nun entweder als Polarcoordinaten den Strahl $OM = R$ und seinen Polarwinkel ω mit der t-Axe benützen, folglich

$$t = R\cos\omega, \quad z = R\sin\omega$$

sehen, wonach die vorige Gleichung der Ellipse in

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\cos\omega^2}{A^2}+\frac{\sin\omega^2}{B^2}$$

übergeht; oder man kann blos den Hilfswinkel φ dergestalt bemessen, dass

$$\frac{t}{A}=\cos\varphi,\quad \text{also}\quad \frac{z}{B}=\sin\varphi$$

ist, da dann die Gleichung der Ellipse in die zwei:

$$t=A\cos\varphi,\quad z=B\sin\varphi$$

zerfällt. Die erstere Annahme ist, wenngleich auch sonst bei anderen Linien verwendbar, hier dennoch minder vortheilhaft als die zweite.

Diese zweite Annahme gibt demnach:

$$dt=-A\sin\varphi d\varphi,\quad dz=B\cos\varphi d\varphi,\quad tdz-zdt=ABd\varphi$$

und

$$r^2=(A\cos\varphi-E-L\cos\gamma)^2+(D+L\sin\gamma)^2+(B\sin\varphi-F)^2$$

$$=B^2+(D+L\sin\gamma)^2+(E+L\cos\gamma)^2+F^2-2A(E+L\cos\gamma)\cos\varphi$$

$$-2BF\sin\varphi+(A^2-B^2)\cos\varphi^2.$$

Die für H vorzunehmende Integration muss, weil sie sich über den vollen elliptischen Stromring erstrecken soll, von $t=-A$ bis $t=+A$ und von da wieder bis $t=-A$, also von $\varphi=-\pi$ bis $\varphi=0$ und von da noch bis $\varphi=+\pi$ ausgeführt werden. Sonach findet man, wenn man noch zur Abkürzung

$$A\cos\gamma=a$$

setzt,

$$H=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B[a-(b+L)\cos\varphi]-aF\sin\varphi}{r^3}d\varphi,$$

folglich, indem man L in $-L$ umwandelt:

$$H'=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B[a-(b-L)\cos\varphi]-aF\sin\varphi}{r'^3}d\varphi,$$

$$r'^2=B^2+(D-L\sin\gamma)^2+(E-L\cos\gamma)^2+F^2-2A(E-L\cos\gamma)\cos\varphi$$

$$-2BF\sin\varphi+(A^2-B^2)\cos\varphi^2.$$

Nun könnte man die Differential-Coefficienten dieser Integrande, weil $\sin\varphi = (1-\cos\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, in eine nach den steigenden Potenzen von $\cos\varphi$ fortschreitende unendliche Reihe unter der Voraussetzung entwickeln, dass die Bedingnisse ihrer Convergenz erfüllt seien; da man dann nur Integrale von der Form

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi^k d\varphi = 2\int_0^{\pi} \cos\varphi^k d\varphi$$

auszuwerthen hätte, welche für gerade $k=2n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi^{2n} d\varphi = 2\int_0^{\pi} \cos\varphi^{2n} d\varphi = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n} 2\pi = \binom{n-\frac{1}{2}}{n} 2\pi,$$

und für ungerade $k=2n+1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi^{2n+1}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \cos\varphi^{2n+1}\, d\varphi = 0$$

geben. Indess dürfte von den Ergebnissen dieser schwierigen Entwickelung wohl kaum je ein ernster Gebrauch gemacht werden.

9.

Fortsetzung. Verlegung der Magnetnadel in die wagrechte Coordinatenebene.

Weil erwähnte Schwierigkeit hauptsächlich durch die Anwesenheit des $\sin\varphi$ im Integrand von H hervorgebracht wird, so wird man trachten, denselben zu beseitigen, was offenbar dadurch bewerkstelliget wird, dass man die Erhöhung F des Drehpunktes oder der ganzen Magnetnadel selbst über die wagrechte Ebene der xy zu Null macht, folglich am Galvanometer die Einrichtung trifft, dass die Magnetnadel in der wagrechten Ebene xy der wagrechten Axe $2A$ des elliptischen Stromringes schwebt.

Setzen wir demnach, bei der Annahme, dass $F=0$ sei, zur Abkürzung:

$$B^2 - A^2 = \Delta,$$

$$E + L\cos\gamma = h, \quad E - L\cos\gamma = h';$$

$$D + L\sin\gamma = g, \quad D - L\sin\gamma = g'$$

und

$$B^2 + g^2 + h^2 = f^2, \quad B^2 + g'^2 + h'^2 = f'^2;$$

so sind g, h in der wagrechten Coordinaten-Ebene die auf die t-Axe und die Axe der Strom-Ebene beziehlichen Coordinaten des Nordpols der Magnetnadel, f ist der Abstand dieses Nordpols vom höchsten Punkte der Strom-Ellipse, und g', h', f' bedeuten Aehnliches für den Südpol der Nadel. Demgemäss erhalten wir:

$$r^2 = f^2 - (2Ah\cos\varphi + \Delta\cos\varphi^2),$$

$$r'^2 = f'^2 - (2Ah'\cos\varphi + \Delta\cos\varphi^2),$$

und, weil jetzt in H und H' der Differentialcoefficient durch Umwandlung von φ in $-\varphi$ keine Abänderung erfährt,

$$H = 2B\int_0^\pi \frac{a-(b+L)\cos\varphi}{r^3}\,d\varphi,$$

$$H' = 2B\int_0^\pi \frac{a-(b-L)\cos\varphi}{r'^3}\,d\varphi.$$

So lange im Ausdrucke von r^2 noch die zweite Potenz von $\cos\varphi$ vorkommt, dürfte die Ausführung der bevorstehenden Integration nur dadurch ermöglicht werden, dass man $\frac{1}{r^3}$ nach den steigenden Potenzen von $\cos\varphi$ entwickelt. Thun wir dies, so erfolgt:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{3}{2}\,\frac{(2Ah\cos\varphi + \Delta\cos\varphi^2)}{f^5} + \frac{3.5}{2.4}\,\frac{(2Ah\cos\varphi + \Delta\cos\varphi^2)^2}{f^7}$$

$$+ \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\,\frac{(2Ah\cos\varphi + \Delta\cos\varphi^2)^3}{f^9} + \frac{3.5\ldots.11}{2.4\ldots.10}\,\frac{(2Ah\cos\varphi + \Delta\cos\varphi^2)^4}{f^{11}}$$

$$+ \ldots.$$

$$= \frac{1}{f^3} + \frac{3}{2}\,\frac{2Ah}{f^5}\cos\varphi + \left[\frac{3}{2}\,\frac{\Delta}{f^5} + \frac{3.5}{2.4}\,\frac{(2Ah)^2}{f^7}\right]\cos\varphi^2$$

$$+ \left[\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{2}{1}\,\frac{2Ah.\Delta}{f^7} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\,\frac{(2Ah)^3}{f^9}\right]\cos\varphi^3$$

$$+ \left[\frac{3.5}{2.4}\,\frac{\Delta^2}{f^7} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{3}{1}\,\frac{(2Ah)^2\Delta}{f^9} + \frac{3.5\ldots.11}{2.4\ldots.10}\,\frac{(2Ah)^4}{f^{11}}\right]\cos\varphi^4$$

$$+ \left[\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\,\frac{3.2}{1.2}\,\frac{2Ah.\Delta^2}{f^9} + \frac{3.5\ldots.11}{2.4\ldots.10}\cdot\frac{4}{1}\,\frac{(2Ah)^3\Delta}{f^{11}} + \frac{3.5\ldots.13}{2.4\ldots.12}\,\frac{(2Ah)^5}{f^{13}}\right]\cos\varphi^5$$

$+$ u. s. w.

Diese aus der Entwickelung von

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3}\left(1 - \frac{2Ah\cos\varphi + \varDelta\cos\varphi^2}{f^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

nach dem binomischen Lehrsatze entstandene unendliche Reihe convergirt, wenn der für $\varphi = 0$ stattfindende grösste Werth des zweiten Binomialgliedes $\frac{2Ah + \varDelta}{f^2} < 1$ ist, demnach wenn

$$f^2 - \varDelta - 2Ah = g^2 + (A - h)^2 > 0$$

ausfällt. Letzteres tritt aber sicher immer ein, mithin convergirt auch diese Reihe jedenfalls.

Setzen wir jetzt, mit Rücksicht auf die zu Ende des vorigen Artikels aufgeführten Integralwerthe, abkürzend:

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{r^3} = \pi M, \quad \int_0^\pi \frac{\cos\varphi}{r^3}\,d\varphi = \pi N,$$

folglich

$$M = \frac{1}{f^3} + \left[\frac{3}{2}\frac{\varDelta}{f^5} + \frac{3.5}{2.4}\frac{(2Ah)^2}{f^7}\right]\frac{1}{2}$$

$$+ \left[\frac{3.5}{2.4}\frac{\varDelta^2}{f^7} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{3}{1}\frac{(2Ah)^2\varDelta}{f^9} + \frac{3.5\ldots.11}{2.4\ldots.10}\frac{(2Ah)^4}{f^{11}}\right]\frac{1.3}{2.4}$$

$+$ u. s. w.,

$$N = \frac{3}{2}\frac{2Ah}{f^5}\cdot\frac{1}{2} + \left[\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{2}{1}\frac{2Ah.\varDelta}{f^7} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\frac{(2Ah)^3}{f^9}\right]\frac{1.3}{2.4}$$

$$+ \left[\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{3.2}{1.2}\frac{2Ah.\varDelta^2}{f^9} + \frac{3.5\ldots.11}{2.4\ldots.10}\cdot\frac{4}{1}\frac{(2Ah)^3\varDelta}{f^{11}} + \frac{3.5\ldots.13}{2.4\ldots.12}\frac{(2Ah)^5}{f^{13}}\right]\frac{1.3.5}{2.4.6}$$

$+$ u. s. w.;

so erhalten wir endlich:

$$H = 2\pi B[aM - (b + L)N].$$

Wenn wir auch noch h und f in h' und f' umtauschen, finden wir aus den Ausdrücken von M, N, H jene von M', N', H', und zwar:

$$H' = 2\pi B[aM' - (b - L)N'],$$

mithin für die Bestimmung der fraglichen Stromstärke i die Gleichung:

$$\frac{1}{i} = \varkappa\pi B\frac{a(M + M') - b(N + N') - L(N - N')}{T\sin\delta}.$$

1. Bei der Tangentenboussole, wo $\varepsilon=0$ gemacht wird, ist $\gamma=\delta$, also $a=A\cos\delta$, mithin enthält, so lange E nicht Null ist, folglich der Drehpunkt der Nadel ausserhalb der Axe der Strom-Ebene liegt, in dem zusammengesetzten Zähler zwar a, aber nicht N und N' den Factor $\cos\delta$, mithin ist da die Stromstärke i auch nicht einmal genähert der $\tang\delta$ proportionirt. — Ist hingegen $E=0$, d. h. liegt der Drehpunkt der Nadel in der dritten Axe der Strom-Ellipse, so ist $h=L\cos\delta=-h'$; daher enthalten alle drei Glieder des Zählers den Factor $\cos\delta$ und sohin ist die Stromstärke i mindestens genähert der $\tang\delta$ proportional.

2. Lässt man bei der Sinusboussole den Winkel $\gamma=\delta-\varepsilon$ der Nadel mit der Strom-Ebene einen gewissen unabänderlichen sein, so sind nicht allein γ, sondern auch a, b, g, g', h, h', f, f', M, M', N, N' allesammt beständig, folglich ist die Stromstärke i sicher dem $\sin\delta$ proportionirt, was mit Art. 7. übereinstimmt.

10.

II. Kreisförmige Stromringe. Stromkreise.

Die in Art. 9 aufgestellten Ausdrücke von r^2 und r'^2 gewinnen nambaft an Einfachheit, wenn aus ihnen die zweite Potenz des $\cos\varphi$ herausfällt, also der Unterschied $\varDelta=B^2-A^2$ verschwindet, folglich die Halbaxen A und B des elliptischen Stromrings einander gleich werden und sonach aus der Strom-Ellipse ein Stromkreis wird.

Nennen wir den Halbmesser dieses Kreises R, so ist

$$A=B=R, \quad \text{folglich} \quad \varDelta=0,$$

$$a=R\cos\gamma, \qquad b=D\sin\gamma+E\cos\gamma,$$

$$g=D+L\sin\gamma, \qquad g'=D-L\sin\gamma,$$

$$h=E+L\cos\gamma, \qquad h'=E-L\cos\gamma,$$

$$f^2=R^2+g^2+h^2, \qquad f'^2=R^2+g'^2+h'^2,$$

$$r^2=f^2-2Rh\cos\varphi, \qquad r'^2=f'^2-2Rh'\cos\varphi,$$

$$H=2R\int_0^\pi \frac{a-(b+L)\cos\varphi}{r^3}d\varphi \qquad H'=2R\int_0^\pi \frac{a-(b-L)\cos\varphi}{r'^3}d\varphi$$

$$=2\pi R(aM-(b+L)N), \qquad =2\pi R(aM'-(b-L)N'),$$

$$\frac{1}{i}=\frac{\varkappa}{T}\pi R\frac{a(M+M')-b(N+N')-L(N-N')}{\sin\delta},$$

wofern

$$M=\frac{1}{f^3}+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\frac{(2Rh)^2}{f^7}+\frac{3.5\ldots.11}{2.4\ldots.10}\cdot\frac{1.3}{2.4}\frac{(2Rh)^4}{f^{11}}+\ldots.,$$

$$N=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{2Rh}{f^5}+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.3}{2.4}\frac{(2Rh)^3}{f^9}+\frac{3.5\ldots.13}{2.4\ldots.12}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{(2Rh)^5}{f^{13}}+\ldots$$

ist und hieraus M', N' dadurch entsteht, dass man h und f in h' und f' umtauscht.

Diese Reihen M, N convergiren jedesmal, weil in jeder von ihnen der Quotient jedes Gliedes durchs nächst vorhergehende, bei unendlicher Ausdehnung der Reihe, der Grenze $\left(\frac{2Rh}{f^2}\right)^2$ zustrebt und diese stets <1 ausfällt. Denn damit Letzteres eintrete, muss $f^2-2Rh=g^2+(R-h)^2>0$ sein, was in der That immer ist.

Auch hier noch gelten die am Schlusse des 9. Artikels bezüglich der Proportionalitäten der Stromstärken gemachten Bemerkungen.

11.

Fortsetzung. Darstellung der Integrale H, H' in geschlossenen Formen mittels elliptischer Functionen.

Vermag man über die Beziehungszeichen der Coordinaten $h=E+L\cos\gamma$ und $h'=E-L\cos\gamma$ mit Sicherheit zu entscheiden, so gelingt es, die Integrale H, H' auf elliptische Functionen zurückzuleiten, folglich abgeschlossen darzustellen. Ist nun

I. der Abstand E nicht Null, also der Drehpunkt C der Magnetnadel ausserhalb der Axe (der Ebene) des Stromkreises, so sind, weil $\cos\gamma$ von -1 bis $+1$, also h und h' von $E-L$ bis $E+L$ sich erstrecken, h und h' gewiss positiv, so lange E nicht kleiner als L ist. Lassen wir demnach die Annahme $E\overline{\gtrless}L$ gelten, so ist in

$$r^2=f^2-2Rh\cos\varphi$$

$2Rh$ gewiss positiv; deshalb setzen wir

$$\varphi=\pi-2\psi,\quad \cos\varphi=-\cos2\psi=2\sin\psi^2-1$$

und erhalten:

$$r^2{}_1=f^2{}_1+2Rh-4Rh\sin\psi^2,$$

so dass hier ein stets positives Product mit $\sin\psi^2$ abgezogen wird. Nunmehr stellen wir nach und nach:

$$f^2 + 2Rh = g^2 + (R+h)^2 = c^2, \quad \frac{4Rh}{c^2} = k^2$$

und

$$1 - k^2 \sin\psi^2 = \Delta(k, \psi)^2;$$

dann wird

$$r = c\Delta(k, \psi),$$

wobei c, k, $\Delta(k, \psi)$, r allesammt positiv genommen werden sollen.

Hiernach verwandelt sich das im vorigen Artikel gefundene Integral

$$H = 2R \int_0^{\pi} \frac{a - (b+L)\cos\varphi}{r^3} \, d\varphi$$

nach einfachen Umstaltungen in

$$H = \frac{4R}{c^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a + (b+L)\cos 2\psi}{\Delta(k, \psi)^3} \, d\psi.$$

Auf ganz gleiche Weise erhalten wir, wenn wir L in $-L$ verwandeln, weil auch h' positiv entfällt, bei den Annahmen

$$g'^2 + (R+h')^2 = c'^2, \quad k' = \frac{2}{c'}\sqrt{Rh'}, \quad \sqrt{1 - k'^2 \sin\psi^2} = \Delta(k', \psi)$$

das Integral

$$H' = \frac{4R}{c'^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a + (b-L)\cos 2\psi}{\Delta(k', \psi)^3} \, d\psi.$$

II. Ist aber E Null, d. h. liegt der Drehpunkt C der Nadel in der Axe des Stromkreises, so ist

$$h = L\cos\gamma = -h',$$

folglich, wenn der Winkel γ der Nadel mit der Stromebene spitz ist, fällt h wie früher positiv, dagegen h' negativ aus; mithin gelten in Bezug auf H die früheren Hilfssatzungen und Schlussformen.

Für H' dagegen ist $h' = -L\cos\gamma$, daher:

$$r'^2 = f'^2 - 2Rh'\cos\varphi;$$

deshalb setzen wir $\varphi = 2\psi$, $\cos\varphi = \cos 2\psi = 1 - 2\sin\psi^2$ und erhalten:

$$r'^2 = f'^2 - 2Rh' - (-4Rh')\sin\psi^2.$$

Nun stellen wir nach einander:

$$f'^2 - 2Rh' = g'^2 + (R - h')^2 = c'^2, \quad \frac{-4Rh'}{c'^2} = k'^2,$$

$$1 - k'^2 \sin\psi^2 = \Delta(k', \psi)^2,$$

und finden:

$$r' = c'\Delta(k', \psi).$$

Hiedurch verwandelt sich das im vorigen Artikel aufgestellte Integral

$$H' = 2R\int_0^\pi \frac{a - (b - L)\cos\varphi}{r'^3} d\varphi$$

nach geringen Umstaltungen in

$$H' = \frac{4R}{c'^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a - (b - L)\cos 2\psi}{\Delta(k', \psi)^3} d\psi.$$

III. Ist hingegen E zwischen Null und L gelegen, oder kurz $E < L$, so lässt sich über die Vorzeichen von h und h' nichts für alle Fälle Giltiges oder Bleibendes voraussagen; ja es kann sogar, wenn der veränderliche spitzige Winkel γ von 0 bis 90^0 wächst, die $h' = E - L\cos\gamma$ von $-(L - E)$ bis E, nemlich von dem negativen $L - E$ durch 0 bis zum positiven E ansteigen. In diesem Falle muss man, nachdem man bei Tangentenboussolen den (stets als spitz vorausgesetzten) Winkel γ abgelesen, bei Sinusboussolen aber ein für allemal fest gestellt hat, nachsehen, ob

$$\cos\gamma \leqq \frac{E}{L} \quad \text{oder} \quad \cos\gamma > \frac{E}{L},$$

also h' positiv oder negativ ausfalle.

Zu positiven $h' = E - L\cos\gamma$ benutzt man dann für H' die Schlussform in I.;

zu negativen $h' = -(L\cos\gamma - E)$ aber jene in II., während man zu den fortwährend positiv bleibenden $h = E + L\cos\gamma$ jederzeit für H' die Schlussform in I. verwendet.

IV. Aus dieser Darstellung erhellet demnach, dass die Integrale H, H' auf die Integralform

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha + \beta \cos 2\psi}{\Delta(k, \psi^3)} d\psi$$

zurückgebracht werden können, und es handelt sich daher jetzt nur um Weiterleitung dieser Form oder der noch allgemeineren

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos\varphi}{(a + b\cos\varphi)^n} d\varphi,$$

aus der dieselbe durch die Annahme $\varphi = 2\psi$ entsteht. Es ist aber allgemein *)

$$\int \frac{\alpha + \beta\cos\varphi}{(a + b\cos\varphi)^n} d\varphi = \frac{a\beta - b\alpha}{(n-1)(a^2 - b^2)} \frac{\sin\varphi}{(a + b\cos\varphi)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{(n-1)(a^2 - b^2)} \int \frac{(n-1)(a\alpha - b\beta) + (n-2)(a\beta - b\alpha)\cos\varphi}{(a + b\cos\varphi)^{n-1}} d\varphi,$$

und begrenzt für $n = \frac{3}{2}$:

$$\int_0^{\pi} \frac{\alpha + \beta\cos\varphi}{(a + b\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = \frac{1}{a^2 - b^2} \int_0^{\pi} \frac{a\alpha - b\beta + (b\alpha - a\beta)\cos\varphi}{(a + b\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}} d\varphi.$$

Setzen wir nun hierin $\varphi = 2\psi$, und damit

$$\sqrt{a + b\cos\varphi} = \sqrt{a + b - 2b\sin\psi^2} = \sqrt{1 - k^2\sin\psi^2} = \Delta(k, \psi)$$

ausfalle, $2b = k^2$ und $2a = 2 - k^2$, so finden wir:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha + \beta\cos 2\psi}{\Delta(k, \psi)^3} d\psi$$

$$= \frac{1}{2(1 - k^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha(2 - k^2) - \beta k^2 + [\alpha k^2 - \beta(2 - k^2)]\cos 2\psi}{\Delta(k, \psi)} d\psi.$$

Es ist aber noch

$$\int \frac{\cos 2\psi}{\Delta(k, \psi)} d\psi = \int \frac{1 - 2\sin\psi^2}{1 - k^2\sin\psi^2} \cdot \Delta(k, \psi)\, d\psi$$

$$= \int \left(\frac{2}{k^2} - \frac{2 - k^2}{k^2(1 - k^2\sin\psi^2)}\right) \Delta(k, \psi)\, d\psi$$

$$= \frac{2}{k^2} \int \Delta(k, \psi)\, d\psi - \frac{2 - k^2}{k^2} \int \frac{d\psi}{\Delta(k, \psi)},$$

*) Nach Meier Hirsch, Integraltafeln, 1810. S. 297. und Martin Ohm, System der Mathematik, 4. Thl., 1830, Tab. 52.

mithin ist schliesslich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha+\beta\cos 2\psi}{\Delta(k,\psi)^3} = \frac{2\beta}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(k,\psi)} + \frac{k^2\alpha-(2-k^2)\beta}{k^2(1-k^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(k,\psi)d\psi.$$

Die beiden allgemeinen Integrale

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta(k,\psi)},\quad \int_0^{\psi} \Delta(k,\psi)\,d\psi$$

können aber bekanntlich weder auf einander, noch auf sonstige einfachere Integralformen zurückgebracht werden; deshalb werden sie nach Legendre (Traité des fonct. elliptiques, 1825, tome I. pag. 18.) als eigenthümliche transcendente Functionen von ψ behandelt und zwar elliptische Functionen erster und zweiter Art genannt und durch

$$\mathrm{F}(k,\psi),\quad \mathrm{E}(k,\psi)$$

bezeichnet. Sonach sind die bestimmten Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(k,\psi)} = \mathrm{F}(k,\tfrac{\pi}{2}) \text{ oder kürzer } = \mathrm{F}^1(k),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(k,\psi)d\psi = \mathrm{E}(k,\tfrac{\pi}{2}) \quad ,, \quad ,, \quad = \mathrm{E}^1(k),$$

welche Legendre vollständige elliptische Functionen ihrer Art nennt.

Führen wir nunmehr diese Bezeichnungen ein, so gilt allgemein die Reductionsform:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha+\beta\cos 2\psi}{\Delta(k,\psi)^3}\,d\psi = \frac{2\beta}{k^2}\mathrm{F}^1(k) + \frac{k^2\alpha-(2-k^2)\beta}{k^2(1-k^2)}\mathrm{E}^1(k),$$

und wenn wir selbe auf die im laufenden Artikel entwickelten Ausdrücke von H und H' anwenden, erhalten wir in I., wo $E \gtreqless L$ ist,

$$H = \frac{4R}{k^2c^3}\left[\frac{k^2a-(2-k^2)(b+L)}{1-k^2}\mathrm{E}^1(k) + 2(b+L)\mathrm{F}^1(k)\right],$$

$$H' = \frac{4R}{k'^2c'^3}\left[\frac{k'^2a-(2-k'^2)(b-L)}{1-k'^2}\mathrm{E}^1(k') + 2(b-L)\mathrm{F}^1(k')\right];$$

dagegen in II., wo $E=0$ ist,

$$H'=\frac{4R}{k'^2c'^3}\left[\frac{k'^2a+(2-k'^2)(b-L)}{1-k'^2}\,\mathrm{E}^1(k')-2(b-L)\,\mathrm{F}^1(k')\right].$$

12.

Fortsetzung. Zweite Entwickelung der Integrale H und H' in convergente unendliche Reihen.

Diese erzielen wir dadurch, dass wir die vollständigen elliptischen Funktionen $\mathrm{F}^1(k)$ und $\mathrm{E}^1(k)$ in Reihen entwickeln. Es ist nemlich:

$$\mathrm{F}^1(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin\psi^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\psi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-k^2)^n\sin\psi^{2n}]\,d\psi,$$

$$\mathrm{E}_1(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin\psi^2)^{\frac{1}{2}}\,d\psi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-k^2)^n\sin\psi^{2n}]\,d\psi;$$

und diese Binomialreihen convergiren, weil der grösste Zahlwerth des zweiten Binomialgliedes, nemlich $k^2=\frac{4Rh}{c^2}$ jederzeit <1 ist, da

$$c^2-4Rh=g^2+(R-h)^2$$

immer positiv ausfällt. Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\psi^{2n}\,d\psi=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

daher erhält man die gewünschten Reihenentwickelungen:

$$\mathrm{F}^1(k)=\frac{\pi}{2}[1+\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}\left(\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}\right)^2k^{2n}]$$

$$=\frac{\pi}{2}[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2k^6+\ldots.],$$

$$\mathrm{E}^1(k)=\frac{\pi}{2}[1-\overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}}\left(\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}]$$

$$=\frac{\pi}{2}[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{k^6}{5}-\ldots.].$$

13.

Andere Reihenentwickelung der Integrale H und H', falls der Drehpunkt der Magnetnadel in der Axe des Stromkreises liegt.

Im 10. Art. lassen sich die für r^2 und r'^2, H und H' angeführten Ausdrücke auch so darstellen:

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r'^2 \end{matrix}\right\} = R^2 + D^2 + E^2 + L^2 \pm 2L(b - a\cos\varphi) - 2ER\cos\varphi,$$

$$\left.\begin{matrix} H \\ H' \end{matrix}\right\} = 2R\int_0^\pi \frac{(a - b\cos\varphi) \mp L\cos\varphi}{r^3} d\varphi,$$

$$H' = 2R\int_0^\pi \frac{(a - b\cos\varphi) + L\cos\varphi}{r'^3} d\varphi;$$

und man kann es nun versuchen, die neuen Hilfsveränderlichen

$$a - b\cos\varphi = u, \quad b - a\cos\varphi = v$$

mit der neuen Beständigen

$$R^2 + D^2 + E^2 + L^2 = \varrho^2$$

zur Vereinfachung der Ausdrücke zu benützen. Sie machen

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r'^2 \end{matrix}\right\} = \varrho^2 \pm 2Lv - 2ER\cos\varphi,$$

$$H = 2R\int_0^\pi \frac{u - L\cos\varphi}{r^3} d\varphi, \quad H' = 2R\int_0^\pi \frac{u + L\cos\varphi}{r'^3} d\varphi,$$

und lassen aus den ersteren zwei Ausdrücken ersehen, dass eine namhafte Uebereinstimmung der beiden Integrande eintrete, wenn $E=0$ wird. Machen wir demnach diese Voraussetzung, d. h. nehmen wir an, der Drehpunkt der Magnetnadel befinde sich in der Axe des Stromkreises; dann ist

$$\varrho^2 = R^2 + D^2 + L^2, \quad a = R\cos\gamma, \quad b = D\sin\gamma,$$

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r'^2 \end{matrix}\right\} = \varrho^2 \pm 2Lv = \varrho^2 (1 \pm \frac{2L}{\varrho^2} v),$$

$$\frac{H + H'}{2} = R\int_0^\pi \left[u\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3}\right) + L\cos\varphi\left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}\right)\right] d\varphi$$

Entwickelt man nun $\frac{1}{r^3}$ und $\frac{1}{r'^3}$ nach dem binomischen Lehrsatze und unterscheidet dabei die gerad- und ungeradzähligen Glieder, so findet man:

$$\frac{\varrho^3}{r^3} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{2m} \left(\frac{2L}{\varrho^2} v\right)^{2m} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{2m+1} \left(\frac{2L}{\varrho^2} v\right)^{2m+1},$$

$$\frac{\varrho^3}{r'^3} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{2m} \left(\frac{2L}{\varrho^2} v\right)^{2m} - \sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{2m+1} \left(\frac{2L}{\varrho^2} v\right)^{2m+1};$$

folglich

$$\frac{H+H'}{2} : \frac{2R}{\varrho^3} = \Sigma \binom{-\frac{3}{2}}{2m} \left(\frac{2L}{\varrho^2}\right)^{2m} \int_0^\pi uv^{2m}\, d\varphi$$

$$- L\Sigma \binom{-\frac{3}{2}}{2m+1} \left(\frac{2L}{\varrho^2}\right)^{2m+1} \int_0^\pi v^{2m+1} \cos\varphi\, d\varphi.$$

Beachtenswerth ist nun die Weiterleitung des ersten Integrals, für welche wir auf einen Augenblick

$$\frac{v}{\sin\varphi} = \frac{b - a\cos\varphi}{\sin\varphi} = t$$

setzen und sofort

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{a - b\cos\varphi}{\sin\varphi^2} = \frac{u}{\sin\varphi^2},$$

$$v = t\sin\varphi, \quad ud\varphi = \sin\varphi^2 dt$$

finden. Danach ist:

$$\int uv^{2m} d\varphi = \int \sin\varphi^{2m+2} . t^{2m} d\varphi,$$

also factorenweis integrirt:

$$= \frac{t^{2m+1}}{2m+1} \sin\varphi^{2m+2} - \frac{2m+2}{2m+1} \int t^{2m+1} \sin\varphi^{2m+1} \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{(b - a\cos\varphi)^{2m+1} \sin\varphi}{2m+1} - \frac{2m+2}{2m+1} \int v^{2m+1} \cos\varphi\, d\varphi,$$

und eingegrenzt:

$$\int_0^\pi uv^{2m} d\varphi = -\frac{2m+2}{2m+1} \int_0^\pi v^{2m+1} \cos\varphi\, d\varphi,$$

so dass das erste Integral auf das zweite sich zurückleiten lässt.

Schreibt man diesen Ausdruck in jenen für $\frac{H+H'}{2}$ und diesen wieder in den für $\frac{1}{i}$ (Art. 6), indem man zugleich beachtet, dass

$$\binom{-\frac{3}{2}}{2m} = \frac{3.5.7\ldots.(4m+1)}{2.4.6\ldots.(4m)} = \binom{2m+\frac{1}{2}}{2m},$$

$$\binom{-\frac{3}{2}}{2m+1} = -\frac{3.5.7\ldots.(4m+3)}{2.4.6\ldots.(4m+2)} = -\binom{2m+\frac{3}{2}}{2m+1}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{1}{i} : \frac{\varkappa}{T\sin\delta} \cdot \frac{2R}{\varrho^3} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \Big\{ -\frac{2m+2}{2m+1}\binom{2m+\frac{1}{2}}{2m}\left(\frac{2L}{\varrho^2}\right)^{2m}$$
$$+\binom{2m+\frac{3}{2}}{2m+1}\left(\frac{2L}{\varrho^2}\right)^{2m+1} L \Big\} \int_0^\pi v^{2m+1}\cos\varphi d\varphi.$$

Nunmehr entwickeln wir $v^{2m+1}\cos\varphi = (-a\cos\varphi + b)^{2m+1}\cos\varphi$ nach dem binomischen Lehrsatze und erwägen, dass bei der sofort folgenden Integration nur die geraden Potenzen des $\cos\varphi$ Werthe oberhalb der Null geben; dann finden wir:

$$\int_0^\pi v^{2m+1}\cos\varphi d\varphi = -a \mathop{S}_{n=0}^{n=m} \binom{2m+1}{2n} a^{2m-2n} b^{2n} \int_0^\pi \cos\varphi^{2(m+1-n)} d\varphi$$
$$= -\pi a \mathop{S}_{n=0}^{n=m} \binom{2m+1}{2n}\binom{m+\frac{1}{2}-n}{m+1-n} a^{2m-2n} b^{2n}$$
$$= -\pi a . J_m,$$

wenn wir abkürzend

$$\mathop{S}_{n=0}^{n=m} \binom{2m+1}{2n}\binom{m+\frac{1}{2}-n}{m+1-n} a^{2m-2n} b^{2n} = J_m$$

setzen; und sonach wird:

$$\frac{1}{i} : \frac{\varkappa}{T\sin\delta} \cdot \frac{2\pi R . a}{\varrho^3}$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} \Big\{ \frac{2m+2}{2m+1}\binom{2m+\frac{1}{2}}{2m}\left(\frac{2L}{\varrho^2}\right)^{2m} - \binom{2m+\frac{3}{2}}{2m+1}\left(\frac{2L}{\varrho^2}\right)^{2m+1} L \Big\} J_m.$$

Noch gestattet die durch J_m vorgestellte Summe die Heraushebung eines nur m enthaltenden Factors, wozu man die allgemeine Umwandlungsgleichung

$$\binom{p-n}{q-n} : \binom{p}{q} = \frac{q(q-1)\ldots.(q+1-n)}{p(p-1)\ldots.(p+1-n)} = \binom{q}{n} : \binom{p}{n}$$

benützt, nach welcher sich ergibt:

$$\binom{m+\frac{1}{2}-n}{m+1-n}=\binom{m+\frac{1}{2}}{m+1}\binom{m+1}{n}:\binom{m+\frac{1}{2}}{n}.$$

Stellen wir zur Abkürzung der Ausdrücke:

$$\binom{2m+1}{2n}\binom{m+1}{n}:\binom{m+\frac{1}{2}}{n}=C_{m,n},$$

so wird

$$J_m=\binom{m+\frac{1}{2}}{m+1}\overset{n=m}{\underset{n=0}{S}}C_{m,n}\,a^{2m-2n}\,b^{2n},$$

und hierin ist:

$$\binom{m+\frac{1}{2}}{m+1}=\frac{1.3.5\ldots.(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)}.$$

Zur weiteren Umstaltung von C_n ist

$$\binom{2m+1}{2n}=\frac{(2m+1)\,2m\,(2m-1)\ldots.(2m+3-2n)\,(2m+2-2n)}{(2n)!},$$

$$\binom{m+\frac{1}{2}}{n}=\frac{(2m+1)\,(2m-1)\ldots.(2m+3-2n)}{2^n.n!};$$

daher

$$\binom{2m+1}{2n}:\binom{m+\frac{1}{2}}{n}=2^{2n}.\binom{m}{n}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=2^{2n}\binom{m}{n}:\binom{2n}{n},$$

weil allgemein $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$, also insbesondere $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ ist. Sonach erfolgt auch:

$$C_{m,n}=2^{2n}\binom{m}{n}\binom{m+1}{n}:\binom{2n}{n}.$$

Löst man hierin alle Binomialcoefficienten auf, so wird nach leichten Zusammenziehungen:

$$C_{m,n}=\frac{2^n.(m+1)\,m^2(m-1)^2(m-2)^2\ldots.(m+2-n)^2(m+1-n)}{1.3.5\ldots.(2n-1).n!},$$

jedoch anstandslos nur erst für $n \geqq 2$ verwendbar.

Stellt man im Ausdrucke von $\frac{1}{i}$ jenen von J_m ein und vereinfacht, so findet man:

$$\frac{1}{i}:\frac{\varkappa}{T\sin\delta}\,\frac{2\pi Ra}{\varrho^3}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\Big\{\binom{m-\frac{1}{2}}{m}\binom{2m+\frac{1}{2}}{2m}\Big(\frac{2L}{\varrho^2}\Big)^{2m}$$

$$-\binom{m+\frac{1}{2}}{m+1}\binom{2m+\frac{3}{2}}{2m+1}\Big(\frac{2L}{\varrho^2}\Big)^{2m+1}L\Big\}\mathop{S}_{n=0}^{n=m}C_{m,n}\,a^{2m-2n}\,b^{2n},$$

und dafür

$$\binom{m-\frac{1}{2}}{m}=\frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{2.4.6\ldots.(2m)},\quad \binom{m+\frac{1}{2}}{m+1}=\frac{1.3.5\ldots.(2m+1)}{2.4.6\ldots.(2m+2)},$$

$$\binom{2m+\frac{1}{2}}{2m}=\frac{3.5.7\ldots.(4m+1)}{2.4.6\ldots.(4m)},\quad \binom{2m+\frac{3}{2}}{2m+1}=\frac{3.5.7\ldots.(4m+3)}{2.4.6\ldots.(4m+2)},$$

$$\mathop{S}_{n=0}^{n=m}C_{m,n}\,a^{2m-2n}\,b^{2n}$$

$$=a^{2m}+\frac{2}{1!}\,\frac{(m+1)m}{1}\,a^{2m-2}b^2+\frac{2^2}{2!}\,\frac{(m+1)\,m^2(m-1)}{1.3}\,a^{2m-4}b^4$$

$$+\frac{2^3}{3!}\,\frac{(m+1)\,m^2(m-1)^2(m-2)}{1.3.5}\,a^{2m-6}b^6+\ldots.$$

$$+\frac{2^n}{n!}\,\frac{(m+1)m^2(m-1)^2(m-2)..(m+2-n)^2(m+1-n)}{1.3.5\ldots.(2n-1)}\,a^{2m-2n}b^{2n}+..$$

$$+\frac{2^m(m+1)!}{1.3.5\ldots.(2m-1)}\,b^{2m}.$$

Schreibt man endlich 0, 1, 2, 3,.... für m, so erfolgt:

$$\frac{1}{i}:\frac{\varkappa}{T\sin\delta}\,\frac{2\pi Ra}{\varrho^3}=(1-\frac{3}{2}\,\frac{L^2}{\varrho^2})+\Big(\frac{15}{4}\,\frac{L^2}{\varrho^4}-\frac{105L^4}{16\varrho^6}\Big)(a^2+4b^2)$$

$$+\Big(\frac{945L^4}{64\varrho^8}-\frac{3465L^6}{128\varrho^{10}}\Big)(a^4+12a^2b^2+8b^4)$$

$$+\Big(\frac{15015L^6}{256\varrho^{12}}-\frac{225225L^8}{2048\varrho^{14}}\Big)(a^6+24a^4b^2+84a^2b^4+\frac{64}{5}b^6)$$

$$+\Big(\frac{3828825L^8}{16384\varrho^{16}}-\frac{14549535L^{10}}{32768\varrho^{18}}\Big)(a^8+40a^6b^2+160a^4b^4+128a^2b^6+\frac{128}{7}b^8)$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dies ist der möglich einfachste, ganz allgemeine Ausdruck des umgekehrten Werthes, $\frac{1}{i}$, der Stromstärke i. Dass es klüger bleibt, nicht diese Stromstärke selbst, sondern ihr Umgekehrtes auszudrücken, liegt auf der Hand, da sonst diese so ausgedehnte

Somme in den Divisor zu stehen käme und da bei der unumgänglichen Rechnung mit Logarithmen es gleichgiltig ist, ob die Stromstärke selbst oder ihr Umgekehrtes in Quotientenform dargestellt ist.

Schreibt man $a = R\cos\gamma$ und $b = D\sin\gamma$ ein, so erscheint:

$$\frac{1}{i}:\frac{\varkappa}{T}\,\frac{2\pi R^2}{\varrho^3}\,\frac{\cos\gamma}{\sin\delta}=(1-\frac{3}{2}\frac{L^2}{\varrho^2})+\left(\frac{15}{4}\frac{L^2}{\varrho^4}-\frac{105L^4}{16\varrho^6}\right)(R^2+(4D^2-R^2)\sin\gamma^2)$$

$$+\left(\frac{945L^4}{64\varrho^8}-\frac{3465L^6}{128\varrho^{10}}\right)[R^4+2R^2(6D^2-R^2)\sin\gamma^2+(R^4-12R^2D^2+D^4)\sin\gamma^4]$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$

welche Gleichung nicht allein allgemein für jeden Winkel ε der Stromebene mit dem magnetischen Meridian, sondern auch insbesondere, wie bei **Sinusboussolen**, für $\varepsilon=\delta$ und $\gamma=0$ und überhaupt für voraus fest bestimmte Winkel γ der Nadel mit der Stromebene gilt.

Bei der **Tangentenboussole** hat man $\gamma=\delta$, folglich:

$$\frac{1}{i}:\frac{\varkappa}{T}\,\frac{2\pi R^2}{\varrho^3\operatorname{tang}\delta}=(1-\frac{3}{2}\frac{L^2}{\varrho^2})+\left(\frac{15L^2}{4\varrho^4}-\frac{105L^4}{16\varrho^6}\right)[R^2+(4D^2-R^2)\sin\delta^2]$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Da die halbe Nadellänge, L, im Vergleich mit dem Stromhalbmesser R, und noch mehr im Vergleich mit $\varrho > R$, immer nur sehr klein ist, so kann man sich begnügen, blos die Glieder mit der **zweiten** Potenz von $\frac{L}{\varrho}$ noch beizubehalten, da dann der eintretende Fehler erst mit dessen vierter Potenz vergleichbar, also von der vierten Ordnung der Kleinheit sein wird.

Um dann die nahe statt findende Proportionalität der Stromstärke i zur $\operatorname{tang}\delta$ noch genauer zu erhalten, kann man den Factor von $\sin\delta^2$ verschwinden machen, was für $D=\frac{1}{2}R$ erreicht wird. Diese Abmessung hat **Gaugain** in seine Tangentenboussole aufgenommen.

Will man den Ausdruck von $\frac{1}{i}$ mit der Berücksichtigung nach den Potenzen von L entwickeln, dass auch in ϱ die L mit vorkommt, so setze man:

$$R^2+D^2=G^2,$$

also

$$\varrho^2 = G^2 + L^2;$$

dann ist, wenn man sich auf die zweite Potenz von L beschränkt:

$$\frac{1}{\varrho^m} = \frac{1}{G^m}(1 - \frac{m}{2}\frac{L^2}{G^2}),$$

und nach einigen leichten Umstaltungen:

$$\frac{1}{i} = \frac{\varkappa}{T \operatorname{tang} \delta} \cdot \frac{2\pi R^2}{G^3}(1 - 3\frac{D^2 - \frac{1}{4}R^2}{G^2}\frac{L^2}{G^2} + 15\frac{D^2 - \frac{1}{4}R^2}{G^2}\frac{L^2}{G^2}\sin\delta^2),$$

daher die Stromstärke selbst:

$$i = \frac{T \operatorname{tang} \delta}{\varkappa} \cdot \frac{G^3}{2\pi R^2}(1 + 3\frac{D^2 - \frac{1}{4}R^2}{G^2}\frac{L^2}{G^2} - 15\frac{D^2 - \frac{1}{4}R^2}{G^2}\frac{L^2}{G^2}\sin\delta^2).$$

Dies ist im Wesentlichen die von Bravais a. a. O. gegebene Näherungsformel für die Bestimmung der Stromstärke in Gaugain's Tangentenboussole.

Setzt man in ihr $D = 0$, so wird $G = R$ und

$$i = \frac{R}{2\pi}\frac{T}{\varkappa}\operatorname{tang}\delta[1 - \frac{3}{4}\frac{L^2}{R^2} + \frac{15}{4}\frac{L^2}{R^2}\sin\delta^2 = 1 + 3\frac{L^2}{R^2} - \frac{15}{4}\frac{L^2}{R^2}\cos\delta^2]$$

$$= \frac{R}{2\pi}\frac{T}{\varkappa}[(1 + 3\frac{L^2}{R^2})\operatorname{tang}\delta - \frac{15}{8}\frac{L^2}{R^2}\sin 2\delta].$$

Der letzte Ausdruck wurde für die gewöhnliche Tangentenboussole von Despretz (in den Comptes rendus, 4. Oct. 1852, p. 449.), als durch Blanchet und de la Provostaye hergeleitet, angegeben.

14.

Noch eine Reihenentwickelung der Summe $\frac{H + H'}{2}$, wenn der Drehpunkt der Nadel **wo immer** in der, durch die Axe des Stromkreises gehenden, wagerechten Ebene liegt.

Auch wenn der wasserrechte Abstand E des Drehpunktes der Nadel von der Axe des Stromkreises nicht Null ist, können die im vorigen Artikel aufgefundenen vollständigen Ausdrücke von r^2 und r'^2 der Reihenentwickelung zu Grunde gelegt werden. Es ist nemlich:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\varrho^3}[1 - \frac{2}{\varrho^2}(ER\cos\varphi - Lr)]^{-\frac{3}{2}},$$

also

$$\frac{\varrho^3}{r^3} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{m} \left(\frac{-2}{\varrho^2}\right)^m (ER\cos\varphi - Lv)^m$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{m} \left(\frac{-2}{\varrho^2}\right)^m \mathop{S}_{n=0}^{n=m} \binom{m}{n} (ER\cos\varphi)^{m-n} (-Lv)^n,$$

und ähnlich

$$\frac{\varrho^3}{r'^3} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{m} \left(\frac{-2}{\varrho^2}\right)^m \mathop{S}_{n=0}^{n=m} \binom{m}{n} (ER\cos\varphi)^{m-n} (+Lv)^n.$$

Denkt man sich diese Ausdrücke in

$$\frac{H+H'}{2} : \frac{R}{\varrho^3} = \int_0^\pi u\left(\frac{\varrho^3}{r^3} + \frac{\varrho^3}{r'^3}\right) d\varphi + \int_0^\pi L\left(\frac{\varrho^3}{r'^3} - \frac{\varrho^3}{r^3}\right)\cos\varphi\, d\varphi$$

eingesetzt, so werden bei der Addition obiger zwei Reihensummen die Glieder mit den geraden, dagegen bei ihrer Subtraction die Glieder mit den ungeraden Exponenten n sich verdoppeln, die anderen aber sich aufheben; folglich, wenn man die Hälften dieser Integrale mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet, erhält man:

$$\frac{H+H'}{2} : \frac{2R}{\varrho^3} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{A} =$$
$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{m} \left(\frac{-2}{\varrho^2}\right)^m \mathop{S}_{2n=0}^{2n=m} \binom{m}{2n} (ER)^{m-2n} L^{2n} \cdot \int_0^\pi u v^{2n} . \cos\varphi^{m-2n}\, d\varphi,$$

$$\mathfrak{B} =$$
$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{m} \left(\frac{-2}{\varrho^2}\right)^m \mathop{S}_{2n=0}^{2n=m} \binom{m}{2n+1} (ER)^{m-2n-1} L^{2n+2} \int_0^\pi v^{2n+1} \cos\varphi^{m-2n}\, d\varphi.$$

Auch hier lässt sich das erstere Integral durch die im vorigen Artikel benützten Mittel auf die Form des letzteren bringen. Es ist nemlich allgemein:

$$\int u v^{2n} \cos\varphi^k d\varphi = \int \sin\varphi^{2n+2} \cos\varphi^k . t^{2n} dt$$
$$= \sin\varphi^{2n+2} \cos\varphi^k . \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$
$$- \int t^{2n+1} \frac{(2n+2)\cos\varphi^2 - k\sin\varphi^2}{2n+1} \sin\varphi^{2n+1} \cos\varphi^{k-1} d\varphi$$
$$= \frac{v^{2n+1}\cos\varphi^k \sin\varphi}{2n+1}$$
$$- \int \frac{(2n+2+k)\cos\varphi^2 - k}{2n+1} v^{2n+1} \cos\varphi^{k-1} d\varphi,$$

daher begrenzt:

$$\int_0^\pi u\mathfrak{r}^{2n}\cos\varphi^k d\varphi$$

$$=\frac{k}{2n+1}\int_0^\pi \mathfrak{r}^{2n+1}\cos\varphi^{k-1}d\varphi-\frac{2n+2+k}{2n+1}\int_0^\pi \mathfrak{r}^{2n+1}\cos\varphi^{k+1}d\varphi;$$

und es erhellet, dass nur Integrale von der Form

$$\int_0^\pi \mathfrak{r}^{2n+1}\cos\varphi^s d\varphi \text{ für } s=0,\,1,\,2,\ldots.$$

auszuwerthen kommen. Wegen $\mathfrak{r}=-a\cos\varphi+b$ erhält man:

$$\int_0^\pi \mathfrak{r}^{2n+1}\cos\varphi^s d\varphi$$

$$=\overset{p=2n+1}{\underset{p=0}{S}}\binom{2n+1}{p}(-a)^{2n+1-p}b^p\int_0^\pi \cos\varphi^{2n+1+s-p}.d\varphi$$

oder vermöge Art. 8. für ungerade $s-p$:

$$=\pi\overset{p=2n+1}{\underset{p=0}{S}}\binom{2n+1}{p}\frac{1.3.5\ldots.(2n+s-p)}{2.4.6\ldots.(2n+1+s-p)}(-a)^{2n+1-p}b^p.$$

Zum Abschluss hat man demnach in den Summen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ für m nach einander $2m$ und $2m+1$ zu setzen und zur Abkürzung der Ausdrücke folgende Bezeichnungen einzuführen:

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathfrak{r}^{2n+1}\cos\varphi^{2m-2n-1}.d\varphi$$

$$=\overset{p=n}{\underset{p=0}{S}}\binom{2n+1}{2p}\binom{m-p-\frac{1}{2}}{m-p}a^{2n+1-2p}b^{2p}=\mathfrak{C}_{m,n},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathfrak{r}^{2n+1}\cos\varphi^{2m-2n}.d\varphi$$

$$=\overset{p=n}{\underset{p=0}{S}}\binom{2n+1}{2p+1}\binom{m-p-\frac{1}{2}}{m-p}a^{2n-2p}b^{2p+1}=\mathfrak{D}_{m,n}.$$

Dann erhält man:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\pi}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{2m}\frac{2^{2m}}{\varrho^{4m}}\overset{n=m}{\underset{n=0}{S}}\binom{2m}{2n}(ER)^{2m-2n}L^{2n}$$

$$\times\frac{-(2m-2n)\mathfrak{C}_{m,n}+(2m+2)\mathfrak{C}_{m+1,n}}{2n+1}$$

$$+\sum_{m=0}^{m=\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{2m+1}\frac{2^{2m+1}}{\varrho^{4m+2}}\overset{n=m}{\underset{n=0}{S}}\binom{2m+1}{2n}(ER)^{2m+1-2n}L^{2n}$$

$$\times\frac{(2m-2n+1)\mathfrak{D}_{m,n}+(2m+3)\mathfrak{D}_{m+1,n}}{2n+1},$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{x} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{2m} \frac{2^{2m}}{\varrho^{4m}} \sum_{n=0}^{n=m-1} \binom{2m}{2n+1} (ER)^{2m-2n-1} L^{2n+2} . \mathfrak{D}_{m,n}$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{2m+1} \frac{2^{2m+1}}{\varrho^{4m+2}} \sum_{n=0}^{n=m} \binom{2m+1}{2n+1} (ER)^{2m-2n} L^{2n+2} . \mathfrak{C}_{m+1,n}$$

und darin ist entwickelt:

$$\binom{-\frac{3}{2}}{2m} 2^{2m} = \frac{3.5.7\ldots.(4m+1)}{1.2.3\ldots.(2m)},$$

$$\binom{-\frac{3}{2}}{2m+1} 2^{2m+1} = -\frac{3.5.7\ldots.(4m+3)}{1.2.3\ldots.(2m+1)},$$

$$\mathfrak{C}_{m,n} = \binom{m-\frac{1}{2}}{m} a^{2n+1} + \binom{2n+1}{2}\binom{m-1\frac{1}{2}}{m-1} a^{2n-1} b^2$$

$$+ \binom{2n+1}{4}\binom{m-2\frac{1}{2}}{m-2} a^{2n-3} b^4$$

$$+ \binom{m+1}{6}\binom{m-3\frac{1}{2}}{m-3} a^{2n-5} b^6 + \ldots. + \binom{2n+1}{2n}\binom{m-n-\frac{1}{2}}{m-n} a b^{2n},$$

$$\mathfrak{D}_{m,n} = \binom{2n+1}{1}\binom{m-\frac{1}{2}}{m} a^{2n} b + \binom{2n+1}{3}\binom{m-1\frac{1}{2}}{m-1} a^{2n-2} b^3$$

$$+ \binom{2n+1}{5}\binom{m-2\frac{1}{2}}{m-2} a^{2n-4} b^5$$

$$+ \binom{2n+1}{7}\binom{m-4\frac{1}{2}}{m-4} a^{2n-6} b^7 + \ldots. + \binom{2n-n-\frac{1}{2}}{m-n} b^{2n+1},$$

und insbesondere:

$$\mathfrak{C}_{m,0} = \binom{m-\frac{1}{2}}{m} a = \frac{1.3.5.\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots.(2m)} a, \quad \mathfrak{C}_{0,0} = a,$$

$$\mathfrak{D}_{m,0} = \binom{m-\frac{1}{2}}{m} b = \frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{2.4.6\ldots.(2m)} b, \quad \mathfrak{D}_{0,0} = b.$$

Den Ausdruck von $\mathfrak{A}$ kann man auch — und vielleicht kürzer — so entwickeln, dass man sogleich m durch $2m$ und $2m+1$ ersetzt, dann $v^{2n} = (-a\cos\varphi + b)^{2n}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, mit der betreffenden Potenz von $\cos\varphi$ und abwechselnd mit den Gliedern des $u = a - b\cos\varphi$ multiplicirt, von den Theilproducten des Integrands jedoch nur diejenigen beibehält, [illegible] denen der $\cos\varphi$ einen geraden Exponenten erhält. Wenn man dabei abkürzend stellt:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi uv^{2n}\cos\varphi^{2m-2n}\,d\varphi=\mathfrak{C}_{m,n},$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi uv^{2n}\cos\varphi^{2m-2n+1}\,d\varphi=\mathfrak{S}_{m,n};$$

so erfolgt:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\pi}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\Big[\frac{3.5.7\dots(4m+1)}{(2m)!\,\varrho^{4m}}\mathop{S}_{n=0}^{n=m}\binom{2m}{2n}(ER)^{2m-2n}L^{2n}.\mathfrak{C}_{m,n}$$

$$-\frac{3.5\dots(4m+3)}{(2m+1)!\,\varrho^{4m+2}}\mathop{S}_{n=0}^{n=m}\binom{2m+1}{2n}(ER)^{2m+1-2n}L^{2n}.\mathfrak{S}_{m,n}\Big].$$

Hierin ist sonach:

$$\mathfrak{C}_{m,n}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(a-b\cos\varphi)\mathop{S}_{p=0}^{p=n}\Big[-\binom{2n}{2p-1}a^{2n+1-2p}b^{2p-1}\cos\varphi^{2m+1-2p}$$

$$+\binom{2n}{2p}a^{2n-2p}b^{2p}\cos\varphi^{2m-2p}\Big]\,d\varphi,$$

$$\mathfrak{S}_{m,n}=\frac{-1}{\pi}\int_0^\pi(a-b\cos\varphi)\mathop{S}_{p=0}^{p=n}\Big[\binom{2n}{2p}a^{2n-2p}b^{2p}\cos\varphi^{2m+1-2p}$$

$$-\binom{2n}{2p+1}a^{2n-2p-1}b^{2p+1}\cos\varphi^{2m-2p}\Big]\,d\varphi;$$

folglich nach Vollzug der Multiplicationen und Integrationen:

$$\mathfrak{C}_{m,n}=\mathop{S}_{p=0}^{p=n}\Big[\binom{2n}{2p-1}\binom{m-p+\frac{1}{2}}{m-p+1}+\binom{2n}{2p}\binom{m-p-\frac{1}{2}}{m-p}\Big]a^{2n-2p+1}b^{2p},$$

$$\mathfrak{S}_{m,n}=\mathop{S}_{p=0}^{p=n}\Big[\binom{2n}{2p}\binom{m-p+\frac{1}{2}}{m-p+1}+\binom{2n}{2p+1}\binom{m-p-\frac{1}{2}}{m-p}\Big]a^{2n-2p}b^{2p+1}.$$

Die hier vorkommenden zweitheiligen Coefficienten lassen sich nach den, mittels Auflösung und Heraushebung gemeinsamer Factoren leicht ableitbaren, Musterformen

$$\binom{\varkappa}{\lambda}\binom{\mu+\frac{1}{2}}{\mu}+\binom{\varkappa}{\lambda+1}\binom{\mu-\frac{1}{2}}{\mu}=\binom{\varkappa}{\lambda+1}\binom{\mu-\frac{1}{2}}{\mu}\frac{2(\varkappa+1)(\mu+1)-(\lambda+1)}{2(\varkappa-\lambda)(\mu+1)}$$

$$=\binom{\varkappa}{\lambda}\binom{\mu-\frac{1}{2}}{\mu}\frac{2(\varkappa+1)(\mu+1)-(\lambda+1)}{2(\lambda+1)(\mu+1)}$$

umstalten und machen sofort:

$$\mathfrak{C}_{m,n}=a\mathop{S}_{p=0}^{p=n}\binom{2n}{2p}\binom{m-p-\frac{1}{2}}{m-p}\frac{(m+1-p)(2n+1)-p}{(m+1-p)(2n+1-2p)}a^{2n-2p}b^{2p},$$

$$\mathfrak{S}_{m,n}=b\mathop{S}_{p=0}^{p=n}\binom{2n}{2p}\binom{m-p-\frac{1}{2}}{m-p}\frac{2(m+1-p)(2n+1)-(2p+1)}{2(m+1-p)(2p+1)}a^{2n-2p}b^{2p};$$

oder entwickelt:

$$\mathfrak{C}_{m,n}:a = \binom{m-\frac{1}{2}}{m} a^{2n} + \binom{2n}{2}\binom{m-1\frac{1}{2}}{m-1} \frac{m(2n+1)-1}{m(2n-1)} a^{2n-2}b^2$$

$$+ \binom{2n}{4}\binom{m-2\frac{1}{2}}{m-2} \frac{(m-1)(2n+1)-2}{(m-1)(2n-3)} a^{2n-4}b^4 + \ldots.$$

$$+ \binom{m-n-\frac{1}{2}}{m-n} \frac{(m+1-n)(2n+1)-n}{m+1-n} b^{2p},$$

$$\mathfrak{S}_{m,n}:b = \binom{m-\frac{1}{2}}{m} \frac{2(m+1)(2n+1)-1}{2(m+1)} a^{2n}$$

$$+ \binom{2n}{2}\binom{m-1\frac{1}{2}}{m-1} \frac{2m(2n+1)-3}{2m.3} a^{2n-2}b^2$$

$$+ \binom{2n}{4}\binom{m-2\frac{1}{2}}{m-2} \frac{2(m-1)(2n+1)-5}{2(m-1)5} a^{2n-4}b^4 + \ldots. + \binom{m-n+\frac{1}{2}}{m-n+1} b^{2p}.$$

Schreibt man nunmehr für m und n nach und nach $0, 1, 2, 3, \ldots.$, so erhält man die Aufänge der Hilfsausdrücke:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\pi} = a - \frac{3}{1!\varrho^2} ER.b + \frac{3.5}{2!\varrho^4} [E^2R^2 + L^2(a^2+4b^2)] \tfrac{1}{2} a$$

$$- \frac{3.5.7}{3!\varrho^6} [E^2R^2 + L^2(11a^2+4b^2)] \frac{1.3}{2.4} ER.b$$

$$+ \frac{3.5.7.9}{4!\varrho^8} [E^4R^4 + 2E^2R^2L^2(3a^2+10b^2) + L^4(a^4+12a^2b^2+8b^4)] \frac{1.3}{2.4} a$$

$$- \frac{3.5\ldots.11}{5!\varrho^{10}} [E^4R^4 + 2E^2R^2L^2(17a^2+6b^2)$$

$$+ L^4(29a^4+68a^2b^2+8b^4)] \frac{1.3.5}{2.4.8} ER.b$$

+ u. s. w. u. s. w.

$$\frac{\mathfrak{B}}{\pi} = -\frac{3L^2}{1!\varrho^2}.\tfrac{1}{2}a + \frac{3.5L^2}{2!\varrho^4} 2.\tfrac{1}{2} ER.b - \frac{3.5.7L^2}{3!\varrho^6} [3E^2R^2 + L^2(a^2+4b^2)] \frac{1.3}{2.4} a$$

$$+ \frac{3.5.7.9L^2}{4!\varrho^8} [4E^2R^2 + 4L^2(3a^2 + \tfrac{4}{3}b^2)] \frac{1.3}{2.4} ER.b$$

$$- \frac{3.5\ldots11L^2}{5!\varrho^{10}} [5E^4R^4 + 2E^2R^2L^2(5a^2+18b^2) + L^4(a^4+12a^2b^2+8b^4)] \frac{1.3.5}{2.4.6} a$$

$$+ \frac{3.5\ldots.13L^2}{6!\varrho^{12}} [6E^4R^4 + 4E^2R^2L^2(15a^2+6b^2)$$

$$+ 6L^4(5a^4+12a^2b^2+\tfrac{8}{5}b^4)] \frac{1.3.5}{2.4.6} ER.b$$

+ u. s. w. u. s. w.

Danach bietet endlich die für die Stromstärke i in Art. 6. Abs. VI. aufgestellte Grundformel ihren fraglichen Ausdruck:

$$i=\frac{T\sin\delta}{\varkappa}\cdot\frac{\varrho^3}{2\pi R}:\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\pi},$$

in welchem bei Anwendungen auf besondere Fälle die erforderlichen Einsätze (Substitutionen) der für ϱ, a, b, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nach Vorhergehendem zu ermittelnden Zifferwerthe auszuführen bleiben.

VII.

Ueber die Entwickelung von $\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$, $\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$ und über einen damit verwandten Satz aus der Theorie der Zahlen.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik in der k. k. österreichischen Kriegs-Marine zu Triest.

---

§. 1.

Wenn man in der bekannten Gleichung

$$(1)\quad (\mathrm{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta)(\mathrm{Cos}\,\theta_1+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta_1)$$
$$\times(\mathrm{Cos}\,\theta_2+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta_2)\ldots(\mathrm{Cos}\,\theta_{n-1}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta_{n-1})$$
$$=\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}(\theta_1+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$$

die im ersten Theil angezeigte Multiplication verrichtet, so besteht das Resultat aus zwei Bestandtheilen, von welchen der eine

reell, der andere dagegen mit dem Factor $\sqrt{-1}$ behaftet ist; der reelle Theil ist alsdann der Entwickelung von

$$\operatorname{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1}),$$

der Coefficient von $\sqrt{-1}$ dagegen der Entwickelung von

$$\operatorname{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$$

gleich, und es ist unsere Absicht, im Folgenden den Bau dieser Entwickelungen im Allgemeinen festzusetzen. — Aus der Natur der Multiplication folgt, dass in der Entwickelung des obigen Productes die einzelnen Glieder aus den Gliedern der n Binome

$$\operatorname{Cos}\theta+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta,\quad \operatorname{Cos}\theta_1+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta_1,$$
$$\operatorname{Cos}\theta_2+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta_2,\ \ldots\ \operatorname{Cos}\theta_{n-1}+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta_{n-1}$$

dermaassen zusammengesetzt sind, dass immer ein Glied des einen Binoms verbunden erscheint mit je einem Gliede aller übrigen Binome. Die einzelnen Glieder der Entwickelung des Productes bestehen also aus den sämmtlichen Variationscomplexionen, welche die n Elementenreihen

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{Cos}\theta, & \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta,\\
\operatorname{Cos}\theta_1, & \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta_1,\\
\operatorname{Cos}\theta_2, & \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta_2,\\
\cdots & \cdots\\
\operatorname{Cos}\theta_{n-1}, & \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta_{n-1}
\end{array}$$

gestatten. Diejenigen Complexionen, in welchen die Anzahl der Sinus gerade ist, bilden die reellen Glieder und gehören der Entwickelung von $\operatorname{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$ an, und diejenigen Complexionen, in welchen die Anzahl der Sinus ungerade ist, bilden die imaginären Glieder und gehören, nach Auslassung des Factors $\sqrt{-1}$, der Entwickelung von $\operatorname{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$ an. Von den reellen Gliedern sind jene positiv, in welchen die Anzahl der Sinus durch 4 getheilt 0 zum Rest gibt, und jene negativ, in welchen diese Anzahl durch 4 getheilt 2 zum Rest gibt, weil $(\sqrt{-1})^{4r}=+1$, $(\sqrt{-1})^{4r+2}=-1$ ist. Von den imaginären Gliedern haben jene offenbar das Vorzeichen $+$, in welchen die Anzahl der Sinus durch 4 getheilt 1 zum Rest gibt, und jene das Vorzeichen $-$, in welchen die Anzahl der Sinus durch 4 getheilt 3 zum Rest gibt, weil

$$(\sqrt{-1})^{4r+1}=+\sqrt{-1},\quad (\sqrt{-1})^{4r+3}=-\sqrt{-1}$$

ist. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich nun mit Leichtigkeit zur Entwickelung von

$$\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1}) \text{ und } \mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$$

folgende Regel: **Man bilde aus den n Elementenreihen**

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Cos}\,\theta, & \mathrm{Sin}\,\theta, \\ \mathrm{Cos}\,\theta_1, & \mathrm{Sin}\,\theta_1, \\ \mathrm{Cos}\,\theta_2, & \mathrm{Sin}\,\theta_2, \\ \ldots & \ldots \\ \mathrm{Cos}\,\theta_{n-1}, & \mathrm{Sin}\,\theta_{n-1} \end{array}$$

alle möglichen Variationen und sortire sämmtliche Complexionen in zwei Gruppen, von welchen die erste die Sinus jeder Complexion in gerader Anzahl, die zweite die Sinus jeder Complexion in ungerader Anzahl enthält. Die Complexionen der ersten Gruppe bilden die Glieder der Entwickelung von

$$\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1}),$$

die Complexionen der zweiten Gruppe bilden die Glieder der Entwickelung von

$$\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1}).$$

Die Glieder der ersten Gruppe bezeichne man mit +, wenn die Anzahl der Sinus durch 4 theilbar ist, alle übrigen bezeichne man mit —. Die Glieder der zweiten Gruppe bezeichne man mit +, wenn die Anzahl der Sinus durch 4 getheilt 1 zum Rest gibt, alle übrigen bezeichne man mit —.

Um z. B. $\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ und $\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ zu entwickeln, hat man aus den vier Elementen-Reihen

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Cos}\,\theta, & \mathrm{Sin}\,\theta, \\ \mathrm{Cos}\,\theta_1, & \mathrm{Sin}\,\theta_1, \\ \mathrm{Cos}\,\theta_2, & \mathrm{Sin}\,\theta_2, \\ \mathrm{Cos}\,\theta_3, & \mathrm{Sin}\,\theta_3 \end{array}$$

die sämmtlichen Variationen

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3,\\
\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3,\\
\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3,\\
\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3,\\
\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3,\\
\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3,\\
\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3,\\
\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3;
\end{array}$$

und wenn man nun diese in zwei Gruppen mit gerader und ungerader Sinusanzahl sortirt, endlich die einzelnen Complexionen auf die angezeigte Weise mit Vorzeichen versieht, so erhält man:

$$(2)\qquad \begin{aligned}
&\operatorname{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\
=\;&\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3\\
&-\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3\\
&-\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3\\
&-\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3\\
&-\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3\\
&-\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3\\
&-\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3\\
&+\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3,
\end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned}
&\operatorname{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\
=\;&\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3\\
&+\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3\\
&+\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3\\
&-\operatorname{Cos}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3\\
&+\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3\\
&-\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Cos}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3\\
&-\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Cos}\theta_3\\
&-\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\theta_1\operatorname{Sin}\theta_2\operatorname{Sin}\theta_3.
\end{aligned}$$

Zusatz. Um $\operatorname{Cos}(\theta-\theta_1-\theta_2+\theta_3)$ und $\operatorname{Sin}(\theta-\theta_1-\theta_2+\theta_3)$ zu entwickeln, setze man

$$\theta-\theta_1-\theta_2+\theta_3=\theta+(-\theta_1)+(-\theta_2)+\theta_3$$

und verfahre mit den Elementenreiben:

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{Cos}\theta, & \operatorname{Sin}\theta,\\
\operatorname{Cos}(-\theta_1), & \operatorname{Sin}(-\theta_1),\\
\operatorname{Cos}(-\theta_2), & \operatorname{Sin}(-\theta_2),\\
\operatorname{Cos}\theta_3, & \operatorname{Sin}\theta_3,
\end{array}$$

oder, was dasselbe ist, mit den Elementenreiben:

$$\begin{array}{ll} \cos\theta, & \sin\theta, \\ \cos\theta_1, & -\sin\theta_1, \\ \cos\theta_2, & -\sin\theta_2, \\ \cos\theta_3, & \sin\theta_3 \end{array}$$

wie zuvor. Man sieht augenblicklich, dass in diesem Falle in den zweiten Theilen der Gleichungen (2), (3) alle jene Glieder ihr Zeichen ändern, welche $\sin\theta_1$ ohne $\sin\theta_2$ oder $\sin\theta_2$ ohne $\sin\theta_1$ enthalten, die Vorzeichen der Cosinusentwickelung werden daher der Reihe nach sein:

$$+\quad -\quad +\quad +\quad +\quad +\quad -\quad +$$

und jene der Sinusentwickelung:

$$-\quad -\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +\quad +.$$

Dass dieses Verfahren allgemein gilt, geht unmittelbar aus der Gleichung (1) hervor, wenn man $-\theta_1$ an die Stelle von θ_1, $-\theta_2$ an die Stelle von θ_2 setzt, wodurch man erhält:

$$(4)\quad (\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\theta_1-\sqrt{-1}\sin\theta_1)$$
$$\times(\cos\theta_2-\sqrt{-1}\sin\theta_2)\dots(\cos\theta_{n-1}+\sqrt{-1}\sin\theta_{n-1})$$
$$=\cos(\theta-\theta_1-\theta_2+\dots+\theta_{n-1})+\sqrt{-1}\sin(\theta-\theta_1-\theta_2+\dots+\theta_{n-1}).$$

§. 2.

Nehmen wir an, die Entwickelung von $\cos(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-2})$ bestehe aus h Gliedern und die Entwickelung von

$$\sin(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-2})$$

bestehe aus k Gliedern, alsdann muss, weil

$$\cos(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1})$$
$$=\cos(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-2})\cos\theta_{n-1}-\sin(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-2})\sin\theta_{n-1},$$

$$\sin(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1})$$
$$=\sin(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-2})\cos\theta_{n-1}+\cos(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-2})\sin\theta_{n-1}$$

ist, sowohl

$\cos(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1})$ als auch $\sin(\theta+\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_{n-1})$

aus $h+k$ Gliedern bestehen, weil in den ersten Gliedern der zweiten Theile dieser Gleichungen kein $\sin\theta_{n-1}$ und in den zwei-

ten Gliedern kein $\text{Cos}\,\theta_{n-1}$ vorkommen kann, sich also weder Glieder aufheben, noch sich deren zusammenziehen lassen. Folglich bestehen die Entwickelungen von $\text{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$ und $\text{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$ aus gleichviel Gliedern. Da nun die Summe der Gliederzahl beider Entwickelungen gleich 2^n, gleich der Anzahl der Variationen von n Elementenreihen sein muss, wovon jede Reihe aus zwei Elementen besteht, so besteht die Entwickelung von $\text{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$ sowohl, als auch die Entwickelung von $\text{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$ aus 2^{n-1} Gliedern. Wir wollen uns nun noch die Frage stellen, wie viele Zeichen $+$ und wie viele Zeichen $-$ kommen in jeder dieser Entwickelungen vor?

Bezeichnen wir mit (n) einen aus n positiven Gliedern bestehenden Ausdruck, ist n_1 die Anzahl der positiven, n_2 die Anzahl der negativen Glieder in der Entwickelung von $\text{Cos}(n)$, ferner n_3 die Anzahl der positiven, n_4 die Anzahl der negativen Glieder in der Entwickelung von $\text{Sin}(n)$, so können wir, da es uns blos auf die Anzahl der positiven und negativen Glieder, nicht auf die Quantität ankommt, setzen:

$$\text{Cos}(n)=(n_1)-(n_2),\quad \text{Sin}(n)=(n_3)-(n_4),$$

und wollen nun ermitteln, aus wie viel positiven und negativen Gliedern alsdann die Cosinus- und Sinusentwickelung eines $n+1$gliedrigen Ausdruckes besteht. Es ist

$$\text{Cos}(n+1)=\text{Cos}(n)\,\text{Cos}(1)-\text{Sin}(n)\,\text{Sin}(1),$$

$$\text{Sin}(n+1)=\text{Sin}(n)\,\text{Cos}(1)+\text{Cos}(n)\,\text{Sin}(1),$$

und da man nur auf die Anzahl der Glieder sieht, so können die Factoren $\text{Cos}(1)$ und $\text{Sin}(1)$ weggelassen werden, und man hat:

$$\text{Cos}(n+1)=\text{Cos}(n)-\text{Sin}(n),$$

$$\text{Sin}(n+1)=\text{Sin}(n)+\text{Cos}(n),$$

oder wenn man $(n_1)-(n_2)$ für $\text{Cos}(n)$ und $(n_3)-(n_4)$ für $\text{Sin}(n)$ setzt und die positiven Glieder für sich, die negativen Glieder für sich zusammenfasst:

$$\text{Cos}(n+1)=(n_1+n_4)-(n_2+n_3),$$

$$\text{Sin}(n+1)=(n_1+n_3)-(n_2+n_4),$$

d. h. die Entwickelung von $\text{Cos}(n+1)$ besteht aus n_1+n_4 positiven und aus n_2+n_3 negativen Gliedern; die Entwickelung von $\text{Sin}(n+1)$ besteht aus n_1+n_3 positiven und aus n_2+n_4 negativen Gliedern. Vergleicht man die beiden Reihen

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad n_4,$$

$$n_1+n_4, \quad n_2+n_3, \quad n_1+n_3, \quad n_2+n_4$$

mit einander, so sieht man, dass die Glieder der zweiten Reihe durch Addition aus den Gliedern der ersten Reihe nach einem sehr einfachen Gesetze erhalten werden. Sind z. B. die Glieder der ersten Reihe

$$1, \ 1, \ 2, \ 0,$$

welche der Entwickelung von $\text{Cos}(\theta+\theta_1)$ und $\text{Sin}(\theta+\theta_1)$ entsprechen, so sind die Glieder der zweiten Reihe beziehungsweise

$$1, \ 3, \ 3, \ 1,$$

d. h. die Entwickelung von $\text{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2)$ hat ein positives und drei negative Glieder und die Entwickelung von $\text{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2)$ besteht aus drei positiven und einem negativen Gliede. Betrachtet man diese zweite Reihe wieder als erste, so erhält man daraus:

$$2, \ 6, \ 4, \ 4,$$

d. h. die Entwickelung von $\text{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ besteht aus zwei positiven und sechs negativen Gliedern; die Entwickelung von $\text{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ besteht aus vier positiven und vier negativen Gliedern, u. s. w. Auf diese Weise wurde die folgende Tabelle gebildet.



Tabelle,

enthaltend die Anzahl der positiven und negativen Glieder in der Entwickelung von

$\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$ und $\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})$

von $n=1$ bis $n=30$.

n	Cosinus.		Sinus.	
	+	−	+	−
1	1	0	1	0
2	1	1	2	0
3	1	3	3	1
4	2	6	4	4
5	6	10	6	10
6	16	16	12	20
7	36	28	28	36
8	72	56	64	64
9	136	120	136	120
10	256	256	272	240
11	496	528	528	496
12	992	1056	1024	1024
13	2016	2080	2016	2080
14	4096	4096	4032	4160
15	8256	8128	8128	8256
16	16512	16256	16384	16384
17	32896	32640	32896	32640
18	65536	65536	65792	65280
19	130816	131328	131328	130816
20	261632	262656	262144	262144
21	523776	524800	523776	524800
22	1048576	1048576	1047552	1049600
23	2098176	2096128	2096128	2098176
24	4196352	4192256	4194304	4194304
25	8390656	8386560	8390656	8386560
26	16777216	16777216	16781312	16773120
27	33550336	33558528	33558528	33550336
28	67100672	67117056	67108864	67108864
29	134209536	134225920	134209536	134225920
30	268435456	268435456	268419072	268451840

§. 3.

Um nun die allgemeine Independenzformel für die Anzahl der positiven und negativen Glieder in den Entwickelungen von $\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$ und $\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$ zu erhalten, ist es nothwendig, für n die vier Formen

$$4r,\quad 4r+1,\quad 4r+2,\quad 4r+3$$

von einander zu unterscheiden. Ist für $n=4r$ in der Cosinus- und Sinusentwickelung die Anzahl der positiven Glieder beziehungsweise gleich m und m', so ist die Anzahl der negativen Glieder beziehungsweise gleich $2^{4r-1}-m$ und $2^{4r-1}-m'$, und man findet hiermit die Anzahl der positiven und negativen Glieder in den Entwickelungen für $n=4r+1,\ 4r+2,\ 4r+3,\ 4r+4$ durch schlichte Addition auf die oben bewiesene Art und hat das folgende Schema, das nach dem Vorhergehenden einer weiteren Erläuterung nicht bedarf.

n	Cosinus. +	Cosinus. −	Sinus. +	Sinus. −
$4r$	m	$2^{4r-1}-m$	m'	$2^{4r-1}-m'$
$4r+1$	$m-m'+2^{4r-1}$	$m'-m+2^{4r-1}$	$m+m'$	$2^{4r}-m-m'$
$4r+2$	$-2m'+2^{4r}+2^{4r-1}$	$2m'+2^{4r-1}$	$2m+2^{4r-1}$	$-2m+2^{4r-1}+2^{4r}$
$4r+3$	$-2m-2m'+2^{4r}+2^{4r+1}$	$2m+2m'+2^{4r}$	$2m-2m'+2^{4r+1}$	$-2m+2m'+2^{4r+1}$
$4r+4$	$-4m+2^{4r}+2^{4r+2}$	$4m+2^{4r}+2^{4r+1}$	$-4m'+2^{4r}+2^{4r+2}$	$4m'+2^{4r}+2^{4r+1}$

Die Auffindung der Independenzformeln für die Anzahl der positiven und negativen Glieder ist sonach zurückgeführt auf die Bestimmung der Werthe von m und m'. Bildet man sich aus der vorhergehenden Tabelle die Differenz $m-(2^{4r-1}-m)$ der Anzahl der positiven und negativen Glieder in der Entwickelung von $\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{4r-1})$, so erhält man der Reihe nach

$$
\begin{array}{lll}
\text{für } r=1 & - & 4=-2^2, \\
\text{„ } r=2 & + & 16=+2^4, \\
\text{„ } r=3 & - & 64=-2^6, \\
\text{„ } r=4 & + & 256=+2^8, \\
\text{„ } r=5 & - & 1024=-2^{10}, \\
\text{„ } r=6 & + & 4096=+2^{12}, \\
\text{„ } r=7 & - & 16384=-2^{14},
\end{array}
$$

und man schliesst daraus durch Induction, dass allgemein

$$(5) \qquad m-(2^{4r-1}-m)=(-1)^r 2^{2r},$$

also

$$(6) \qquad m=2^{4r-2}+(-1)^r 2^{2r-1}$$

ist. Bildet man aus obigem Schema dieselbe Differenz für $n=4r+4$, so erhält man $-8m+2^{4r+1}$; und setzt man hierin statt m den eben gefundenen Werth, so erhält man:

$$(-1)^{r+1}2^{2r+2}.$$

Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man im zweiten Theil der Gleichung (5) $r+1$ statt r setzt, woraus folgt, dass, wenn die für m gefundene Formel für r gilt, sie nothwendig auch für $r+1$ gelten muss. Da aber diese Formel für $r=1$ gilt, so gilt sie nach bekannter Schlussweise für $r=2, 3, \ldots$, d. h. allgemein.

Aus der Betrachtung der Tabelle ersieht man auch, dass für $n=4r$ in der Sinusentwickelung die Anzahl der positiven Glieder immer gleich ist der Anzahl der negativen Glieder. Man schliesst also durch Induction, dass allgemein

$$m'=2^{4r-1}-m'$$

oder dass

$$(7) \qquad m'=2^{4r-2}$$

ist. Nach dem obigen Schema ist für $n=4r+4$ in der Sinusentwickelung die Anzahl der positiven und negativen Glieder beziehungsweise

$$-4m'+2^{4r}+2^{4r+2},\quad 4m'+2^{4r}+2^{4r+1}.$$

Setzt man nun hierin für m' den gefundenen Werth, so erhält man in beiden Fällen

$$2^{4r+2},$$

woraus folgt, dass wenn die Gleichheit der Anzahl der positiven und negativen Glieder in der Entwickelung von $\text{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{4r-1})$ und der daraus folgende Werth von m' für r gilt, beides nothwendig auch für $r+1$ gelten muss. Da aber die Giltigkeit obigen Werthes von m' für $r=1$ nachgewiesen ist, so gilt derselbe nach bekannter Schlussweise allgemein.

Bezeichnet man mit P_c und N_c die Anzahl der positiven und negativen Glieder der Cosinusentwickelung und mit P_s und N_s die Anzahl der positiven und negativen Glieder der Sinusentwickelung, so gibt das obige Schema, wenn man für m und m' seine Werthe aus (6) und (7) setzt:

(8)

für $n=4r$ $\quad P_c=2^{4r-2}+(-1)^r 2^{2r-1},\quad N_c=2^{4r-2}-(-1)^r 2^{2r-1},$

$\quad P_s=2^{4r-2},\quad N_s=2^{4r-2};$

„ $n=4r+1$ $\quad P_c=2^{4r-1}+(-1)^r 2^{2r-1},\quad N_c=2^{4r-1}-(-1)^r 2^{2r-1},$

$\quad P_s=2^{4r-1}+(-1)^r 2^{2r-1},\quad N_s=2^{4r-1}-(-1)^r 2^{2r-1};$

„ $n=4r+2$ $\quad P_c=2^{4r},\quad N_c=2^{4r},$

$\quad P_s=2^{4r}+(-1)^r 2^{2r},\quad N_s=2^{4r}-(-1)^r 2^{2r};$

„ $n=4r+3$ $\quad P_c=2^{4r+1}-(-1)^r 2^{2r},\quad N_c=2^{4r+1}+(-1)^r 2^{2r},$

$\quad P_s=2^{4r+1}+(-1)^r 2^{2r},\quad N_s=2^{4r+1}-(-1)^r 2^{2r}.$

§. 4.

Indem wir nunmehr zur Anwendung des Vorhergehenden übergehen, nehmen wir die identische Gleichung vor:

(9)

$$(\text{Cos}^2\theta+\text{Sin}^2\theta)(\text{Cos}^2\theta_1+\text{Sin}^2\theta_1)(\text{Cos}^2\theta_2+\text{Sin}^2\theta_2)\ldots$$
$$\ldots(\text{Cos}^2\theta_{n-1}+\text{Sin}^2\theta_{n-1})$$
$$=\text{Cos}^2(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1})+\text{Sin}^2(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_{n-1}),$$

und multipliciren dieselbe mit $(\varrho\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1})^2$, wobei $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ reelle positive Grössen bezeichnen, und erhalten:

$$\{(\varrho\,\mathrm{Cos}\,\theta)^2+(\varrho\,\mathrm{Sin}\,\theta)^2\}\{(\varrho_1\mathrm{Cos}\,\theta_1)^2+(\varrho_1\mathrm{Sin}\,\theta_1)^2\}\{(\varrho_2\mathrm{Cos}\,\theta_2)^2+(\varrho_2\mathrm{Sin}\,\theta_2)^2\}\ldots.$$
$$\ldots.\{(\varrho_{n-1}\mathrm{Cos}\,\theta_{n-1})^2+(\varrho_{n-1}\mathrm{Sin}\,\theta_{n-1})^2\}$$
$$=\{\varrho\varrho_1\varrho_2\ldots.\varrho_{n-1}\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})\}^2$$
$$+\{\varrho\varrho_1\varrho_2\ldots.\varrho_{n-1}\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})\}^2.$$

Denkt man sich im zweiten Theil dieser Gleichung

$$\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})\quad\text{und}\quad\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$$

nach dem im obigen auseinandergesetzten Verfahren entwickelt, alsdann Glied um Glied mit $\varrho\varrho_1\varrho_2\ldots.\varrho_{n-1}$ multiplicirt und setzt man:

$$(10)\quad\begin{cases}\alpha\;\;=\varrho\,\mathrm{Cos}\,\theta, & \beta\;\;=\varrho\,\mathrm{Sin}\,\theta,\\ \alpha_1\;=\varrho_1\mathrm{Cos}\,\theta_1, & \beta_1\;=\varrho_1\mathrm{Sin}\,\theta_1,\\ \alpha_2\;=\varrho_2\mathrm{Cos}\,\theta_2, & \beta_2\;=\varrho_2\mathrm{Sin}\,\theta_2,\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-1}=\varrho_{n-1}\mathrm{Cos}\,\theta_{n-1}, & \beta_{n-1}=\varrho_{n-1}\mathrm{Sin}\,\theta_{n-1};\end{cases}$$

so sind die in beiden Fällen sich ergebenden Resultate offenbar reine Functionen von α, α_1, $\alpha_2,\ldots.\alpha_{n-1}$, β, β_1, $\beta_2,\ldots.\beta_{n-1}$; bezeichnet man das erste Resultat kurz mit $f(\alpha,\beta)$, das zweite mit $F(\alpha,\beta)$, so wird:

$$(11)\quad\begin{cases}\varrho\varrho_1\varrho_2\ldots.\varrho_{n-1}\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})=f(\alpha,\beta),\\ \varrho\varrho_1\varrho_2\ldots.\varrho_{n-1}\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})=F(\alpha,\beta),\end{cases}$$

und man hat statt (9) die Gleichung:

$$(12)$$
$$P=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)\ldots.(\alpha_{n-1}{}^2+\beta_{n-1}{}^2)=\{f(\alpha,\beta)\}^2+\{F(\alpha,\beta)\}^2,$$

so dass also das Product P umgeformt erscheint in die Summe zweier Quadrate. $f(\alpha,\beta)$ wird sich von der Entwickelung von $\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$ und $F(\alpha,\beta)$ von der Entwickelung von $\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$ nur darin unterscheiden, dass α, α_1, $\alpha_2,\ldots.\alpha_{n-1}$ an der Stelle von $\mathrm{Cos}\,\theta$, $\mathrm{Cos}\,\theta_1$, $\mathrm{Cos}\,\theta_2,\ldots.\mathrm{Cos}\,\theta_{n-1}$ und β, β_1, $\beta_2,\ldots.\beta_{n-1}$ an der Stelle von $\mathrm{Sin}\,\theta$, $\mathrm{Sin}\,\theta_1$, $\mathrm{Sin}\,\theta_2,\ldots.$ $\ldots\mathrm{Sin}\,\theta_{n-1}$ steht. Das für die Entwickelung von

$$\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})\quad\text{und}\quad\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$$

im Obigen gefundene Verfahren wird sich also auch auf die Entwickelung der Functionen $f(\alpha,\beta)$ und $F(\alpha,\beta)$ ausdehnen lassen,

wenn man nur überall statt der Cosinus die α und statt der Sinus die β setzt. Die Regel wird alsdann folgendermassen lauten:

Man bilde aus den n Elementenreihen

$$\begin{array}{ll} \alpha, & \beta, \\ \alpha_1, & \beta_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1}, & \beta_{n-1} \end{array}$$

alle möglichen Variationen und sortire sämmtliche Complexionen in zwei Gruppen, von welchen die erste die β in jeder Complexion in gerader, die zweite die β in jeder Complexion in ungerader Anzahl enthält. Die Glieder der ersten Gruppe bezeichne man mit +, wenn die Anzahl der β durch 4 theilbar ist, alle übrigen bezeichne man mit —. Die Glieder der zweiten Gruppe bezeichne man mit +, wenn die Anzahl der β durch 4 getheilt 1 zum Rest gibt, alle übrigen bezeichne man mit —. Alsdann ist die erste Gruppe die Entwickelung von $f(\alpha, \beta)$, die zweite jene von $F(\alpha, \beta)$.

So erhält man zum Beispiel zur Zerlegung des Productes $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)$ aus den Elementenreihen

$$\begin{array}{ll} \alpha, & \beta, \\ \alpha_1, & \beta_1, \\ \alpha_2, & \beta_2 \end{array}$$

die Variationen:

$$\begin{array}{ll} \alpha\alpha_1\alpha_2, & \beta\alpha_1\alpha_2, \\ \alpha\beta_1\alpha_2, & \beta\beta_1\alpha_2, \\ \alpha\alpha_1\beta_2, & \beta\alpha_1\beta_2, \\ \alpha\beta_1\beta_2, & \beta\beta_1\beta_2; \end{array}$$

folglich ist:

$$\begin{array}{rlrl} f(\alpha,\beta)= & \alpha\alpha_1\alpha_2 & \text{und} \quad F(\alpha,\beta)= & \alpha\beta_1\alpha_2 \\ & -\alpha\beta_1\beta_2 & & +\alpha\alpha_1\beta_2 \\ & -\beta\beta_1\alpha_2 & & +\beta\alpha_1\alpha_2 \\ & -\beta\alpha_1\beta_2 & & -\beta\beta_1\beta_2 \end{array}$$

und

$$(13) \quad (\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)=\{\alpha\alpha_1\alpha_2-\alpha\beta_1\beta_2-\beta\beta_1\alpha_2-\beta\alpha_1\beta_2\}^2$$
$$+\{\alpha\beta_1\alpha_2+\alpha\alpha_1\beta_2+\beta\alpha_1\alpha_2-\beta\beta_1\beta_2\}^2.$$

Um das Product $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)$ zu zerlegen, hat man aus den Elementenreihen

$$\begin{array}{ll} \alpha, & \beta, \\ \alpha_1, & \beta_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, \\ \alpha_3, & \beta_3 \end{array}$$

die Variationen

$$\begin{array}{ll} \alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3, & \beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \\ \alpha\beta_1\alpha_2\alpha_3, & \beta\beta_1\alpha_2\alpha_3, \\ \alpha\alpha_1\beta_2\alpha_3, & \beta\alpha_1\beta_2\alpha_3, \\ \alpha\beta_1\beta_2\alpha_3, & \beta\beta_1\beta_2\alpha_3, \\ \alpha\alpha_1\alpha_2\beta_3, & \beta\alpha_1\alpha_2\beta_3, \\ \alpha\beta_1\alpha_2\beta_3, & \beta\beta_1\alpha_2\beta_3, \\ \alpha\alpha_1\beta_2\beta_3, & \beta\alpha_1\beta_2\beta_3, \\ \alpha\beta_1\beta_2\beta_3, & \beta\beta_1\beta_2\beta_3; \end{array}$$

und wenn man nach den obigen Vorschriften die Complexionen sortirt und bezeichnet, so wird:

$$\begin{array}{rlrl} f(\alpha,\beta)= & \alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3 & F(\alpha,\beta)= & \alpha\beta_1\alpha_2\alpha_3 \\ & -\alpha\beta_1\beta_2\alpha_3 & & +\alpha\alpha_1\beta_2\alpha_3 \\ & -\alpha\beta_1\alpha_2\beta_3 & & +\alpha\alpha_1\alpha_2\beta_3 \\ & -\alpha\alpha_1\beta_2\beta_3 & & -\alpha\beta_1\beta_2\beta_3 \\ & -\beta\beta_1\alpha_2\alpha_3 & & +\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ & -\beta\alpha_1\beta_2\alpha_3 & & -\beta\beta_1\beta_2\alpha_3 \\ & -\beta\alpha_1\alpha_2\beta_3 & & -\beta\beta_1\alpha_2\beta_3 \\ & +\beta\beta_1\beta_2\beta_3, & & -\beta\alpha_1\beta_2\beta_3; \end{array}$$

und es ist sonach, wenn man zur Abkürzung

$$\begin{array}{ll} a=\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3, & a'=\alpha\beta_1\alpha_2\alpha_3, \\ b=\alpha\beta_1\beta_2\alpha_3, & b'=\alpha\alpha_1\beta_2\alpha_3, \\ c=\alpha\beta_1\alpha_2\beta_3, & c'=\alpha\alpha_1\alpha_2\beta_3, \\ d=\alpha\alpha_1\beta_2\beta_3, & d'=\alpha\beta_1\beta_2\beta_3, \\ e=\beta\beta_1\alpha_2\alpha_3, & e'=\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \\ f=\beta\alpha_1\beta_2\alpha_3, & f'=\beta\beta_1\beta_2\alpha_3, \\ g=\beta\alpha_1\alpha_2\beta_3, & g'=\beta\beta_1\alpha_2\beta_3, \\ h=\beta\beta_1\beta_2\beta_3, & h'=\beta\alpha_1\beta_2\beta_3 \end{array}$$

setzt:

(14)

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)=(a-b-c-d-e-f-g+h)^2$$
$$+(a'+b'+c'-d'+e'-f'-g'-h')^2$$

§. 5.

Die Gleichung (9), folglich auch jene (12), wird aber offenbar auch dann noch richtig bleiben, wenn man in der Summe

$$\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1}$$

die Vorzeichen beliebig verändert. Hätte man z. B. θ_μ, θ_ν, ... in $-\theta_\mu$, $-\theta_\nu$.... verwandelt, so treten in der Entwickelung von $\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$ und $\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$ die Grössen

$$\mathrm{Cos}(-\theta_\mu),\quad \mathrm{Sin}(-\theta_\mu),$$
$$\mathrm{Cos}(-\theta_\nu),\quad \mathrm{Sin}(-\theta_\nu),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

oder, was dasselbe ist, die Grössen

$$\mathrm{Cos}\,\theta_\mu,\quad -\mathrm{Sin}\,\theta_\mu,$$
$$\mathrm{Cos}\,\theta_\nu,\quad -\mathrm{Sin}\,\theta_\nu$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

an die Stelle von

$$\mathrm{Cos}\,\theta_\mu,\quad \mathrm{Sin}\,\theta_\mu,$$
$$\mathrm{Cos}\,\theta_\nu,\quad \mathrm{Sin}\,\theta_\nu,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

d. h. in den Entwickelungen von $\mathrm{Cos}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$ und $\mathrm{Sin}(\theta+\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_{n-1})$ braucht man nur in jenen Gliedern die Zeichen zu verändern, in welchen $\mathrm{Sin}\,\theta_\mu$, $\mathrm{Sin}\,\theta_\nu$,.... in ungerader Anzahl zusammen vorkommen. In den Functionen $f(\alpha,\beta)$ und $F(\alpha,\beta)$ treten alsdann an die Stelle von β_μ, β_ν,.... die Grössen $-\beta_\mu$, $-\beta_\nu$,...., während alles Andere ungeändert bleibt. Die Gleichung (12) wird also auch dann noch gelten, wenn man im zweiten Theile derselben in allen jenen Gliedern von $f(\alpha,\beta)$ und $F(\alpha,\beta)$ die Zeichen verändert, welche β_μ, β_ν,.... in ungerader Anzahl enthalten. Auf diese Weise erhält man für das Product

$$(12)\quad P=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)\ldots.(\alpha_{n-1}^2+\beta_{n-1}^2)$$

eine neue Zerfällung in die Summe zweier Quadrate.

Aus den Gleichungen (11) und (12) folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\Theta = \theta + \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n-1}$$

setzt:

$$(15) \qquad \frac{F(\alpha,\beta)}{f(\alpha,\beta)} = \operatorname{tg}\Theta, \quad \{F(\alpha,\beta)\}^2 + \{f(\alpha,\beta)\}^2 = P,$$

woraus man mit Leichtigkeit findet:

$$(15) \qquad \{F(\alpha,\beta)\}^2 = \frac{\operatorname{tg}^2\Theta}{1+\operatorname{tg}^2\Theta}P, \quad \{f(\alpha,\beta)\}^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\Theta}P.$$

Versteht man unter Θ jede beliebige algebraische Summe der n Grössen θ, θ_1, θ_2, ... θ_{n-1}, so ersieht man aus den vorstehenden Gleichungen, dass man für $\{F(\alpha,\beta)\}^2$, $\{f(\alpha,\beta)\}^2$ so viele verschiedene Werthpaare erhalten wird, als es numerisch verschiedene Werthe von Θ gibt, indem das Vorzeichen von Θ gleichgiltig ist. Bekanntlich lassen sich aus n Grössen wie θ, θ_1, θ_2, ... θ_{n-1} durch ledigliche Aenderung der Vorzeichen im Allgemeinen 2^n verschiedene Summen bilden. (M. s. meinen Aufsatz: Ueber eine Eigenschaft der geometrischen Progression 1, 3, 9, 27, ... Archiv. Thl. XXXIII. S. 106). Unter diesen befinden sich aber paarweise solche von gleichem Zahlwerth und entgegengesetzten Zeichen, so dass die Anzahl der absolut verschiedenen Summen im Allgemeinen gleich 2^{n-1} ist. Man wird also auch für $F(\alpha,\beta)$ und $f(\alpha,\beta)$ im Allgemeinen 2^{n-1} verschiedene Werthpaare erhalten, welche alsdann eben so viele Zerfällungen des obigen Productes P in die Summe zweier Quadrate ergeben.

Da sich aus den Grössen θ, θ_1, θ_2 die vier Summen

$$\begin{gathered} \theta+\theta_1+\theta_2, \\ -\theta+\theta_1+\theta_2, \\ \theta-\theta_1+\theta_2, \\ \theta+\theta_1-\theta_2 \end{gathered}$$

bilden lassen, so hat man für $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)$ vier verschiedene Zerfällungen. An die Stelle der im ersten Beispiele aufgeführten Elementenreihen treten nun vier Systeme solcher, und zwar die:

$$\begin{array}{llll} \alpha,\ \beta, & \alpha,\ -\beta, & \alpha,\ \beta, & \alpha,\ \beta, \\ \alpha_1,\ \beta_1, & \alpha_1,\ \beta_1, & \alpha_1,\ -\beta_1, & \alpha_1,\ \beta_1, \\ \alpha_2,\ \beta_2, & \alpha_2,\ \beta_2. & \alpha_2,\ \beta_2. & \alpha_2,\ -\beta_2. \end{array}$$

und die vier Auflösungen sind:

$$(16)\qquad (\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)$$

$$=(\alpha\alpha_1\alpha_2-\alpha\beta_1\beta_2-\beta\beta_1\alpha_2-\beta\alpha_1\beta_2)^2+(\alpha\beta_1\alpha_2+\alpha\alpha_1\beta_2+\beta\alpha_1\alpha_2-\beta\beta_1\beta_2)^2$$

$$=(\alpha\alpha_1\alpha_2-\alpha\beta_1\beta_2+\beta\beta_1\alpha_2+\beta\alpha_1\beta_2)^2+(\alpha\beta_1\alpha_2+\alpha\alpha_1\beta_2-\beta\alpha_1\alpha_2+\beta\beta_1\beta_2)^2$$

$$=(\alpha\alpha_1\alpha_2+\alpha\beta_1\beta_2+\beta\beta_1\alpha_2-\beta\alpha_1\beta_2)^2+(-\alpha\beta_1\alpha_2+\alpha\alpha_1\beta_2+\beta\alpha_1\alpha_2+\beta\beta_1\beta_2)^2$$

$$=(\alpha\alpha_1\alpha_2+\alpha\beta_1\beta_2-\beta\beta_1\alpha_2+\beta\alpha_1\beta_2)^2+(\alpha\beta_1\alpha_2-\alpha\alpha_1\beta_2+\beta\alpha_1\alpha_2+\beta\beta_1\beta_2)^2.$$

Da sich aus vier Grössen θ, θ_1, θ_2, θ_3 die acht Summen

$$\begin{aligned}
&\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3,\\
-&\theta+\theta_1+\theta_2+\theta_3,\\
&\theta-\theta_1+\theta_2+\theta_3,\\
&\theta+\theta_1-\theta_2+\theta_3,\\
&\theta+\theta_1+\theta_2-\theta_3,\\
-&\theta-\theta_1+\theta_2+\theta_3,\\
&\theta-\theta_1-\theta_2+\theta_3,\\
&\theta-\theta_1+\theta_2-\theta_3
\end{aligned}$$

bilden lassen, so hat man für die Zerlegung des Productes $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)$ acht verschiedene Lösungen. In der That, man hat statt der im zweiten Beispiele aufgeführten Elementenreihe ein System von acht solchen, und zwar die:

$$\begin{array}{llllllll}
\alpha, & \beta, & \alpha, & -\beta, & \alpha, & \beta, & \alpha, & \beta,\\
\alpha_1, & \beta_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \alpha_1, & -\beta_1, & \alpha_1, & \beta_1,\\
\alpha_2, & \beta_2, & \alpha_2, & \beta_2, & \alpha_2, & \beta_2, & \alpha_2, & -\beta_2,\\
\alpha_3, & \beta_3; & \alpha_3, & \beta_3; & \alpha_3, & \beta_3; & \alpha_3, & \beta_3;
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
\alpha, & \beta, & \alpha, & -\beta, & \alpha, & \beta, & \alpha, & \beta,\\
\alpha_1, & \beta_1, & \alpha_1, & -\beta_1, & \alpha_1, & -\beta_1, & \alpha_1, & -\beta_1,\\
\alpha_2, & \beta_2, & \alpha_2, & \beta_2, & \alpha_2, & -\beta_2, & \alpha_2, & \beta_2,\\
\alpha_3, & -\beta_3; & \alpha_3, & \beta_3; & \alpha_3, & \beta_3; & \alpha_3, & -\beta_3.
\end{array}$$

Werden nun mit Hilfe dieses Systems die Vorzeichen der Grössen a, b, a' u. s. w. der oben gegebenen Lösung (14) entsprechend verändert, so erhält man folgende acht Auflösungen:

$$(17)\qquad \begin{aligned}&(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)\\
&= (a-b-c-d-e-f-g+h)^2\\
&\quad+(a'+b'+c'-d'+e'-f'-g'-h')^2\\
&= (a-b-c-d+e+f+g-h)^2\\
&\quad+(a'+b'+c'-d'-e'+f'+g'+h')^2\\
&= (a+b+c-d+e-f-g-h)^2\\
&\quad+(-a'+b'+c'+d'+e'+f'+g'-h')^2\\
&= (a+b-c+d-e+f-g-h)^2\\
&\quad+(a'-b'+c'+d'+e'+f'-g'+h')^2\\
&= (a-b+c+d-e-f+g-h)^2\\
&\quad+(a'+b'-c'+d'+e'-f'+g'+h')^2\\
&= (a+b+c-d-e+f+g+h)^2\\
&\quad+(-a'+b'+c'+d'-e'-f'-g'+h')^2\\
&= (a-b+c+d+e+f-g+h)^2\\
&\quad+(-a'-b'+c'-d'+e'-f'+g'+h')^2\\
&= (a+b-c+d+e-f+g+h)^2\\
&\quad+(-a'+b'-c'-d'+e'+f'-g'+h')^2.\end{aligned}$$

§. 6.

Man denke sich die n Factoren des Productes P (12) in zwei Gruppen gesondert, wovon die eine $r-1$ Factoren, die andere $n-r+1$ Factoren enthält. Dieses zweite Product aus $n-r+1$ Factoren denke man sich nach der oben auseinandergesetzten Methode auf 2^{n-r} verschiedene Arten in die Summe zweier Quadrate verwandelt und an die Stelle jener Factoren in P gesetzt. Auf diese Weise erhält man 2^{n-r} verschiedene Darstellungen von P als ein Product von r Factoren, von welchen jeder die Form $\alpha^2+\beta^2$ hat. Die obige Eintheilung in zwei Gruppen kann aber offenbar auf $\binom{n}{r-1}$ verschiedene Arten ausgeführt werden, also ist die Gesammtzahl der Darstellungen von P als ein Product von r Factoren von der Form $\alpha^2+\beta^2$ gleich $\binom{n}{r-1}2^{n-r}$. Da aber r alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ bezeichnen kann, so sieht man, dass ein Product

$$(12)\quad P=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)\ldots(\alpha_{n-1}{}^2+\beta_{n-1}{}^2)$$

aus n Factoren von der Form $\alpha^2+\beta^2$ im Allgemeinen auf 2^{n-1} verschiedene Arten in derselben Form dargestellt werden kann;

auf $\binom{n}{1}2^{n-2}$ verschiedene Arten als Product von 2 Fact.,

„ $\binom{n}{2}2^{n-3}$ „ „ „ „ „ 3 „

„ $\binom{n}{3}2^{n-4}$ „ „ „ „ „ 4 „

. . . .

„ $\binom{n}{n-2}2$ „ „ „ „ „ $n-1$ „

von der Form $\alpha^2+\beta^2$. Als Product aus n Factoren dieser Art ist P gegeben, also ist die Gesammtzahl der Darstellungen gleich

$$\left\{2^{n-1}+\binom{n}{1}2^{n-2}+\binom{n}{2}2^{n-3}+\binom{n}{3}2^{n-4}+\ldots+\binom{n}{n-2}2\right\}+1$$
$$=\tfrac{1}{2}(3^n-2n+1).$$

So hat man für $n=3$ die oben in (16) aufgeführten vier Darstellungen des Productes $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)$ als Summe zweier vollständigen Quadrate, ferner folgende sechs Darstellungen in zwei Factoren dieser Form:

(18)

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2) &= (\alpha^2+\beta^2)\{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)^2\}\\
&= (\alpha^2+\beta^2)\{(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2\}\\
&= (\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)\{(\alpha\alpha_2-\beta\beta_2)^2+(\alpha\beta_2+\beta\alpha_2)^2\}\\
&= (\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)\{(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)^2+(\alpha\beta_2-\beta\alpha_2)^2\}\\
&= (\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)\{(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)^2+(\alpha\beta_1+\beta\alpha_1)^2\}\\
&= (\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)\{(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)^2+(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2\}\end{aligned}$$

im Ganzen eilf Formen für dieselbe Grösse.

Die hiermit gegebene Methode zur Umformung des Productes P, in welchem α, β, α_1, u. s. w. ganz allgemeine, in keiner Weise specialisirte Buchstabengrössen bezeichnen, ist, als algebraisches Theorem aufgefasst, in der Analysis und ihren Anwendungen oftmals von Nutzen.

Wir gehen nun über zur Erörterung der Modificationen und Einschränkungen, welche das vorhergehende algebraische Theorem erleidet, wenn die in dem Producte P vorkommenden Grössen α, β, α_1, u. s. w. ganze positive Zahlen bezeichnen. Man hat sich also von nun an unter P ein Product zu denken, aus n Factoren, von welchen jeder die Summe zweier gegebener Quadratzahlen ist.

§. 7.

Wenn α, β, α_1, u. s. w. gegebene ganze positive Zahlen bezeichnen, so hat man sich, da aus den Gleichungen (10) folgt:

(19)

$$\theta = \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha},\quad \theta_1 = \operatorname{Arctg}\frac{\beta_1}{\alpha_1},\quad \theta_2 = \operatorname{Arctg}\frac{\beta_2}{\alpha_2},\ldots\ \theta_{n-1} = \operatorname{Arctg}\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}},$$

auch unter $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ ganz bestimmte Zahlwerthe zu denken, und Θ bezeichnet alsdann irgend eine der algebraischen Summen, welche man aus den n bestimmten Zahlwerthen $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ durch verschiedene Auswahl der Vorzeichen erhalten kann. Aus den vorhergehenden Betrachtungen hat sich ergeben, dass man für die Functionen $F(\alpha, \beta)$, $f(\alpha, \beta)$ 2^{n-1} verschiedene Werthpaare erhält, weil sich aus den n Grössen $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ im Allgemeinen 2^{n-1} numerisch verschiedene (d. h. dem absoluten Werthe nach verschiedene) Summen bilden lassen. Im Allgemeinen ist diess allerdings richtig, wenn aber $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ bestimmte Zahlwerthe sind, so kann der Fall eintreten, dass die Anzahl der numerisch verschiedenen Summen kleiner als 2^{n-1} ist. Alsdann ist auch die Anzahl der Werthpaare für $F(\alpha, \beta)$, $f(\alpha, \beta)$ geringer als 2^{n-1}, mithin auch die Anzahl der Zerfällungen der Factorenfolge P in die Summe zweier Quadratzahlen geringer als 2^{n-1}. — Der Fall, dass die Anzahl der numerisch verschiedenen Werthe von Θ geringer als 2^{n-1} ist, wird namentlich dann eintreten, wenn irgend eine algebraische Summe mehrerer der Zahlwerthe $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ der Null gleich wird. Nehmen wir an, es wäre

$$(20)\qquad \theta_\mu + \theta_\nu + \ldots + \theta_x = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(20)\qquad \operatorname{Arctg}\frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu} + \operatorname{Arctg}\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} + \ldots + \operatorname{Arctg}\frac{\beta_x}{\alpha_x} = 0,$$

und irgend eine algebraische Summe der übrigen θ gleich Θ', alsdann wären in jedem anderen Falle:

$$\theta_\mu+\theta_\nu+\ldots+\theta_x+\Theta' \text{ und } \theta_\mu+\theta_\nu+\ldots+\theta_x-\Theta'$$

offenbar zwei numerisch verschiedene algebraische Summen Θ, so aber schmelzen sie zu $+\Theta'$ und $-\Theta'$ zusammen und sind nur mehr im Zeichen verschieden. Denkt man sich zu dem Producte $(\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\ldots(\alpha_x^2+\beta_x^2)$, auf welches sich die Gleichung (20) bezieht und welches offenbar ein Factor von P ist, — in der Absicht, es in die Summe zweier Quadratzahlen zu zerlegen, — die zugehörigen Functionen $F(\alpha,\beta)$, $f(\alpha,\beta)$ gebildet; sie seien $\Phi(\alpha,\beta)$, $\varphi(\alpha,\beta)$, so gibt die erste der Gleichungen (15) in Verbindung mit jener (20):

$$\frac{\Phi(\alpha,\beta)}{\varphi(\alpha,\beta)}=0,$$

also

$$\Phi(\alpha,\beta)=0, \tag{21}$$

und es ist:

$$(\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\ldots(\alpha_x^2+\beta_x^2)=\{\varphi(\alpha,\beta)\}^2,$$

d. h. die gegebene Factorenfolge P wird weniger als 2^{n-1} verschiedene Zerfällungen in die Summe zweier Quadratzahlen gestatten, wenn es unter den Factoren $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha_1^2+\beta_1^2$, $\alpha_2^2+\beta_2^2,\ldots$, $\alpha_{n-1}^2+\beta_{n-1}^2$ solche $\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2$, $\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2,\ldots$, $\alpha_x^2+\beta_x^2$ gibt, deren Product, nach unserer Methode in seine verschiedenen Summen zweier Quadratzahlen zerlegt, Einmal $\Phi(\alpha,\beta)=0$ ergibt, so dass Eine dieser Zerfällungen nothwendig die Form α^2+0^2 hat.

So ist z. B.

$$\mathrm{Arctg}\tfrac{1}{2}+\mathrm{Arctg}\tfrac{2}{3}-\mathrm{Arctg}\tfrac{7}{4}=0,$$

folglich muss das Product $(1^2+2^2)(2^2+3^2)(4^2+7^2)$ unter seinen verschiedenen Zerfällungen in die Summe zweier Quadratzahlen nothwendig Eine von der Form α^2+0^2 enthalten. In der That findet man:

$$\begin{aligned}(1^2+2^2)(2^2+3^2)(4^2+7^2)&=(65)^2+0^2\\&=(39)^2+(52)^2\\&=(25)^2+(60)^2\\&=(33)^2+(56)^2,\end{aligned}$$

und das Product

$$(1^2+2^2)(2^2+3^2)(4^2+7^2)(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)\ldots.(\alpha_{n-1}{}^2+\beta_{n-1}{}^2)$$

wird daher nicht mehr in 2^{n-1} verschiedene Summen zweier Quadratzahlen zerlegt werden können.

§. 8.

Da die Werthe der Functionen $F(\alpha, \beta)$, $f(\alpha, \beta)$, respective die Zerfällungen der Zahl P, aus den Zahlen α, β, α_1, u. s. w. abgeleitet werden, so sieht man, dass die Anzahl und Beschaffenheit der Zerfällungen ebenfalls von den Zahlen α, β, α_1, u. s. w. abhängt. Lässt sich die Zahl P noch auf andere Arten als ein Product von n Zahlen von der Form $\alpha^2+\beta^2$ darstellen, so wird diese neue Form von P auch zu neuen Zerfällungen führen. — Das, was wir also bisher über die Anzahl und die Beschaffenheit der Zerfällungen des Products

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2)\ldots.(\alpha_{n-1}{}^2+\beta_{n-1}{}^2)$$

in die Summe zweier Quadratzahlen beibrachten und später noch beibringen werden, bezieht sich lediglich auf diese Factorenformel, in welcher α, β, α_1, u. s. w. ganz bestimmte Zahlen sind, von welchen die Form und die Anzahl der durch unsere Methode herstellbaren Zerfällungen in die Summe zweier Quadratzahlen abhängig ist.

So ist in dem letzten Beispiel das Product der drei Factoren gleich 4225, nun ist aber diese Zahl auch gleich $(1^2+2^2)(2^2+3^2)(1^2+8^2)$, und wenn man dieses Product zerlegt, so erhält man:

$$\begin{aligned}(1^2+2^2)(2^2+3^2)(1^2+8^2) &= (60)^2+(25)^2\\ &= (16)^2+(63)^2\\ &= \quad 0^2+(65)^2\\ &= (52)^2+(39)^2,\end{aligned}$$

unter welchen Zerfällungen jene $(16)^2+(63)^2$ neu ist. Die Zerfällung $(65)^2+0^2$ kommt wieder vor, weil

$$\text{Arctg}\,\tfrac{1}{2}-\text{Arctg}\,\tfrac{2}{3}+\text{Arctg}\,\tfrac{1}{8}=0$$

ist. Ebenso ist 4225 auch gleich $(2^2+3^2)(2^2+3^2)(3^2+4^2)$ und unsere Methode gibt:

$$\begin{aligned}(2^2+3^2)(2^2+3^2)(3^2+4^2) &= (63)^2+(16)^2\\ &= (33)^2+(56)^2\\ &= (39)^2+(52)^2\\ &= (39)^2+(52)^2,\end{aligned}$$

unter welchen Zerfällungen jene $(65)^2+0^2$ nicht mehr vorkommt. Die Zerfällung $(39)^2+(52)^2$ kommt zweimal vor, weil

$$\mathrm{Arctg}\,\tfrac{2}{3}-\mathrm{Arctg}\,\tfrac{2}{3}=0$$

ist, also $(2^2+3^2)(2^2+3^2)$, in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegt, eine Zerfällung von der Form α^2+0^2 aufweiset, folglich $(2^2+3^2)(2^2+3^2)(3^2+4^2)$ nicht auf vier verschiedene Arten in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegt werden kann.

Ferner ist $7225=(1^2+4^2)(13^2+16^2)$ und die Zerfällungsmethode gibt:

$$\begin{aligned}(1^2+4^2)(13^2+16^2)&=(51)^2+(68)^2\\&=(77)^2+(36)^2;\end{aligned}$$

da aber auch $7225=(3^2+4^2)(1^2+17^2)$, so erhält man auch:

$$\begin{aligned}(3^2+4^2)(1^2+17^2)&=(36)^2+(77)^2\\&=(84)^2+(13)^2,\end{aligned}$$

so dass man also in $(84)^2+(13)^2$ eine neue Zerfällung hat. Endlich ist auch $7225=(1^2+2^2)(17^2+34^2)$ und hierfür gibt unsere Methode:

$$\begin{aligned}(1^2+2^2)(17^2+34^2)&=(51)^2+(68)^2\\&=(85)^2+0^2;\end{aligned}$$

hier kommt die Zerfällung $(85)^2+0^2$ vor, weil

$$\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{2}-\mathrm{Arctg}\,\tfrac{17}{34}=0$$

ist.

Es wird nun auch einleuchten, dass zwar, wenn für mehrere Factoren $\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2$, $\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2$, ... $\alpha_x^2+\beta_x^2$ der Zahl P eine Gleichung wie

$$\mathrm{Arctg}\frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu}+\mathrm{Arctg}\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}+\ldots+\mathrm{Arctg}\frac{\beta_x}{\alpha_x}=0 \tag{20}$$

besteht, nothwendig

$$(\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\ldots(\alpha_x^2+\beta_x^2)=\{\varphi(\alpha,\beta)\}^2$$

gleich einem vollständigen Quadrate sein muss, welches letztere also auch ein Factor von P ist, und dass demnach die Anzahl der durch unsere Methode herstellbaren Zerfällungen der Zahl P in die Summe zweier Quadratzahlen kleiner als 2^{n-1} ist; — man darf aber nicht umgekehrt aus dem Vorhandensein eines quadratischen Factors, gebildet aus mehreren Factoren $\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2$, $\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2$,.... $\alpha_x^2+\beta_x^2$ in P, auf eine Verringerung der Anzahl der Zerfällungen

schliessen; über eine solche Verringerung entscheidet lediglich das Bestehen der Gleichung (22), oder, was dasselbe ist, das Vorhandensein einer Form wie α^2+0^2 in den Zerfällungen des Productes

$$(\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\ldots.(\alpha_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2).$$

§. 9.

Hiermit wäre Eine Ursache der Verringerung der Anzahl der Zerfällungen der Zahl P in die Summe zweier Quadratzahlen und ihr Kennzeichen aufgedeckt. Aber das Identischwerden mehrerer algebraischer Summen Θ ist nicht die alleinige Ursache des Identischwerdens mehrerer Zerfällungen, sondern es kann zwei numerisch verschiedene Werthe von Θ, Θ_1, Θ_2 geben, welche, in die Gleichungen (15) eingesetzt,

$$(\varDelta)\begin{cases}\dfrac{\mathrm{tg}^2\Theta_1}{1+\mathrm{tg}^2\Theta_1}P=\{F(\alpha,\beta)\}^2, & \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\Theta_1}P=\{f(\alpha,\beta)\}^2,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{tg}^2\Theta_2}{1+\mathrm{tg}^2\Theta_2}P=\{f(\alpha,\beta)\}^2, & \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\Theta_2}P=\{F(\alpha,\beta)\}^2\end{cases}$$

ergeben, so dass man daraus im ersten Falle die Zerfällung $\{F(\alpha,\beta)\}^2+\{f(\alpha,\beta)^2\}$ und im zweiten Falle die damit identische Zerfällung $\{f(\alpha,\beta)\}^2+\{F(\alpha,\beta)\}^2$ erhält. Suchen wir aus den vorhergehenden Gleichungen die Beschaffenheit solcher zwei Werthe wie Θ_1 und Θ_2 zu ermitteln. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathrm{tg}^2\Theta_1}{1+\mathrm{tg}^2\Theta_1}=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\Theta_2},\quad \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\Theta_1}=\frac{\mathrm{tg}^2\Theta_2}{1+\mathrm{tg}^2\Theta_2},$$

aus welchen durch Division unmittelbar

$$\mathrm{tg}^2\Theta_1=\mathrm{ctg}^2\Theta_2$$

hervorgeht. Da dieser Werth von $\mathrm{tg}^2\Theta_1$, in die beiden vorhergehenden Gleichungen eingesetzt, beide zu identischen Gleichungen macht, so sind diese nicht wesentlich von einander verschieden und werden durch die letzte Gleichung, oder durch die folgende:

$$\mathrm{tg}\,\Theta_1\,\mathrm{tg}\,\Theta_2=\pm 1,$$

vollkommen ersetzt. Aus dieser folgt aber:

$$\Theta_1\pm\Theta_2=\frac{\pi}{2},$$

und wenn man sich die beiden Werthe Θ_1 und Θ_2, welche zwei numerisch verschiedene algebraische Summen der n Grössen

θ, θ_1, $\theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ sind, unter einander geschrieben denkt, so sieht man sogleich, dass sich in $\Theta_1 \pm \Theta_2$ die θ mit gleichen Zeichen verdoppeln, die θ mit ungleichen Zeichen aufheben, und man wird nothwendig zu einer Gleichung von der Form

$$2\theta_\mu + 2\theta_\nu + \ldots + 2\theta_x = \frac{\pi}{2},$$

oder zu jener:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &\theta_\mu + \theta_\nu + \ldots + \theta_x = \frac{\pi}{4}, \\ &\mathrm{Arctg}\,\frac{\beta_\mu}{\alpha_\mu} + \mathrm{Arctg}\,\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} + \ldots + \mathrm{Arctg}\,\frac{\beta_x}{\alpha_x} = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right.$$

gelangen müssen, d. h. der durch die Gleichungen (Δ) ausgesprochene Fall wird dann eintreten, wenn die algebraische Summe einiger der Zahlwerthe θ, θ_1, $\theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ gleich $\frac{\pi}{4}$ wird. Denkt man sich nun zu dem Producte $(\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\ldots(\alpha_x^2+\beta_x^2)$, auf welches sich die Gleichung (22) bezieht, um es in die Summe zweier Quadratzahlen zu zerlegen, die zugehörigen Werthpaare für $F(\alpha, \beta)$, $f(\alpha, \beta)$ gebildet; sie seien $\Phi(\alpha, \beta)$, $\varphi(\alpha, \beta)$, so gibt die erste der Gleichungen (15) in Verbindung mit jener (22) unmittelbar:-

$$\frac{\Phi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = 1,$$

also

$$(23) \qquad \Phi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta).$$

und es ist

$$(24) \quad (\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2)(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)\ldots(\alpha_x^2+\beta_x^2) = \{\varphi(\alpha, \beta)\}^2 + \{\varphi(\alpha, \beta)\}^2,$$

d. h. die auseinandergesetzte Methode wird für die Zahl P weniger als 2^{n-1} verschiedene Zerfällungen in die Summe zweier Quadratzahlen ergeben, wenn es unter den Factoren $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha_1^2+\beta_1^2$, $\alpha_2^2+\beta_2^2, \ldots \alpha_{n-1}^2+\beta_{n-1}^2$ solche $\alpha_\mu^2+\beta_\mu^2$, $\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2, \ldots \alpha_x^2+\beta_x^2$ gibt, deren Product, nach derselben Methode in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegt, Einmal $\Phi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ ergibt, so dass Eine dieser Zerlegungen nothwendig die Form $\alpha^2+\alpha^2$ hat.

Es ist bekanntlich

$$\mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{2} + \mathrm{Arctg}\,\tfrac{1}{5} + \mathrm{Artg}\,\tfrac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

folglich muss das Product $(1^2+2^2)(1^2+5^2)(1^2+8^2)$, nach obiger Methode auf seine verschiedenen Arten in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegt, darunter nothwendig eine Form wie $\alpha^2+\alpha^2$ aufweisen. Man findet in der That:

$$\begin{aligned}(1^2+2^2)(1^2+5^2)(1^2+8^2) &= (65)^2+(65)^2\\ &= (13)^2+(91)^2\\ &= (35)^2+(85)^2\\ &= (47)^2+(79)^2,\end{aligned}$$

und es lässt sich daher das Product

$$(1^2+2^2)(1^2+5^2)(1^2+8^2)(\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2)\ldots.(\alpha_{n-1}{}^2+\beta_{n-1}{}^2)$$

durch obige Methode nicht in 2^{n-1} verschiedene Summen zweier Quadratzahlen zerfällen. Das Product der vorhergehenden drei Factoren ist gleich $2(13)^2$, dieses ist aber auch gleich $(1^2+5^2)(2^2+3^2)(3^2+4^2)$. Zerlegt man diese Factorenfolge, so erhält man:

$$\begin{aligned}(1^2+5^2)(2^2+3^2)(3^2+4^2) &= (91)^2+(13)^2\\ &= (79)^2+(47)^2\\ &= (23)^2+(89)^2\\ &= (13)^2+(91)^2,\end{aligned}$$

also keine Zerfällung von der Form $\alpha^2+\alpha^2$. — Die Zerfällung $(91)^2+(13)^2$ kommt zweimal vor, weil

$$\text{Arctg}\,\tfrac{3}{2}-\text{Arctg}\,\tfrac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$$

ist, also das Product $(1^2+5^2)(2^2+3^2)$ unter seinen zwei Zerfällungen Eine von der Form $\alpha^2+\alpha^2$ hat.

Ebenso muss, weil

$$\text{Arctg}\,\tfrac{1}{2}+\text{Arctg}\,\tfrac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

ist, eine der zwei Zerfällungen des Products $(1^2+2^2)(1^2+3^2)$ von der Form $\alpha^2+\alpha^2$ sein, und man findet auch:

$$\begin{aligned}(1^2+2^2)(1^2+3^2) &= 5^2+5^2,\\ &= 1^2+7^2.\end{aligned}$$

§. 10.

So hätten wir nun auch die zweite Ursache der Verringerung der Anzahl der Zerfällungen der Zahl P in die Summe zweier

Quadratzahlen sammt ihrem Kennzeichen gefunden, und da aus der Natur der Sache hervorgeht, dass weitere Ursachen einer Verringerung nicht existiren, so können wir, das obige algebraische Theorem entsprechend modificirend, folgenden Satz aussprechen:

Bezeichnen $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha_1^2+\beta_1^2$, $\alpha_2^2+\beta_2^2, \dots \alpha_{n-1}^2+\beta_{n-1}^2$ n ganze Zahlen, von welchen jede die Summe zweier Quadratzahlen ist, so bilde man aus diesen alle möglichen Producte zu $1, 2, 3, \dots n-1$ Factoren und zerlege diejenigen dieser Producte, welche vollständige Quadrate oder das Doppelte vollständiger Quadrate sind, nach der obigen Methode auf ihre verschiedenen Arten in die Summe zweier Quadratzahlen; finden sich unter diesen Zerfällungen keine von der Form α^2+0^2 oder $\alpha^2+\alpha^2$, so lässt sich das Product

$$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)\dots(\alpha_{n-1}^2+\beta_{n-1}^2)$$

nach der auseinandergesetzten Methode auf 2^{n-1} verschiedene Arten als die Summe zweier Quadratzahlen darstellen;

auf $\binom{n}{1}2^{n-2}$ verschied. Arten als Product von 2 Factoren

„ $\binom{n}{2}2^{n-3}$ „ „ „ „ „ 3 „

„ $\binom{n}{3}2^{n-4}$ „ „ „ „ „ 4 „

. . . .

„ $\binom{n}{n-2}2$ „ „ „ „ „ $n-1$ „

von der Form $\alpha^2+\beta^2$. Die Gesammtheit aller Darstellungen ist alsdann gleich $\frac{1}{2}(3^n-2n+1)$.

Wenden wir, um ein vollständiges Beispiel zu geben, die Zerfällungsmethode auf die aus den vier Factoren 1^2+2^2, 3^2+4^2, 5^2+6^2, 7^2+8^2 bildbaren Producte an, so ergibt sich:

$$(1^2+2^2)(3^2+4^2)=2^2+11^2=5^2+10^2,$$

$$(1^2+2^2)(5^2+6^2)=4^2+17^2=7^2+16^2,$$

$$(1^2+2^2)(7^2+8^2)=6^2+23^2=9^2+22^2,$$

$$(3^2+4^2)(5^2+6^2)=2^2+39^2=9^2+38^2,$$

$$(3^2+4^2)(7^2+8^2)=4^2+53^2=11^2+52^2,$$

$$(5^2+6^2)(7^2+8^2)=2^2+83^2=13^2+82^2.$$

$$\begin{aligned}
(1^2+2^2)\;(3^2+4^2)\;(5^2+6^2) &= 20^2+85^2,\\
&= 56^2+67^2,\\
&= 43^2+76^2,\\
&= 35^2+80^2,\\
&= (1^2+2^2)(2^2+39^2),\\
&= (1^2+2^2)(9^2+38^2),\\
&= (3^2+4^2)(4^2+17^2),\\
&= (3^2+4^2)(7^2+16^2),\\
&= (5^2+6^2)(4^2+\;7^2),\\
&= (5^2+6^2)(1^2+\;8^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1^2+2^2)\;(3^2+4^2)\;(7^2+8^2) &= 30^2+115^2,\\
&= 74^2+\;93^2,\\
&= 61^2+102^2,\\
&= 45^2+110^2,\\
&= (1^2+2^2)\;(4^2+53^2),\\
&= (1^2+2^2)(11^2+52^2),\\
&= (3^2+4^2)\;(6^2+23^2),\\
&= (3^2+4^2)\;(9^2+22^2),\\
&= (7^2+8^2)\;(4^2+\;7^2),\\
&= (7^2+8^2)\;(1^2+\;8^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1^2+2^2)\;(5^2+6^2)\;(7^2+8^2) &= \;56^2+177^2,\\
&= 108^2+151^2,\\
&= \;87^2+164^2,\\
&= \;79^2+168^2,\\
&= (1^2+2^2)\;(2^2+83^2),\\
&= (1^2+2^2)(13^2+82^2),\\
&= (5^2+6^2)\;(6^2+23^2),\\
&= (5^2+6^2)\;(9^2+22^2),\\
&= (7^2+8^2)\;(4^2+17^2),\\
&= (7^2+8^2)\;(7^2+16^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3^2+4^2)\;(5^2+6^2)\;(7^2+8^2) &= 194^2+367^2,\\
&= 289^2+298^2,\\
&= 257^2+326^2,\\
&= 241^2+338^2,\\
&= (3^2+4^2)\;(2^2+83^2),\\
&= (3^2+4^2)(13^2+82^2),\\
&= (5^2+6^2)\;(4^2+53^2),\\
&= (5^2+6^2)(11^2+52^2),\\
&= (7^2+8^2)\;(2^2+39^2),\\
&= (7^2+8^2)\;(9^2+38^2).
\end{aligned}$$

$$(1^2+2^2)(3^2+4^2)(5^2+6^2)(7^2+8^2)$$

$$\begin{aligned}
&=(5^2+6^2)(7^2+8^2)\ (2^2+11^2),\\
&=(5^2+6^2)(7^2+8^2)\ (5^2+10^2),\\
&=(3^2+4^2)(7^2+8^2)\ (4^2+17^2),\\
&=(3^2+4^2)(7^2+8^2)\ (7^2+16^2),\\
&=(3^2+4^2)(5^2+6^2)\ (6^2+23^2),\\
&=(3^2+4^2)(5^2+6^2)\ (9^2+22^2),\\
&=(1^2+2^2)(7^2+8^2)\ (2^2+39^2),\\
&=(1^2+2^2)(7^2+8^2)\ (9^2+38^2),\\
&=(1^2+2^2)(5^2+6^2)\ (4^2+53^2),\\
&=(1^2+2^2)(5^2+6^2)(11^2+52^2),\\
&=(1^2+2^2)(3^2+4^2)\ (2^2+83^2),\\
&=(1^2+2^2)(3^2+4^2)(13^2+82^2),\\
&=(7^2+8^2)\ (20^2+85^2),\\
&=(7^2+8^2)\ (56^2+67^2),\\
&=(7^2+8^2)\ (43^2+76^2),\\
&=(7^2+8^2)\ (35^2+80^2),\\
&=(5^2+6^2)\ (30^2+115^2),\\
&=(5^2+6^2)\ (74^2+93^2),\\
&=(5^2+6^2)\ (61^2+102^2),\\
&=(5^2+6^2)\ (45^2+110^2),\\
&=(3^2+4^2)\ (56^2+177^2),\\
&=(3^2+4^2)(108^2+151^2),\\
&=(3^2+4^2)\ (87^2+164^2),\\
&=(3^2+4^2)\ (79^2+168^2),\\
&=(1^2+2^2)(194^2+367^2),\\
&=(1^2+2^2)(289^2+298^2).\\
&=(1^2+2^2)(257^2+326^2),\\
&=(1^2+2^2)(241^2+338^2),\\
&=\ 21^2+928^2,\\
&=144^2+917^2,\\
&=188^2+909^2,\\
&=280^2+885^2,\\
&=307^2+876^2,\\
&=395^2+840^2,\\
&=435^2+820^2,\\
&=540^2+755^2.
\end{aligned}$$

VIII.

Discussion der Gleichung vom vierten Grade in Bezug auf den Sturmschen Satz *).

Von

Herrn Dr. J. F. König,

Professor am Kneiphöf'schen Gymnasio zu Königsberg i. Pr.

---

§. 1.

Den Sturmschen Satz, den sein Erfinder zum ersten Male im Bulletin des sciences math., phys. et chem. par Ferussac Bd. 11. S. 419 ff., doch ohne Beweis mitgetheilt hat, hat Crelle in seinem Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 13. S. 133 ff. bewiesen und seine Anwendung auf die Gleichungen des zweiten und dritten Grades gegeben. Bezeichnet man mit ihm die Gleichung vom vierten Grade, Kürze halber ohne zweites Glied, mit Fx, die auf bekannte Weise **) abgeleiteten Hilfsfunktionen mit F_1x, F_2x, F_3x, F_4 und die Reihe derjenigen Glieder allein, die in den Grössen Fx, F_1x u. s. w. die höchste Potenz von x enthalten, mit $[x]$, so ist die Anzahl der negativen Wurzeln gleich dem Unterschiede der Anzahl der Zeichenwechsel in den Reihen $[-\infty]$ und (0), und die Anzahl der positiven Wurzeln gleich dem Unterschiede der Zeichenwechsel in den Reihen (0) und $[+\infty]$.

Die Funktionenreihe ist nun für die Gleichung $x^4+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ folgende: ***)

---

*) Auszug aus einem von mir verfassten Programme. K.

**) Archiv Bd. 31. S. 222.

***) Diese Ausdrücke sind von Crelle a. a. O. S. 143. schon mitgetheilt, jedoch steht dort beide Male $(\alpha+12\gamma)$ statt $(\alpha^2+12\gamma)$, und F_3x

$Fx = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$

$F_1 x = 4x^3 + 2\alpha x + \beta,$

$F_2 x = -(2\alpha x^2 + 3\beta x + 4\gamma),$

$F_3 x = -\{9\beta^2 + 2\alpha(\alpha^2 - 4\gamma)\} x - \beta(\alpha^2 + 12\gamma) = -Px - \beta(\alpha^2 + 12\gamma).$

$F_4 = 16\gamma(\alpha^2 - 4\gamma)^2 - \beta^2\{27\beta^2 + 4\alpha(\alpha^2 - 36\gamma)\} = Q;$

also:

	Fx	F_1x	F_2x	F_3x	F_4
$[-x] =$	$+$	$-$	$-\alpha$	$+P$	$+Q$
$(0) =$	$+\gamma$	$-\beta$	$-\gamma$	$-\beta(\alpha^2 + 12\gamma)$	$+Q$
$[+x] =$	$+$	$+$	$-\alpha$	$-P$	$+Q$

§. 2.

Da das Verfahren, diese abgeleiteten Funktionen zu erhalten, dasselbe ist, welches anzuwenden ist, um die gleichen Wurzeln zu entdecken, so mag über dieselben hier kurz Folgendes angeführt werden. Die Gleichung hat für $Q = 0$ zwei gleiche Wurzeln, die sich aus $F_3 x = 0$ ergeben; heisst die zweimal vorkommende a, so ist:

$$1)\quad a = -\frac{\beta(\alpha^2 + 12\gamma)}{9\beta^2 + 2\alpha(\alpha^2 - 4\gamma)},$$

also, wenn man die ungleichen mit b und $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet:

$$2)\quad b = -a \pm i\sqrt{2a^2 + \alpha},$$

welche für α negativ und $\overline{\gtrless}\, 2a^2$ reell werden. Da allgemein, wenn die reellen c und d, die imaginären $-\frac{c+d}{2} \pm ei$ heissen,

$$e = \sqrt{\frac{\gamma}{cd} - \left(\frac{c+d}{2}\right)^2}$$

ist, so können in unserm Falle die ungleichen auch geschrieben werden:

$$3)\quad b = -a \pm i\sqrt{\frac{\gamma}{a^2} - a^2}.$$

---

ist $= P$ gesetzt, was nicht sein darf, wenn in den Reihen $[-x]$ und $[+x]$ P stehen bleiben soll.

Aus beiden Werthen für b erhält man:

$$4)\quad a^2 = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 12\gamma}}{6},$$

woraus sogleich erhellet, dass gleiche Wurzeln nicht existiren können, wenn α positiv und γ negativ, auch nicht wenn α und γ negativ und zugleich $12\gamma > \alpha^2$; ferner dass für ein positives γ der Wurzelgrösse nur das positive Zeichen zu geben ist. Für ein negatives γ, in welchem Falle für ein mögliches a auch α negativ sein muss und zugleich $\alpha^2 > 12\gamma$ ($\alpha^2 = 12\gamma$ giebt drei gleiche Wurzeln), ist die Wurzelgrösse $(\pm)$, je nachdem a, d. i.

$$\frac{\beta(\alpha^2 - 12\gamma)}{2\alpha(\alpha^2 + 4\gamma) - 9\beta^2} \gtrless \sqrt{\frac{\alpha}{6}},$$

wo für α und γ die positiven Werthe zu setzen sind.

Noch mag bemerkt werden, dass für $a^2 \gtrless \frac{\alpha}{6}$, d. i. für $(\pm)$ der Wurzelgrösse, die gleiche Wurzel $\binom{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ ist als die ungleiche mit demselben Zeichen. Denn für die gleiche a heisst die ungleiche mit demselben Zeichen nach 3), da γ negativ ist,

$$b = -a + \sqrt{\frac{\gamma}{a^2} + a^2} = -a + \sqrt{\alpha - 2a^2}$$

(wo α positiv), wenn man für γ den Werth aus 4) substituirt. Aber wegen $\alpha^2 \gtrless 6a^2$ ist $\alpha = 6a^2 \pm \delta$, wo δ eine positive Grösse bedeutet, also

$$b = -a + \sqrt{4a^2 \pm \delta}, \text{ d. i. } \gtrless a.$$

Das Zeichen von a selbst, nach 4) berechnet, ergiebt sich erst §. 6. F.

Ist auch $F_3 x = 0$, was nur möglich ist, wenn

$$1)\ \beta = 0 \text{ und } \alpha^2 - 4\gamma = 0 \text{ oder}$$
$$2)\ \alpha^2 + 12\gamma = 0 \text{ und } 27\beta^2 + 8\alpha^3 = 0,$$

so ist im ersten Falle aus $F_2 x = 0$:

$$a = \pm\sqrt{-\frac{2\gamma}{\alpha}} \text{ (nur möglich für ein negatives } \alpha, \text{ da } \gamma \text{ positiv)},$$

$$= \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt[4]{+\gamma}, \text{ für } \alpha \text{ negativ},$$

$$= \pm\sqrt[4]{-\gamma}, \text{ für } \alpha \text{ positiv},$$

und da dieses Wurzeln für F_1x, so hat Fx zwei Paar gleiche Wurzeln.

Im zweiten Falle müssen α und γ negativ sein; aus

$$F_2x = (x + \frac{3\beta}{4\alpha})^2 = 0$$

ist:

$$a = -\frac{3\beta}{4\alpha} = +\sqrt{-\frac{\alpha}{6}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\beta} = +\sqrt[4]{-\frac{\gamma}{3}}.$$

Diese Wurzel enthält F_1x zweimal, also Fx dreimal, die ungleiche ist $b = -3a$.

§. 3.

Da die Aenderung des Zeichens von β nur das Zeichen der Wurzeln ändert, so kann in der folgenden Betrachtung β immer positiv gelassen werden, so dass nur vier Fälle zu unterscheiden bleiben, nämlich I. α und γ sind $+$; II. α ist $+$, γ $-$; III. α ist $-$, γ $+$; IV. α und γ sind $-$. Die Relationen selbst zwischen den Coëfficienten enthalten nur die positiven Werthe.

I. α und γ sind positiv.

A. P und Q sind positiv.

In diesem Falle sind die Zeichen obiger Reihen folgende *):

	Fx	F_1x	F_2x	F_3x	F_4
$[-\infty] =$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(0) =$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$[+\infty] =$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

also hat die Gleichung, da jede Reihe zwei Zeichenwechsel enthält, keine reelle Wurzel. Es ist aber

Q positiv, wenn $\beta^2(27\beta^2 + 4\alpha^3) < 16\gamma\{9\alpha\beta^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)^2\}$, d. i. $27\beta^2 < 32\alpha^3$ für $\alpha^2 = 4\gamma$; $27\beta^4 < 16^2\gamma^3$ für $\alpha = 0$; endlich $Q = 16\gamma(\alpha^2 - 4\gamma)^2$, wenn $\beta = 0$;

P positiv, wenn: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha^2 = 4\gamma$; 3) $\alpha^2 > 4\gamma$ (hier kann auch $\beta = 0$ sein); 4) $\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 > 2\alpha(4\gamma - \alpha^2)$.

*) Kürze halber sind in der Folge diese Zeichenreihen nicht weiter hingesetzt.

B. P ist positiv, Q negativ.

Die Reihe $[-\infty]$ hat drei, die Reihen (0) und $[+\infty]$ haben jede einen Zeichenwechsel, also sind zwei Wurzeln negativ, zwei imaginär.

Q ist negativ, wenn $\beta^2(27\beta^2+4\alpha^3) > 16\gamma[9\alpha\beta^2+(\alpha^2-4\gamma)^2]$, d. i. $27\beta^2 > 32\alpha^3$, wenn $\alpha^2=4\gamma$; $27\beta^4 > 16^2\gamma^3$, wenn $\alpha=0$; endlich $Q=-4\gamma$ für $\alpha=\beta=0$.

P ist positiv wie bei A.

Für $\alpha^2 < 4\gamma$ und $9\beta^2=2\alpha(4\gamma-\alpha^2)$, d. h. $P=0$, ist F_3x das von x unabhängige Glied, also $Q=-\beta(\alpha^2+12\gamma)$. Jede der drei Reihen hat dann einen Zeichenwechsel, folglich die Gleichung keine reelle Wurzel. Dasselbe Resultat giebt $\alpha=\beta=0$, wodurch schon $F_2x=-4\gamma=Q$ wird.

C. P ist negativ, Q positiv.

Jede der Reihen hat zwei Zeichenwechsel, also die Gleichung keine reelle Wurzel.

P ist negativ, wenn $\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 < 2\alpha(4\gamma-\alpha^2)$.

Q ist positiv wie bei A.

D. P und Q sind negativ.

Dieser Fall kann nicht eintreten. Denn P ist nur negativ, wenn $4\gamma > \alpha^2$ und zugleich $9\beta^2 < 2\alpha(4\gamma-\alpha^2)$. Aus dem zweiten Ausdrucke folgt aber, wenn man quadrirt und $36\alpha^3\beta^2$ addirt:

$$3\beta^2(27\beta^2+12\alpha^3) < 4\alpha^2[9\alpha\beta^2+(4\gamma-\alpha^2)^2],$$

also auch, da $16\gamma > 4\alpha^2$,

$$3\beta^2(27\beta^2+12\alpha^3) < 16\gamma[9\alpha\beta^2+(4\gamma-\alpha^2)^2],$$

folglich um so mehr:

$$\beta^2(27\beta^2+12\alpha^3) < 16\gamma[9\alpha\beta^2+(4\gamma-\alpha^2)^2],$$

wofür Q positiv ist.

E. P ist positiv, $Q=0$.

Für $Q=0$, d. h. $\beta^2(27\beta^2+4\alpha^3)=16\gamma[9\alpha\beta^2+(4\gamma-\alpha^2)^2]$, müssen zwei, oder zwei Paar Wurzeln gleich sein. (§. 2.) Sind zwei gleich, so können diese nach B. nur negativ und die beiden andern imaginär sein; die paarweise gleichen, die nach §. 2., wo die Ausdrücke für die gleichen Wurzeln gegeben sind, $\beta=0$ er-

fordern und den Werth $\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}$ haben, sind für $+\alpha$ imaginär. **P** ist positiv, wenn:

1) $\alpha=0$, also, wegen $Q=0$, $27\beta^4=16^2\gamma^3$,

$$a=-\frac{4\gamma}{3\beta}=-\sqrt[3]{\frac{\beta}{4}}=-\sqrt[4]{\frac{\gamma}{3}}.$$

$$b=-a\pm a\sqrt{-2};$$

2) $\alpha^2=4\gamma$, also, wegen $Q=0$, $27\beta^4=32\alpha^3\beta^2$, d. h.

a) $\beta=0$: $a=\pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}=\pm\sqrt[4]{-\gamma}$,

b) $27\beta^2=32\alpha^3$: $a=-\frac{4\alpha^2}{9\beta}=-\frac{16\gamma}{9\beta}=-\sqrt{\frac{\alpha}{6}}$,

$$b=-a\pm i\sqrt{2a^2+\alpha}=-a\pm i\sqrt{\frac{\gamma}{a^2}-a^2};$$

3) $\alpha^2>4\gamma$;

4) $\alpha^2 \leq 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2>2\alpha(4\gamma-\alpha^2)$.

Der Fall $P=0$, d. h. $9\beta^2=2\alpha(4\gamma-\alpha^2)$, kann hier nicht eintreten. Denn dann wäre $Q=-\beta(\alpha^2+12\gamma)$ nur $=0$ für $\beta=0$, also, wegen $P=0$, entweder auch $\alpha=0$, und das geht nicht an, da für $\alpha=\beta=0$ nach B. alle Wurzeln ungleich imaginär sind, indem $Q=-4\gamma$; oder $\alpha^2=4\gamma$, was wieder gegen $\alpha^2<4\gamma$ streitet.

F. **P ist negativ,** $Q=0$.

Nach D. muss Q für ein negatives P positiv sein; es lässt sich aber auch leicht zeigen, dass die Ausdrücke, welche hier stattfinden müssten, unvereinbar sind. Nämlich wie bei D. müsste wegen des negativen **P**:

$$3\beta^2(27\beta^2+12\alpha^3)<16\gamma[9\alpha\beta^2+(4\gamma-\alpha^2)^2]$$

sein, und wegen $Q=0$:

$$16\gamma[9\alpha\beta^2+(4\gamma-\alpha^2)^2]=\beta^2(27\beta^2+4\alpha^3),$$

also $3\beta^2(27\beta^2+12\alpha^3)<\beta^2(27\beta^2+4\alpha^3)$, was nicht angeht.

Die Wurzeln sind also bei positiven Werthen von α und γ:

𝔄. sämmtlich imaginär

1) wenn $\beta^2(27\beta^2+4\alpha^2)<16\gamma[9\alpha\beta^2+(\alpha^2-4\gamma)^2]$, d. h. in speciellen Fällen, wenn $\beta=0$; $\alpha=\beta=0$;

$$27\beta^2 < 32\alpha^3 \text{ für } \alpha^2 = 4\gamma;$$

$$27\beta^4 < 16^2\gamma^3 \text{ für } \alpha = 0;$$

2) wenn $\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 = 2\alpha(4\gamma - \alpha^2)$.

𝔅. Zwei sind reell und negativ, zwei imaginär, wenn $\beta^2(27\beta^2 + 4\alpha^3) \geqq 16\gamma[9\alpha\beta^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)^2]$, d. h.

$$27\beta^2 \geqq 32\alpha^3 \text{ für } \alpha^2 = 4\gamma;$$

$$27\beta^4 \geqq 16^2\gamma^3 \text{ für } \alpha = 0.$$

§. 4.

II. α ist positiv, γ negativ.

Hier ist immer, auch für α oder $\beta = 0$, P positiv, Q negativ. Der Faktor $(\alpha^2 - 12\gamma)$ in der Reihe (0) ändert zwar sein Zeichen, je nachdem $\alpha^2 \gtrless 12\gamma$, und verschwindet für $\alpha^2 = 12\gamma$, aber die Anzahl der Zeichenwechsel bleibt immer zwei, mag auch in dem letzten Falle das fortfallende Glied $+0$ oder -0 genommen oder ganz fortgelassen werden. Die Anzahl der Zeichenwechsel in den drei Reihen $[-\infty]$, (0), $[+\infty]$ bleibt also immer resp. 3, 2, 1.

Für $\alpha = \beta = 0$, also $F_3 x = +4\gamma = Q$, sind die Zahlen für die Zeichenwechsel jener Reihen 2, 1, 0.

In allen Fällen sind also zwei Wurzeln imaginär und von den reellen ist die eine positiv, die andere negativ.

§. 5.

III. α ist negativ, γ positiv.

A. P und Q sind positiv.

Jede der drei Reihen giebt zwei Zeichenwechsel, also hat die Gleichung keine reelle Wurzel. Es ist aber

Q positiv, wenn $4[\alpha^3\beta^2 + 4\gamma(\alpha^2 - 4\gamma)^2] > 9\beta^2(3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$, d. i. $16^2\gamma^3 > 27\beta^4$ für $\alpha = 0$, $Q = 16\gamma(\alpha^2 - 4\gamma)^2$ für $\beta = 0$;

P positiv, wenn 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha^2 < 4\gamma$ (hier kann auch $\beta = 0$ sein).

B. P ist positiv, Q negativ.

Es hat $[-\infty]$ drei, (0) einen, $[+\infty]$ auch einen Zeichenwechsel, also die Gleichung zwei negative reelle Wurzeln.

Q ist negativ, wenn $4[\alpha^3\beta^2+4\gamma(\alpha^2-4\gamma)^2] < 9\beta^2(3\beta^2+16\alpha\gamma)$, d. i. $16^2\gamma^3 < 27\beta^4$ für $\alpha=0$,

$$Q = -\beta^2(27\beta^2+32\alpha^3) \text{ für } \alpha^2=4\gamma,$$
$$= -4\gamma \text{ für } \alpha=\beta=0;$$

P ist positiv, wenn 1) $\alpha=0$; 2) $\alpha^2=4\gamma$; 3) $\alpha^2<4\gamma$ ($\beta=0$ würde hier zwar P positiv geben, aber Q auch positiv, da dieses doch negativ sein soll); 4) $\alpha^2>4\gamma$ und zugleich $9\beta^2>2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$.

In dem Falle $\alpha^2 \geqq 4\gamma$ kann Q nicht positiv werden, da die drei Ausdrücke P und Q positiv und $\alpha^2 \geqq 4\gamma$ nicht zugleich bestehen können; es konnte also bei A. $\alpha^2 \geqq 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2>2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$ nicht vorkommen, indem dann zwar P positiv, aber Q negativ wird. Setzt man nämlich $\alpha^2=4\gamma+\delta$, wo δ eine positive Grösse bedeutet, also $4(\alpha^2-\delta)$ für 16γ, δ für $\alpha^2-4\gamma$, $9\delta-8\alpha^2$ für $\alpha^2-36\gamma$,

$$\text{in } P = 9\beta^2-2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$$
$$\text{und in } Q = 16\gamma(\alpha^2-4\gamma)^2-27\beta^4+2\alpha\beta^2(\alpha^2-36\gamma);$$

so erhält man:

$$Q = -\tfrac{1}{3}P^2-\tfrac{4}{3}(4\alpha^2-3\delta)(6\alpha\beta^2-\delta^2)$$
$$= -\tfrac{1}{3}P^2-\tfrac{4}{3}(\alpha^2+12\gamma)(6\alpha\beta^2-\delta^2).$$

Da aber P positiv sein soll, so ist $\beta^2>\dfrac{2\alpha\delta}{9}$, also

$$6\alpha\beta^2 > \tfrac{4}{3}\alpha^2\delta$$
$$> \tfrac{4}{3}\delta(4\gamma+\delta)$$

und

$$6\alpha\beta^2-\delta^2 > \frac{\delta}{3}(16\gamma+\delta),$$

folglich der Faktor $(6\alpha\beta^2-\delta^2)$ positiv und Q nur negativ, auch für $\delta=0$, übereinstimmend mit obigem $Q=-\beta^2(27\beta^2+32\alpha^3)$ für $\alpha^2=4\gamma$. Q wird noch negativ, nämlich $=-\beta(\alpha^2+12\gamma)$, wenn $P=0$, d. h. $\alpha^2>4\gamma$ und zugleich $9\beta^2=2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$. Die Zahlen

für die Zeichenwechsel in den drei Reihen sind hier 3, 1, 1, also ebenfalls zwei Wurzeln reell und negativ.

Der Fall endlich $\alpha=\beta=0$ ist schon §. 3. B. vorgekommen.

C. P ist negativ, Q positiv.

$[-\infty]$ hat vier, (0) zwei, $[+\infty]$ keinen Zeichenwechsel, also hat die Gleichung zwei positive und zwei negative reelle Wurzeln.

P ist negativ, wenn $\alpha^2 > 4\gamma$ und zugleich $9\beta^2 < 2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$,

Q positiv wie bei A.

D. P und Q sind negativ.

Zwei Wurzeln sind reell und negativ, denn $[-\infty]$ hat drei Zeichenwechsel, (0) und $[+\infty]$ jede einen.

P ist negativ wie bei C.

Q negativ wie bei B. Hier kann nicht $\beta=0$ sein, weil dadurch Q positiv wird.

E. P ist positiv, $Q=0$.

Die gleichen Wurzeln sind nach B. negativ.

$Q=0$ wenn $4[\alpha^3\beta^2+4\gamma(\alpha^2-4\gamma)^2] = 9\beta^2(3\beta^2+16\alpha\gamma)$;

P ist positiv, wenn:

1) $\alpha=0$, also wegen $Q=0$, $27\beta^4=16^2\gamma^3$;
2) $\alpha^2=4\gamma$, also wegen $Q=0$, $\beta^2(27\beta^2+32\alpha^3)=0$. Da dieser Gleichung nur durch $\beta=0$ genügt werden kann, so hat man nach §. 2. zwei Paar gleiche Wurzeln;
3) $\alpha^2<4\gamma$;
4) $\alpha^2>4\gamma$ und zugleich $9\beta^2>2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$, welcher Fall aber hier nicht eintreten kann, da er nach B. immer ein negatives Q giebt. Eben so wenig kann $P=0$, d. h. $9\beta^2=2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$ sein, weil dann $Q=-\beta(\alpha^2+12\gamma)$ nur $=0$ wird für $\beta=0$, also, wegen $P=0$, entweder $\alpha=0$, was nicht angeht, da für $\alpha=\beta=0$ $F_2x=-4\gamma=Q$, oder $\alpha^2-4\gamma=0$ gegen $\alpha^2>4\gamma$.

F. P ist negativ, $Q=0$.

Nach dem Sturmschen Satze fehlt hier die Entscheidung, ob die gleichen Wurzeln positiv oder negativ sind. Aber da für zwei positive gleiche Wurzeln $+a$, $+a$ und zwei negative $-b$, $-(2a-b)$ die Gleichung

$$x^4 - [2a^2 + (a-b)^2]\,x^2 + 2a(a-b)^2 x + (2a-b)\,a^2 b = 0$$

entsteht, so haben die gleichen Wurzeln mit β dasselbe Zeichen, d. h. hier das positive. Sind dagegen zwei gleiche Wurzeln negativ $-a$, $-a$, zwei imaginär $a \pm ci$, so heisst die Gleichung:

$$x^4 - (2a^2 - c^2)\,x^2 + 2ac^2 x + a^2(a^2 + c^2) = 0.$$

Wegen $\alpha^2 > 4\gamma$ (damit P negativ wird) müsste dann $c^2 > 8a^2$ sein, wodurch α positiv würde, was nicht sein soll. Die gleichen Wurzeln sind also nicht, wie man vielleicht nach der Vergleichung von C. mit D. erwarten könnte, negativ, sondern positiv.

Bei $-\alpha$ und $+\gamma$ sind also

𝔄. alle Wurzeln imaginär, wenn:

$\alpha^2 < 4\gamma$ und zugleich $4[\alpha^3\beta^2 + 4(\alpha^2 - 4\gamma)^2] > 9\beta^2(3\beta^2 + 16\alpha\gamma)$,

d. h. statt des Letztern in den besondern Fällen, wenn $\beta = 0$: $\alpha = \beta = 0$; $16^2\gamma^3 > 27\beta^3$ für $\alpha = 0$:

𝔅. zwei imaginär, zwei reell negativ, wenn:

$$4[\alpha^3\beta^2 + 4(\alpha^2 - 4\gamma)^2] \leqq 9\beta^2(3\beta^2 + 16\alpha\gamma),$$

und zwar muss die Ungleichheit schon stattfinden in den speciellen Fällen 1) $\alpha^2 = 4\gamma$; 2) $\alpha^2 > 4\gamma$, aber $9\beta^2 \geqq 2\alpha(\alpha^2 - 4\gamma)$. Für die Gleichheit ist $\alpha = 0$ oder $\alpha^2 < 4\gamma$;

ℭ. alle reell, zwei negativ, zwei positiv, wenn:

$$4[\alpha^3\beta^2 + 4(\alpha^2 - 4\gamma)^2] \geqq 9\beta^2(3\beta^2 + 16\alpha\gamma),$$

und zugleich $\alpha^2 > 4\gamma$, aber $9\beta^2 < 2\alpha(\alpha^2 - 4\gamma)$ oder im Falle der Gleichheit $\alpha^2 = 4\gamma$ und $\beta = 0$.

§. 6.

IV. α und γ sind negativ.

A. P und Q sind positiv.

P ist positiv für $9\beta^2 > 2\alpha(\alpha^2 + 4\gamma)$,

Q ist positiv für $4\alpha\beta^2(\alpha^2 + 36\gamma) > 27\beta^4 + 16\gamma(\alpha^2 + 4\gamma)^2$.

Aus diesen Werthen für P und Q folgt:

$$1)\quad \beta^2 = \frac{2\alpha(\alpha^2+12\gamma)}{9} + \delta,$$

$$2)\quad 4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma) = 27\beta^4 + 16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2 + \Delta,$$

wo δ und Δ nur positiv sein können. Setzt man den Werth von β^2 aus 1) in 2), so erhält man die Gleichung:

$$\delta^2 - \frac{8(12\gamma-\alpha^2)\alpha}{27}\delta = -\frac{4(\alpha^2+4\gamma)(12\gamma-\alpha^2)^2}{9.27} - \Delta,$$

also δ nur möglich, wenn

$$\frac{16(12\gamma-\alpha^2)^2\alpha^2}{27} \mathrel{\substack{=\\>}} \frac{4(\alpha^2+4\gamma)(12\gamma-\alpha^2)^2}{9.27} + \Delta,$$

d. h. wenn $\alpha^2 > 12\gamma$ *).

Aus P positiv ergiebt sich aber ferner:

$$81\beta^4 + 4\alpha^2(\alpha^2+4\gamma)^2 > 36\alpha\beta^2(\alpha^2+4\gamma),$$

also wenn man hier für den Fall, dass $\alpha^2 > 12\gamma$ sein sollte, links $12\gamma+\delta'$ für den Faktor α^2 setzt, rechts $8.36\alpha\beta^2 - 8.36\alpha\beta^2$ hinzufügt und nach einigen Umformungen durch 3 dividirt:

$$27\beta^4 + 16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2 > 4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma) + \tfrac{4}{3}\delta'[6\alpha\beta^2 - (\alpha^2+4\gamma)^2].$$

Nun folgt aus $9\beta^2 > 2\alpha(\alpha^2+4\gamma)$:

$$6\alpha\beta^2 > \tfrac{4}{3}\alpha^2(\alpha^2+4\gamma),$$

und aus $\alpha^2 > 12\gamma$:

$$\tfrac{4}{3}(\alpha^2+4\gamma) > (\alpha^2+4\gamma)^2,$$

also um so mehr $6\alpha\beta^2 > (\alpha^2+4\gamma)^2$, folglich der Faktor $[6\alpha\beta^2-(\alpha^2+4\gamma)^2]$ positiv und

$$27\beta^4 + 16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2 > 4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma),$$

wofür Q negativ ist. P und Q können also nicht zugleich positiv sein.

Ist $P=0$, d. h. $9\beta^2 = 2\alpha(\alpha^2+4\gamma)$, so wird $Q = -\beta(\alpha^2-12\gamma)$ positiv für $\alpha^2 < 12\gamma$. Die Anzahl der Zeichenwechsel 2, 1, 0 in den drei Reihen zeigt dann, dass die Gleichung eine positive und eine negative reelle Wurzel hat.

B. P ist positiv, Q negativ.

Auch hier mag, wie im §. 3., der Faktor $(\alpha^2-12\gamma)$ in der

*) Für $\alpha^2 = 12\gamma$ würde $Q = -\frac{1}{3}P^2$ sein. (§. 5. B.)



Reihe (0) positiv oder negativ oder auch ± 0, d. h. $\alpha^2 \gtreqless 12\gamma$, oder auch $\alpha = 0$ sein, die Anzahl der Zeichenwechsel bleibt 3, 2, 1.

P ist positiv wie bei A.;

Q negativ, wenn $4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma) < 27\beta^2 + 16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2$.

Für $P=0$, also $9\beta^2 = 2\alpha(\alpha^2+4\gamma)$, wird $Q = -\beta(\alpha^2-12\gamma)$ negativ, wenn $\alpha^2 > 12\gamma$. Die Anzahl der Zeichenwechsel bleibt dieselbe, also hat die Gleichung eine positive und eine negative reelle Wurzel.

C. P ist negativ, Q positiv.

Wie bei A. erhält man, wenn dort δ negativ gesetzt wird, dass $\alpha^2 > 12\gamma$ sein muss. Dasselbe lässt sich aber auch so zeigen. Sollte $\alpha^2 < 12\gamma$ sein, so setze man, wenn $12\gamma = \alpha^2 + \delta$, in $P = 9\beta^2 - 2\alpha(\alpha^2+4\gamma)$ und in $Q = 4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma) - 27\beta^2 - 16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2$ $4\alpha^2+3\delta$ für $(\alpha^2+36\gamma)$, $\frac{4}{3}(\alpha^2+\delta)$ für 16γ, $\frac{4\alpha^2+\delta}{3}$ für $(\alpha^2+4\gamma)$, und erhält:

$$Q = -\tfrac{1}{3}P^2 - \frac{4\delta}{27}[(4\alpha^2+\delta)^2 - 54\alpha\beta^2].$$

Da aber P negativ, so ist $2\alpha(\alpha^2+4\gamma) > 9\beta^2$, d. i.

$$\frac{2\alpha}{3}(4\alpha^2+\delta) > 9\beta^2 \quad \text{oder} \quad 4\alpha^2(4\alpha^2+\delta) > 54\alpha\beta^2,$$

also um so mehr $(4\alpha^2+\delta)^2 > 54\alpha\beta^2$, d. h. der Faktor

$$[(4\alpha^2+\delta)^2 - 54\alpha\beta^2]$$

ist positiv, mithin Q negativ. Für $\delta = 0$, d. h. $\alpha^2 = 12\gamma$, ist, wie schon bei A. bemerkt wurde, $Q = -\frac{1}{3}P^2$. Die Zeichenwechsel 4, 3, 0 deuten auf eine negative und drei positive reelle Wurzeln.

P ist negativ, wenn $9\beta^2 < 2\alpha(\alpha^2+4\gamma)$,

Q positiv wie bei A.

D. P und Q sind negativ.

Die Grösse $\beta^2(\alpha^2-12\gamma)$ in der Reihe (0) mag 0, positiv oder negativ sein, die Anzahl der Zeichenwechsel bleibt immer 3, 2, 1, so dass die Gleichung eine positive und eine negative reelle Wurzel hat.

P ist negativ wie bei C.,

Q negativ wie bei B.

E. P ist positiv, $Q=0$.

Aus A. folgt, wenn man $\varDelta=0$ setzt, dass Q für ein positives P negativ sein muss, also nicht $=0$ sein kann.

F. P ist negativ, $Q=0$.

P ist negativ wie bei C.

$Q=0$, wenn $4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma)=27\beta^4+16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2$.

Nach C. hat die Gleichung drei positive Wurzeln, von denen also zwei gleich sind. (§. 2.)

Ist $P=0$ und $\alpha^2=12\gamma$, also $27\beta^2=8\alpha^3$, so ist $F_3x=0$ und $F_2x=(x+\frac{3\beta}{4\alpha})^2$, woraus die in §. 2. angegebenen drei gleichen Wurzeln folgen.

Es sind also bei negativen Werthen von α und γ:

𝔄. zwei Wurzeln imaginär, eine positiv, eine negativ reell, wenn

$$27\beta^4+16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2>4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma),$$

wohin als besondere Fälle gehören:

$$\alpha=0;\quad \beta=0;\quad 9\beta^2=2\alpha(\alpha^2+4\gamma)\ \text{ aber }\ \alpha^2\gtrless 12\gamma;$$

$$\alpha^2=12\gamma\ \text{ aber }\ 27\beta^2\gtrless 8\alpha^3.$$

𝔅. Alle Wurzeln sind reell, und zwar drei positiv, eine negativ, wenn:

$$1)\quad 27\beta^2+16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2\leqq 4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma),$$

$$2)\quad \alpha^2=12\gamma\ \text{ und zugleich }\ 27\beta^2=8\alpha^3.$$

Lässt man die Fälle $\beta=0$ und $\alpha=\beta=0$, welche der Vollständigkeit wegen und um zu zeigen, dass der Sturmsche Satz auch für sie das Richtige giebt, mit aufgenommen worden, als bekannt fort, so giebt die Zusammenstellung der gewonnenen Resultate folgendes Täfelchen, welches aus den Coëfficienten auf die Beschaffenheit der Wurzeln schliessen lässt. Es zeigt sogleich, dass alle Wurzeln nur reell sein können, wenn α negativ, und alle imaginär, wenn γ positiv ist. Dass für ein negatives β die Wurzeln das entgegengesetzte Zeichen erhalten, wurde schon erwähnt.

		Anzahl der Wurzeln			Bedingungs-Ausdrücke. (α, β, γ sind immer positiv zu nehmen.)
α	β	posit.	negat.	imagin.	
+	+	,,	,,	4	1) $\beta^2(27\beta^2+4\alpha^3) < 16\gamma[9\alpha\beta^2+(\alpha^2-4\gamma)^2]$, d. i. $27\beta^2<32\alpha^3$ für $\alpha^2=4\gamma$; $27\beta^4<16^2\gamma^3$ für $\alpha=0$. 2) $\alpha^2<4\gamma$ und zugleich $9\beta^2=2\alpha(4\gamma-\alpha^2)$.
		,,	2	2	$\beta^2(27\beta^2+4\alpha^3) \geqq 16\gamma[9\alpha\beta^2+(\alpha^2+4\gamma)^2]$ . . . . (die reellen sind gleich). d. i. $27\beta^2>32\alpha^3$ für $\alpha^2=4\gamma$; $27\beta^4 \geqq 16^2\gamma^3$ für $\alpha=0$.
+	—	1	1	2	immer.
—	+	,,	,,	4	$4[\alpha^3\beta^2+4\gamma(\alpha^2-4\gamma)^2] > 9\beta^2+16\alpha\gamma$ und zugleich $\alpha^2<4\gamma$, d. i. $16^2\gamma^3>27\beta^4$ für $\alpha=0$.
		2	2	,,	$4[\alpha^3\beta^2+4\gamma(\alpha^2-4\gamma)^2] \geqq 9\beta^2(3\beta^2+16\alpha\gamma)$ . . . . . (die positiven sind gleich), und zugleich $\alpha^2>4\gamma$, aber $9\beta^2<2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$.
		,,	2	2	1) $4[\alpha^3\beta^2+4\gamma(\alpha^2-4\gamma)^2] \leqq 9\beta^2(3\beta^2+16\alpha\gamma)$ . . . . . . (die reellen sind gleich). 2) $\alpha^2=4\gamma$, 3) $\alpha^2>4\gamma$ aber $9\beta^2 \geqq 2\alpha(\alpha^2-4\gamma)$.
—	—	1	1	2	1) $27\beta^4+16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2 > 4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma)$, 2) $\alpha=0$, 3) $9\beta^2=2\alpha(\alpha^2+4\gamma)$ aber $\alpha^2 \gtrless 12\gamma$, 4) $\alpha^2=12\gamma$ aber $27\beta^2 \gtrless 8\alpha^3$.
		3	1	,,	1) $27\beta^4+16\gamma(\alpha^2+4\gamma)^2 \leqq 4\alpha\beta^2(\alpha^2+36\gamma)$ . . . . (zwei sind gleich). (hier ist immer $\alpha^2>12\gamma$), 2) $\alpha^2=12\gamma$ u. zugleich $27\beta^2=8\alpha^3$ (die drei sind gleich).

IX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Director Professor Dr. Strehlke zu Danzig.

1. **Wie hoch über der Horizontalen $AM=a$ (Taf. I. Fig. 7.) muss ein leuchtender Punkt C stehen, um eine in M befindliche kleine horizontale Fläche am stärksten zu beleuchten?**

Es sei J die Intensität des Lichtes in der Entfernung A, θ der Winkel, unter welchem das Licht die Fläche in M trifft, so ist in der Entfernung a die Intensität $=\frac{J}{a^2}(x-x^3)$, wenn $\sin\theta=x$, folglich für das Maximum $x^2=\frac{1}{3}$; die grösste Intensität selbst $=\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{J}{a^2}$. Um den dem Maximum entsprechenden Punkt C zu construiren, wird das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck MAD gezeichnet, $BM=a$ genommen und BC parallel AM.

2. **Aus einer mit dem Radius r beschriebenen Kreisfläche soll ein Sektor geschnitten werden, der als Mantel eines senkrechten Kegels den grössten Cubikinhalt umschliesst.**

Der Winkel am Centrum sei $=C$, $\cos\theta=\frac{C^0}{360^0}$, so ist der kubische Inhalt des Kegels $=\frac{1}{3}r^3.(\sin\theta-\sin\theta^3)\pi$, folglich für das Maximum $\sin\theta^2=\frac{1}{3}$, $\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $C=360^0.\sqrt{\frac{2}{3}}$; der kubische Inhalt $=\frac{2}{27}r^3.\sqrt{3}.\pi$.

3. **Der in die Kugel einbeschriebene senkrechte Kegel mit grösstem Mantel.**

Der Radius der Kugel sei $=r$, der Winkel, den ein vom Centrum nach einem beliebigen Punkte im Umfange der Basis des Kegels gezogener Radius mit dessen Axe bildet, sei $=\theta$, so ist die krumme Oberfläche F des Kegels, dividirt durch die Oberfläche S der Kugel, oder $\frac{F}{S}=\sin\frac{1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta^3$, folglich für das Maximum $\cos\theta=\frac{1}{3}$, $F=\frac{2}{9}\sqrt{3}.S$.

4. Wenn die Gesammtoberfläche des Kegels, d. h. Mantel und Basis, zusammen ein Maximum sein soll, und F' die Gesammtoberfläche bezeichnet, so ist

$$\frac{F'}{S} = \sin\tfrac{1}{2}\theta \,.\, \cos\tfrac{1}{2}\theta^2 \,.\, 2 \,.\, \sin(45^0 + \tfrac{1}{4}\theta)^2 = x + x^2 - x^3 - x^4,$$

$$\text{wenn } x = \sin\frac{\theta}{2}.$$

Für das Maximum ist $8x = 1 + \sqrt{17}$,

$$F' = \frac{(107 + 51\sqrt{17})}{512} \,.\, S.$$

5. Der kubische Inhalt des einbeschriebenen Kegels ist $= \frac{1}{3}r^3\pi \,.\, (1 - \cos\theta^2) \,.\, (1 + \cos\theta)$. Wenn $\cos\theta = \frac{1}{3}$, so findet das Maximum statt; der cubische Inhalt des grössten Kegels $= \frac{32}{81}r^3\pi$.

6. Der kubische Inhalt des grössten in die Kugel beschriebenen Cylinders $= \frac{4}{9}\sqrt{3} \,.\, r^3\pi$, $\cos\theta^2 = \frac{1}{3}$.

7. Der Mantel des grössten Cylinders $= 2r^2\pi$, wobei $\theta = 45^0$.

8. Die Gesammtoberfläche Q des einbeschriebenen Cylinders, dividirt durch $r^2\pi$, $= 2\sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta$, folglich für das Maximum $\tan 2\theta = -2$ und $\frac{Q}{r^2\pi} = 1 + \sqrt{5}$.

X.

Miscellen.

Einige neue Sätze über das rechtwinkelige Parallelepiped.

Von Herrn Professor Friedrich Mann zu Frauenfeld im Canton Thurgau.

1) Wir bezeichnen (Taf. I. Fig. 8.):

die Seitenkanten OA, OB und OC durch l_1, l_2 und l_3;

die Hauptdiagonale OO_1 durch d;

die Seitendiagonalen O_1A, O_1B, O_1C beziehungsweise durch d_1, d_2, d_3;

eine in O_1 auf OO_1 senkrecht errichtete Ebene durch E;
„ „ O „ OO_1 „ „ „ „ E_1;
die Abstände der Punkte A, B und C von E durch e_1, e_2, e_3;
„ „ „ „ A, B „ C „ E_1 „ $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$;
die Projektion des Dreiecks ABC auf E durch $A_1B_1C_1$;
die Winkel, welche OO_1 mit OA, OB und OC einschliesst, durch α, β und γ.

2) Das Dreieck ABC, welches die Seitendiagonalen des Parallelepipeds zu Seiten hat, ist stets spitzwinkelig.

3) Irgend zwei Gränzflächen der Pyramide $ABCO_1$ haben gegen diejenige Gränzfläche des Parallelepipeds, in welcher ihre Schnittlinie liegt, vollkommen übereinstimmende Neigung. (Z. B. CBA und O_1BA gegen $OBDA$.)

4) Die Diagonalebenen des Parallelepipeds halbiren diejenigen Flächenwinkel der Pyramide $ABCO_1$, durch deren Kanten sie gehen.

5) Der Mittelpunkt der Hauptdiagonale des Parallelepipeds ist zugleich der Mittelpunkt derjenigen Kugel, welche der Pyramide $ABCO_1$ einbeschrieben werden kann.

6) Es ist:

$$e_1 : e_2 : e_3 = \sin^2\alpha : \sin^2\beta : \sin^2\gamma,$$
$$\mathfrak{E}_1 : \mathfrak{E}_2 : \mathfrak{E}_3 = \cos^2\alpha : \cos^2\beta : \cos^2\gamma,$$
$$O_1A_1 : O_1B_1 : O_1C_1 = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

7) Ferner ist:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 2d$$

und

$$\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3 = d.$$

8) Aus e_1, e_2 und e_3 muss sich stets ein Dreieck construiren lassen.

9) O_1 ist der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$.

10) Der Kubikinhalt des Parallelepipeds stimmt überein mit dem Kubikinhalt desjenigen Prismas, welches das Dreieck aus e_1, e_2, e_3 zur Grundfläche und die Hauptdiagonale d zur Höhe hat.

11) Der Kubikinhalt der Pyramide $ABCO_1$ ist ein Drittel vom Kubikinhalt des Parallelepipeds.

12) Rechtwinkelige Parallelepipede sind gleich, wenn sie in der Summe und im Produkt der Entfernungen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$ übereinstimmen.

Den folgenden lehrreichen Brief des Herrn Dr. Lindman in Strengnäs in Schweden lasse ich vollständig abdrucken und danke Herrn Lindman verbindlichst für denselben. G.

Johanni Augusto Grunert
Christianus Fr. Lindman, Lector Strengnesensis, S. P. D.

Postquam novissimas ad Te, vir cel^e., litteras dedi, variis negotiis adeo distentus fui, vix ut tempus mihi fuerit Archivum Tuum, quoquo modo fieri potuit, cognoscendi et diligentior lectio in aliud tempus reservanda sit. Librum percurrens incidi in commentationem Cel^i Minding de integrali definito $\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}^n x}{x^m} dx$, quod ego abhinc octo omnis in Archivo tractavi. Ibi enuntiavi, integrale illud finitum non esse, nisi esset $n-m=$ numero pari positivo vel $=0$, et valores dedi, si res ita esset comparata. Cel^us Minding eosdem dedit valores, sed praeterea reperit, hoc integrale semper esse finitum, dummodo ne esset $m=1$ et $n=$ numero pari. Etiamsi in errorem quendam inciderim, eo tamen me consolor, quod hunc errorem illa via, qua ingressus eram, vix et ne vix quidem vitare potuisse mihi videor. Notissimum quidem est, quum integralia sint infinita, fieri tamen posse, ut differentia eorum sit finita; sed rarissime tamen videtur usu venire, ut series terminorum, qui in infinitum abeant, summam habeat finitam, atque ideo illa res mihi non venit in mentem. Verumtamen in commentario, cui in Actis Reg. Academiae Scient. Holmiensis locus datus est cujusque exemplum Tibi misi, proposui integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-Ax}\operatorname{Cos} ax - e^{-Bx}\operatorname{Cos} bx}{x} dx = \frac{1}{2} l \frac{B^2+b^2}{A^2+a^2}$, cujus ope ego quoque (positis A et $B=0$) formulam Cel^i Minding invenire potuissem, si hoc integrali usus essem. Cel^us Minding mentionem quoque fecit integralis $\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{x^2} dx$, cujus valorem in Archivo (Tom. XVI. pag. 101.) ego primus, quod equidem sciam, dedi quodque caussa fuit, cur integrale generalius quaererem.

Tomum XVI. evolvens demonstrationem Tuam theorematis Lambertini de sectoribus parabolicis quadrandis e memoria prope elapsam offendi. Theorema illud, quod, ut censes, Astronomis quam Geometris familiarius videtur et haud scio an necessitate lateris recti exterminandi ortum sit, alibi aliter demonstratum vidi. Bohnenberger in libro suo de Astronomia (Tübingen 1811) demonstrationem omnium brevissimam dedit, quae tamen, ut in sectionibus conicis Simsonii nixa, his temporibus apta non vide-

tur, quum praesertim haud pauci librum Simsonii ignorent. Quum vero aliae, quas vidi, demonstrationes non satis probabiles videantur, huic rei optime consuluisti, quod novam eamque accuratam pulcherrimi hujus theorematis demonstrationem dedisti. Quamquam coordinatae polares ad quadraturam sectorum accommodatissimae mihi semper sunt visae, cui rei indicio est commentariolus meus Archivo (Tom. XXVI.) insertus, ejusmodi tamen coordinatis abstinendum orbitror, si quis, viam a Te in prooemio monstratam sequens, sectorem parabolicum sine ope calculi integralis quadrare velit. Praeter opinionem mihi contigit, ut hac via brevem reperirem demonstrationem, quam nunc mitto, si forte eam inspicere Tibi placebit *).

Etiam alium commentarium, quod est additamentum quoddam illius, qui in Actis Reg. Societatis Scient. Upsaliensis (1855) edidi Tibi et Archivo Tuo mitto. In transcendente illa saepius versatus sum, neque dubito, quin digna sit, in quam plures studia sua conferant, quia multa alia integralia ex ea pendent **).

Tom. XXX. pag. 166. Cel^{us} Clausen demonstrationem dedit theorematis, quod a Cel^o Schlömilch inventum putat. Non dubito, quin Schlömilch theorema illud sua sponte et per se invenerit, sed primus non invenit. Theorema enim illud primus proposuit Cel^{us} Malmsten (antea Professor Upsaliensis, nunc Consiliarius Regis) in elegantissima illa dissertatione academica, quae inscribitur „Theoremata nova de integralibus definitis cett. (Upsaliae 1842), quam Tu in Archivo (Tom. III. pag. 41.) laudasti. Pag. 22. dedit formulam

$$\mathfrak{S}(1-s)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-s}}{\operatorname{Cos}\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)}\mathfrak{S}(s), \qquad 1>s>0,$$

ubi est

$$\mathfrak{S}(s)=\Gamma(s)\left(1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\text{etc.}\right),$$

unde, ope formulae notissimae $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\operatorname{Sin}s\pi}$, formula Celⁱ Schlömilch facillime invenitur.

Tomo XXX. pagg. 465., 466. Doctor Zehfuss quattuor protulit integralia, quae antea incognita arbitratur. Attamen primum cognoscere licet e tabulis Celⁱ Minding, si in integrali

*) Archiv. Thl. XXXIII. S. 478. G.

**) Man siehe oben in diesem Hefte S. 17. G.

$$\int_0^\infty \frac{x^a-1}{(x-1)(x+c)}dx=\frac{\pi}{1+c}\left[\frac{c^a-\operatorname{Cos} a\pi}{\operatorname{Sin} a\pi}-\frac{lc}{\pi}\right],\quad 1>a>-1$$

ponitur $c=1$, $a=m-1$. Quartum vero jam datum est a Cel°. Arndt in hoc Archivo (Tom. XI. pag. 73. form. (2)), ubi invenitur $\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos} x-\operatorname{Cos} xz}{x}dx=\frac{1}{2}lz^2$. Positis $x=(a-b)y$, $z=\frac{a+b}{a-b}$, prodit $\int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} ay \operatorname{Sin} by}{y}dy=\frac{1}{4}l\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$, $(a \gtrless b)$. Illud integrale quoque invenitur e formula mea supra allata, positis A et $B=0$, $a=a-b$, $b=a+b$.

Herr Doctor Zehfuss in Heidelberg hat mir unter dem 8. December 1859 einige, gegen den in Theil XXXIII. Nr. VII. Seite 104. abgedruckten Aufsatz des Herrn Unferdinger über das Rationalmachen der Nenner der Brüche mit irrationalen Nennern gerichtete Bemerkungen eingesandt, wofür ich demselben recht sehr danke. Ich bemerke dies deshalb, weil hier kein Raum mehr zum Abdruck des Briefes des Herrn Doctor Zehfuss, so weit sein Inhalt hierher gehört, vorhanden ist, und es auch fraglich bleibt, ob dazu schon das nächste Heft, dessen Inhalt schon jetzt bestimmt ist, Raum genug darbieten wird. Uebrigens benutze ich, um nicht später wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen zu müssen, den mir hier noch zu Gebote stehenden wenigen Raum sogleich dazu, dass ich darauf aufmerksam mache, dass ich dem kurzen und ganz elementaren Aufsatze des Herrn Unferdinger die Aufnahme deshalb nicht versagen zu dürfen geglaubt habe, weil ich der Meinung gewesen bin, dass die darin enthaltenen Bemerkungen durchaus bloss **ganz speciell mit Rücksicht auf die gleich im Eingange des betreffenden Aufsatzes erwähnte bekannte einfache praktische Methode des Rationalmachens** aufzufassen sind, und nur den Zweck haben und haben sollen, einige praktische elementare Fingerzeige für die Anwendung dieser, und nur **dieser** Methode zu geben. Gewiss hat Herr Unferdinger bei Abfassung seines Aufsatzes auch nur diesen Gesichtspunkt im Auge gehabt und ein höheres theoretisches Ziel nicht erstreben wollen. Es sei daher nochmals erwähnt, dass alle in dem genannten Aufsatze des Herrn Unferdinger enthaltenen Bemerkungen durchaus nur, und in ganz specieller Weise, auf die gleich im Eingange des Aufsatzes erwähnte einfache praktische Methode des Rationalmachens zu beziehen sind. Freilich hätte der Schluss des Aufsatzes vorsichtiger ausgedrückt werden sollen, was ich gern zugebe. Wegen des Weiteren verweise ich auf den später abzudruckenden Brief des Herrn Doctor Zehfuss. G.

XI.

Die allgemeinsten Gesetze der Krystallographie, gegründet auf eine von neuen Gesichtspunkten ausgehende Theorie der geraden Linie im Raume und der Ebene für beliebige schief- oder rechtwinklige Coordinatensysteme.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Die Form der Gleichungen der geraden Linie im Raume:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma},$$

wo bekanntlich (abc) ein beliebiger Punkt der geraden Linie ist, und α, β, γ die von einer der beiden Richtungen derselben mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnen, bietet so viele Vortheile dar und hat vor der gewöhnlichen Form der Gleichungen der geraden Linie, etwa

$$x=Az+a, \quad y=Bz+b,$$

so wesentliche Vorzüge, dass man sich in der That sehr wundern muss, jene erste so elegante Form im Ganzen noch so wenig in Anwendung gebracht zu sehen. Freilich kann man einwenden, dass die Form

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

ein rechtwinkliges Coordinatensystem voraussetze und nur bei einem solchen anwendbar sei, wogegen der gewöhnlichen Form der Vorzug der Anwendbarkeit bei allen beliebigen, schief- oder rechtwinkligen Coordinatensystemen gebühre. So wenig sich hiergegen einwenden lässt, so ist doch auch nicht zu übersehen, dass in den eigentlich mathematischen Wissenschaften, ganz besonders auch in der Mechanik, den optischen Disciplinen und

der gesammten Astronomie, wohl nicht ein einziger Fall vorkommt und denkbar ist, wo sich die Anwendung eines schiefwinkligen Coordinatensystems als nothwendig oder auch nur vortheilhaft erweisen sollte, indem man vielmehr überall mit dem rechtwinkligen Coordinatensysteme nicht bloss vollkommen auskommen, sondern auch dieses Coordinatensystem stets mit dem grössten Vortheil in Anwendung bringen wird. Nur in einer der schönsten Naturwissenschaften, die sich bereits ganz und gar der Herrschaft der Mathematik hat unterwerfen müssen und in deren Gebiet vollkommen eingetreten ist, nämlich in der Krystallographie, kann man nach meiner Meinung das allgemeine dreiaxige schiefwinklige Coordinatensystem gleich von vorn herein nicht entbehren, oder würde wenigstens, wenn man sich desselben entschlagen wollte, sehr viel von der Eleganz, Einfachheit und Allgemeinheit der Darstellung aufzugeben genöthigt sein. Zunächst nun um die oben erwähnte Form der Gleichungen der geraden Linie im Raume auch für die Krystallographie fruchtbar zu machen, habe ich diese Form auf das schiefwinklige Coordinatensystem zu erweitern gesucht, und glaube, dass mir dies in einer Weise gelungen ist, welche wenig zu wünschen übrig lassen dürfte, wenigstens meinen eigenen Ansprüchen vollkommen genügt hat. Dies hat mir Veranlassung gegeben, in den beiden ersten Kapiteln der vorliegenden Abhandlung die Theorie der geraden Linie im Raume und die Theorie der Ebene aus einem neuen Gesichtspunkte zu entwickeln, und ich hoffe, dass die gewonnenen Resultate in mehrfacher Beziehung von Interesse sein werden. Und wenn nun auch diese neue Theorie der geraden Linie im Raume und der Ebene auf dem Titel der vorliegenden Abhandlung nicht an die Spitze gestellt, sondern aus verschiedenen Gründen auf die Anwendung derselben auf die Krystallographie, welcher das dritte Kapitel gewidmet ist, zunächst Bezug genommen worden ist: so lege ich selbst doch auf die erstere fast einen grösseren Werth als auf die letztere. Was nun aber die in dem genannten Kapitel gegebene Entwickelung der allgemeinsten Gesetze der Krystallographie selbst betrifft, so muss ich, um in keiner Weise missverstanden zu werden, darüber einige Bemerkungen vorausschicken. Deshalb sei zuerst rücksichtlich der in §. 24. gegebenen allgemeinen Definition eines Krystalls bemerkt, dass es, wie es bei jeder auf Strenge Anspruch machen wollenden Entwickelung einer allgemeinen mathematischen Theorie ganz unbedingt erforderlich und völlig unabweisbar ist, bei Aufstellung dieser Definition zunächst und vor allen Dingen darauf ankam, eine sichere Grundlage für die zu entwickelnde Theorie zu gewinnen, weshalb ein Krystall hier nur ganz im Allgemeinen aufgefasst worden ist als ein, einer

gewissen allgemeinen Bedingung entsprechendes System von Ebenen, von welchem dann im weiteren Verfolg der Untersuchung verschiedene allgemeine Eigenschaften bewiesen worden sind. Dabei habe ich mich aber überall an die bewährtesten, den Gegenstand mit wirklicher mathematischer Schärfe und analytischer Allgemeinheit verfolgenden Schriftsteller über Krystallographie, vor Allen an Kupffer, Quintino Sella, Miller und Naumann, so viel als möglich angeschlossen. Nur muss ich rücksichtlich der in Rede stehenden Definition eines Krystalls, um jeder Missdeutung vorzubeugen, wiederholen, dass man dieselbe hier zunächst durchaus nur aus einem mathematischen Gesichtspunkte, als Grundlage für die Theorie eines gewissen Bedingungen unterworfenen Ebenen-Systems zu betrachten hat, indem ich weiterer Aufklärung wegen mir auf den oben genannten Paragraphen und ausserdem ganz besonders auch auf §. 33. zu verweisen erlaube. Eine zweite kürzere Bemerkung muss ich dem Folgenden noch rücksichtlich des von mir angewandten analytischen Ausdrucks der Gleichungen der Krystallflächen vorausschicken. Ich bin nämlich dabei von der jetzt ziemlich allgemein beliebten Weise, diese Gleichungen durch die sogenannten Parameter der betreffenden Ebenen auszudrücken, abgewichen, und zu dem in der analytischen Geometrie allgemein gewöhnlichen und in allen Beziehungen zweckmässigen Ausdruck der Gleichung der Ebene zurückgekehrt, indem ich gern bekenne, dass ich mich in dieser Beziehung ganz an Kupffer anschliesse, dessen treffliches Handbuch der rechnenden Krystallonomie ich immer noch für ein besonders klassisches Werk halte. Ganz in der Kürze sei hier nur bemerkt, dass ich den jetzt beliebten Ausdruck der Gleichung einer Krystallfläche durch ihre sogenannten Parameter verlassen habe, einmal weil ich darin gar keinen wesentlichen Vorzug vor dem in der analytischen Geometrie gebräuchlichen Ausdruck der allgemeinen Gleichung der Ebene zu erkennen vermag, weil ferner beide Ausdrucksweisen mit der grössten Leichtigkeit sich gegenseitig in einander umsetzen und verwandeln lassen, und weil endlich der Ausdruck durch die Parameter zu gewissen analytischen Bedenken Veranlassung giebt, denen der gewöhnliche Ausdruck der Gleichung der Ebene gar nicht unterliegt. Mehr hierüber zu sagen, ist unnöthig, indem es völlig genügt, des Weiteren wegen auf das zu verweisen, was ich in der ausführlichen Anmerkung zu §. 24. gesagt habe.

Erstes Kapitel.

Die gerade Linie.

§. 1.

Indem wir aus den ersten Elementen der analytischen Geometrie den Begriff und den Gebrauch der Coordinatenaxen als vollständig bekannt voraussetzen, bemerken wir, dass wir im Folgenden unter einer Projectionsaxe eine durch einen beliebigen, aber bestimmten Punkt O im Raume gelegte Gerade verstehen wollen, auf welche andere Punkte des Raumes durch von diesen Punkten auf dieselbe gefällte Perpendikel, deren Fusspunkte die Projectionen der in Rede stehenden Punkte auf der Projectionsaxe heissen, projicirt werden.

Durch den Punkt O wird die Projectionsaxe in zwei von dem Punkte O aus nach entgegengesetzten Richtungen hin gehende Theile getheilt, welche der positive und negative Theil der Projectionsaxe genannt werden, und die Entfernung der Projection eines Punktes auf der Projectionsaxe von dem Punkte O wird als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem dieselbe auf dem positiven oder negativen Theile der Projectionsaxe liegt.

Wenn nun P ein beliebiger Punkt im Raume ist und der 180° nicht übersteigende Winkel, welchen dessen Entfernung von dem Punkte O, nämlich die Linie $\overline{OP}$, mit dem positiven Theile der Projectionsaxe einschliesst, durch μ, die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung der Projection des Punktes P auf der Projectionsaxe von dem Punkte O aber durch u bezeichnet wird; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u = \overline{OP}.\cos\mu.$$

Sei jetzt durch den Punkt O eine Projectionsaxe der u und eine Coordinatenaxe der x gelegt; der von den positiven Theilen dieser beiden Axen eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel werde durch (ux) bezeichnet. Ist dann P ein beliebiger, in der Axe der x liegender Punkt, auf den sich die Grösse u, nämlich die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung der Projection des Punktes P auf der Projectionsaxe von dem Punkte O, und die Coordinate x beziehen; so ist nach 1), jenachdem der Punkt P in dem positiven oder negativen Theile der Coordinatenaxe der x liegt, offenbar

$$u = \overline{OP}.\cos(ux) \quad \text{oder} \quad u = \overline{OP}.\cos\{180^\circ - (ux)\}.$$

Nun ist aber, wenn man im ersten Falle das obere, im zweiten Falle das untere Zeichen nimmt:

$$x = \pm\,\overline{OP}, \quad \text{also} \quad \overline{OP} = \pm\, x;$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$u = x\cos(ux) \quad \text{oder} \quad u = -x\cos\{180^\circ - (ux)\};$$

also offenbar in völliger Allgemeinheit:

2) . . . . $u = x\cos(ux)$.

Seien ferner durch den Punkt O eine Projectionsaxe der u und zwei Coordinatenaxen der x und y gelegt; die von den positiven Theilen der Coordinatenaxen der x und y mit dem positiven Theile der Axe der u eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien (ux) und (uy). Ist dann P ein beliebiger, in der Ebene der (xy) liegender Punkt, auf den sich die Grösse u, deren Bedeutung aus dem Obigen bekannt ist und die Coordinaten x, y beziehen; so lege man durch diesen Punkt eine der Axe der x parallele Gerade, welche die Axe der y in dem Punkte O' schneiden mag, und denke sich durch diesen Punkt als Anfang zwei den Coordinatenaxen der x und y parallele Coordinatenaxen der x' und y', so wie eine der Projectionsaxe der u parallele Projectionsaxe der u' gelegt. Haben nun in Bezug auf diese neuen Axen für den Punkt P die Symbole x', y', u' ganz ähnliche Bedeutungen wie die Symbole x, y, u in Bezug auf die alten Axen; so ist nach 2), weil der Punkt P in der Coordinatenaxe der x' liegt, offenbar:

$$u' = x'\cos(ux),$$

also, weil augenscheinlich in völliger Allgemeinheit $x = x'$ ist:

$$u' = x\cos(ux).$$

Weil ferner der Punkt O' in der Axe der y liegt, und das y des Punktes O' offenbar einerlei mit dem y des Punktes P ist, so ist nach 2) die Entfernung der Projection des Punktes O' auf der Projectionsaxe der u von dem Punkte O augenscheinlich $y\cos(uy)$. Weil aber die Projectionsaxen der u und u' einander parallel sind, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$u = y\cos(uy) + u',$$

also nach dem Obigen:

3) . . . . . . $u = x\cos(ux) + y\cos(uy)$.

Endlich denken wir uns durch den Punkt O eine Projectionsaxe der u und drei Coordinatenaxen der x, y, z gelegt, und bezeichnen die von den positiven Theilen der Axen der x, y, z mit dem positiven Theile der Axe der u eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel respective durch (ux), (uy), (uz). Ist dann P ein beliebiger Punkt im Raume, so lege man durch denselben eine der Ebene der xy parallele Ebene, welche die Axe der z in dem Punkte O' schneiden mag, und denke sich durch diesen Punkt als Anfang drei den Coordinatenaxen der x, y, z parallelen Coordinatenaxen der x', y', z' gelegt, so wie eine der Projectionsaxe der u parallele Projectionsaxe der u'. Weil der Punkt P offenbar in der Ebene der $x'y'$ liegt, so ist nach 3), wenn die Symbole x', y', z', u' für den Punkt P in Bezug auf die neuen Axen ganz dieselbe Bedeutung haben wie die Symbole x, y, z, u für diesen Punkt in Bezug auf die alten Axen:

$$u' = x' \cos(ux) + y' \cos(uy),$$

oder, weil offenbar $x = x'$, $y = y'$ ist:

$$u' = x \cos(ux) + y \cos(uy).$$

Nun ist aber, weil der Punkt O' in der Axe der z liegt, nach 2) die Entfernung der Projection dieses Punktes auf der Projectionsaxe der u von dem Punkte O augenscheinlich $z\cos(uz)$, indem man wieder bemerkt, dass das z des Punktes O' jedenfalls einerlei ist mit dem z des Punktes P; und weil die Projectionsaxen der u und u' einander parallel sind, so ist allgemein

$$u = z \cos(uz) + u',$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$4) \quad . \; . \; . \quad u = x \cos(ux) + y \cos(uy) + z \cos(uz).$$

Bezeichnet man mit μ den 180° nicht übersteigenden, von der Linie $\overline{OP}$ mit dem positiven Theile der Projectionsaxe der u eingeschlossenen Winkel, so ist nach 1):

$$u = \overline{OP}.\cos\mu,$$

also nach 4):

$$5) \quad . \; . \; . \quad \overline{OP}.\cos\mu = x \cos(ux) + y \cos(uy) + z \cos(uz).$$

§. 2.

Wenn xyz und $x'y'z'$ zwei beliebige Coordinatensysteme mit einerlei Anfang sind, und die Coordinaten x, y, z und x', y', z'



einem und demselben Punkte im Raume entsprechen; so denke man sich, um diese Coordinaten mit einander zu vergleichen, durch den gemeinschaftlichen Anfang der beiden Systeme eine beliebige Projectionsaxe der u gelegt, und lasse u wie gewöhnlich die Entfernung der Projection des in Rede stehenden Punktes auf der angenommenen Projectionsaxe von dem Anfange der Coordinaten der xyz und $x'y'z'$ bezeichnen. Dann ist nach 4):

$$u = x\cos(ux) + y\cos(uy) + z\cos(uz),$$

$$u = x'\cos(ux') + y'\cos(uy') + z'\cos(uz');$$

also:

$$x\cos(ux) + y\cos(uy) + z\cos(uz) = x'\cos(ux') + y'\cos(uy') + z'\cos(uz').$$

Lassen wir nun den positiven Theil der Projectionsaxe der u nach und nach mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z zusammenfallen, so erhalten wir aus dieser Gleichung die drei folgenden Gleichungen:

$$x\cos(xx) + y\cos(xy) + z\cos(xz) = x'\cos(xx') + y'\cos(xy') + z'\cos(xz'),$$

$$x\cos(yx) + y\cos(yy) + z\cos(yz) = x'\cos(yx') + y'\cos(yy') + z'\cos(yz'),$$

$$x\cos(zx) + y\cos(zy) + z\cos(zz) = x'\cos(zx') + y'\cos(zy') + z'\cos(zz');$$

also:

6)

$$x + y\cos(xy) + z\cos(xz) = x'\cos(xx') + y'\cos(xy') + z'\cos(xz'),$$

$$x\cos(yx) + y + z\cos(yz) = x'\cos(yx') + y'\cos(yy') + z'\cos(yz'),$$

$$x\cos(zx) + y\cos(zy) + z = x'\cos(zx') + y'\cos(zy') + z'\cos(zz');$$

oder, was natürlich dasselbe ist:

7)

$$x + y\cos(xy) + z\cos(zx) = x'\cos(xx') + y'\cos(xy') + z'\cos(xz'),$$

$$x\cos(xy) + y + z\cos(yz) = x'\cos(yx') + y'\cos(yy') + z'\cos(yz'),$$

$$x\cos(zx) + y\cos(yz) + z = x'\cos(zx') + y'\cos(zy') + z'\cos(zz').$$

Wenn die beiden Coordinatensysteme der xyz und $x'y'z'$ nicht einerlei Anfang haben, so wollen wir die Coordinaten des Anfangs des Systems der $x'y'z'$ in dem Systeme der xyz durch a, b, c bezeichnen; dann ist, wenn wir durch den Anfang des Systems der $x'y'z'$ ein dem Systeme der xyz paralleles System der $x_1y_1z_1$ legen, offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$x = a + x_1,\quad y = b + y_1,\quad z = c + z_1$$

oder

$$x_1 = x - a,\quad y_1 = y - b,\quad z_1 = z - c.$$

Nun ist aber nach 7) offenbar:

$$x_1 + y_1 \cos(xy) + z_1 \cos(zx) = x' \cos(xx') + y' \cos(xy') + z' \cos(xz'),$$

$$x_1 \cos(xy) + y_1 + z_1 \cos(yz) = x' \cos(yx') + y' \cos(yy') + z' \cos(yz'),$$

$$x_1 \cos(zx) + y_1 \cos(yz) + z_1 = x' \cos(zx') + y' \cos(zy') + z' \cos(zz');$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l} (x-a) + (y-b)\cos(xy) + (z-c)\cos(zx) \\ = x'\cos(xx') + y'\cos(xy') + z'\cos(xz'), \\ (x-a)\cos(xy) + (y-b) + (z-c)\cos(yz) \\ = x'\cos(yx') + y'\cos(yy') + z'\cos(yz'), \\ (x-a)\cos(zx) + (y-b)\cos(yz) + (z-c) \\ = x'\cos(zx') + y'\cos(zy') + z'\cos(zz'); \end{array}\right.$$

welche Gleichungen die Verbindung der Coordinaten x, y, z und x', y', z' mit einander ausdrücken.

§. 3.

Durch den Punkt O als Anfang sei ein beliebiges Coordinatensystem der x, y, z gelegt, dessen Coordinatenwinkel wir, wie gewöhnlich, durch (xy), (yz), (zx) bezeichnen. Geht nun durch den Anfang O eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt O in zwei von demselben nach entgegengesetzten Richtungen hin ausgehende Theile getheilt wird, so wollen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der eine dieser beiden Theile mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, respective durch α, β, γ bezeichnen; zugleich wollen wir diesen Theil unserer Geraden den positiven Theil, den anderen Theil derselben den negativen Theil nennen. Ist dann P ein beliebiger Punkt unserer Geraden, welchem die Coordinaten x, y, z entsprechen, so werden wir die Entfernung dieses Punktes von O als positiv oder negativ betrachten, jenachdem derselbe in dem positiven

oder negativen Theile der Geraden liegt, und mit Rücksicht hierauf durch r bezeichnen.

Dies vorausgesetzt, ist in völliger Allgemeinheit:

$$\overline{OP}.\cos \overline{xOP} = r\cos\alpha,$$
$$\overline{OP}.\cos \overline{yOP} = r\cos\beta,$$
$$\overline{OP}.\cos \overline{zOP} = r\cos\gamma;$$

wie auf der Stelle erhellet, wenn man nur überlegt, dass, jenachdem der Punkt P in dem positiven oder negativen Theile der Geraden liegt, offenbar

$$\overline{OP} = +r,$$
$$\angle \overline{xOP} = \alpha, \quad \angle \overline{yOP} = \beta, \quad \angle \overline{zOP} = \gamma$$

oder

$$\overline{OP} = -r,$$
$$\angle \overline{xOP} = 180^0 - \alpha, \quad \angle \overline{yOP} = 180^0 - \beta, \quad \angle \overline{zOP} = 180^0 - \gamma$$

ist. Betrachten wir nun aber, wie offenbar verstattet ist, nach und nach die Axen der x, y, z als Projectionsaxen, so ist nach 5):

$$\overline{OP}.\cos \overline{xOP} = x\cos(xx) + y\cos(xy) + z\cos(xz),$$
$$\overline{OP}.\cos \overline{yOP} = x\cos(yx) + y\cos(yy) + z\cos(yz),$$
$$OP.\cos \overline{zOP} = x\cos(zx) + y\cos(zy) + z\cos(zz);$$

folglich, weil

$$(xx) = 0, \quad (yy) = 0, \quad (zz) = 0$$

ist, nach dem Obigen:

$$9) \ldots \left\{ \begin{array}{l} r\cos\alpha = x + y\cos(xy) + z\cos(xz), \\ r\cos\beta = x\cos(yx) + y + z\cos(yz), \\ r\cos\gamma = x\cos(zx) + y\cos(zy) + z. \end{array} \right.$$

Hiernach ist:

$$10) \ldots\ldots r = \frac{x + y\cos(xy) + z\cos(xz)}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{x\cos(yx) + y + z\cos(yz)}{\cos\beta}$$
$$= \frac{x\cos(zx) + y\cos(zy) + z}{\cos\gamma},$$



und die Gleichungen unserer durch den Anfang der Coordinaten gelegten Geraden sind also:

$$11) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x+y\cos(xy)+z\cos(zx)}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{x\cos(xy)+y+z\cos(yz)}{\cos\beta}$$

$$=\frac{x\cos(zx)+y\cos(yz)+z}{\cos\gamma},$$

weil natürlich

$$(xy)=(yx),\quad (yz)=(zy),\quad (zx)=(xz)$$

ist.

Wenn das Coordinatensystem ein rechtwinkliges und folglich

$$(xy)=90^{\circ},\quad (yz)=90^{\circ},\quad (zx)=90^{\circ}$$

ist, so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$12) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}.$$

Geht die Gerade nicht durch den Anfang der Coordinaten, sondern durch einen anderen beliebigen Punkt (abc), so lege man durch diesen Punkt als Anfang ein dem primitiven Systeme der xyz paralleles Coordinatensystem der $x'y'z'$. Dann sind nach 11) die Gleichungen unserer Geraden in diesem Systeme:

$$\frac{x'+y'\cos(xy)+z'\cos(zx)}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{x'\cos(xy)+y'+z'\cos(yz)}{\cos\beta}$$

$$=\frac{x'\cos(zx)+y'\cos(yz)+z'}{\cos\gamma},$$

und folglich, weil bekanntlich allgemein

$$x=a+x',\quad y=b+y',\quad z=c+z';$$

also

$$x'=x-a,\quad y'=y-b,\quad z'=z-c$$

ist, die Gleichungen der Geraden in dem primitiven Systeme der xyz:

$$13) \ldots \quad \frac{(x-a)+(y-b)\cos(xy)+(z-c)\cos(zx)}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{(x-a)\cos(xy)+(y-b)+(z-c)\cos(yz)}{\cos\beta}$$

$$=\frac{(x-a)\cos(zx)+(y-b)\cos(yz)+(z-c)}{\cos\gamma};$$

folglich, wenn das Coordinatensystem der xyz rechtwinklig ist:

$$14) \ldots\ldots \quad \frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}.$$

Die Winkel α, β, γ beziehen sich hier auf einen der beiden von dem Punkte (abc) nach entgegengesetzten Richtungen hin ausgehenden Theile der Geraden. Ist P ein beliebiger Punkt unserer Geraden, auf den sich die Coordinaten x, y, z und x', y', z' beziehen, und bezeichnet r dessen Entfernung von dem Punkte (abc), indem man diese Entfernung als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem der Punkt P in dem der beiden erwähnten Theile der Geraden, welchem die Winkel α, β, γ entsprechen, oder in dem entgegengesetzten Theile liegt, so ist nach 9):

$$r\cos\alpha=x'+y'\cos(xy)+z'\cos(zx),$$

$$r\cos\beta=x'\cos(xy)+y'+z'\cos(yz),$$

$$r\cos\gamma=x'\cos(zx)+y'\cos(yz)+z';$$

also nach dem Obigen:

$$15) \begin{cases} r\cos\alpha=(x-a)+(y-b)\cos(xy)+(z-c)\cos(zx), \\ r\cos\beta=(x-a)\cos(xy)+(y-b)+(z-c)\cos(yz), \\ r\cos\gamma=(x-a)\cos(zx)+(y-b)\cos(yz)+(z-c). \end{cases}$$

Sieht man die Gerade als eine Projectionsaxe der r an, die durch den Punkt (abc) gelegt ist, so ist nach 4):

$$r=x'\cos(rx')+y'\cos(ry')+z'\cos(rz')$$

oder, weil offenbar

$$(rx')=\alpha,\quad (ry')=\beta,\quad (rz')=\gamma$$

ist:

$$r=x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$16) \ldots r=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma.$$

Multiplicirt man nun die drei Gleichungen 15) nach der Reihe mit

$$x-a,\quad y-b,\quad z-c$$

und addirt sie dann zu einander; so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} &r\{(x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma\} \\ =\; &(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \\ &+2(x-a)(y-b)\cos(xy)+2(y-b)(z-c)\cos(yz)+2(z-c)(x-a)\cos(zx), \end{aligned}$$

also nach 16):

17)

$$\begin{aligned} r^2= &(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \\ &+2(x-a)(y-b)\cos(xy)+2(y-b)(z-c)\cos(yz)+2(z-c)(x-a)\cos(zx), \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass, wenn $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ zwei beliebige Punkte im Raume sind, und $E_{0,1}$ deren Entfernung von einander bezeichnet, allgemein

18)

$$\begin{aligned} E_{0,1}{}^2=(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2&+2(x_0-x_1)(y_0-y_1)\cos(xy) \\ &+2(y_0-y_1)(z_0-z_1)\cos(yz) \\ &+2(z_0-z_1)(x_0-x_1)\cos(zx) \end{aligned}$$

ist, eine wichtige Formel, von der wir noch vielfachen Gebrauch zu machen Gelegenheit haben werden.

§. 4.

Wir wollen uns jetzt mit der Auflösung der drei Gleichungen 15) oder mit der Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{x-a}{r}+\frac{y-b}{r}\cos(xy)+\frac{z-c}{r}\cos(zx)=\cos\alpha, \\ &\frac{x-a}{r}\cos(xy)+\frac{y-b}{r}+\frac{z-c}{r}\cos(yz)=\cos\beta, \\ &\frac{x-a}{r}\cos(zx)+\frac{y-b}{r}\cos(yz)+\frac{z-c}{r}=\cos\gamma; \end{aligned}$$

d. h. mit der Bestimmung der Grössen

$$\frac{x-a}{r},\quad \frac{y-b}{r},\quad \frac{z-c}{r}$$

aus denselben beschäftigen.

Multipliciren wir zu dem Ende die drei obigen Gleichungen nach der Reihe zuerst mit

$$1-\cos(yz)^2,\quad \cos(yz)\cos(zx)-\cos(xy),\quad \cos(xy)\cos(yz)-\cos(zx);$$

dann mit

$$\cos(yz)\cos(zx)-\cos(xy),\quad 1-\cos(zx)^2,\quad \cos(zx)\cos(xy)-\cos(yz);$$

endlich mit

$$\cos(xy)\cos(yz)-\cos(zx),\quad \cos(zx)\cos(xy)-\cos(yz),\quad 1-\cos(xy)^2;$$

und addiren sie hierauf in jedem Falle zu einander, so erhalten wir, wenn der Kürze wegen

19)

$$N=1-\cos(xy)^2-\cos(yz)^2-\cos(zx)^2+2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx);$$

$$\begin{aligned}X=\;&\cos\alpha\sin(yz)^2\\&+\cos\beta\{\cos(yz)\cos(zx)-\cos(xy)\}\\&+\cos\gamma\{\cos(xy)\cos(yz)-\cos(zx)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y=\;&\cos\alpha\{\cos(yz)\cos(zx)-\cos(xy)\}\\&+\cos\beta\sin(zx)^2\\&+\cos\gamma\{\cos(zx)\cos(xy)-\cos(yz)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z=\;&\cos\alpha\{\cos(xy)\cos(yz)-\cos(zx)\}\\&+\cos\beta\{\cos(zx)\cos(xy)-\cos(yz)\}\\&+\cos\gamma\sin(xy)^2\end{aligned}$$

gesetzt wird, für

$$\frac{x-a}{r},\quad \frac{y-b}{r},\quad \frac{z-c}{r}$$

die folgenden Ausdrücke:

$$20)\;\ldots\;\frac{x-a}{r}=\frac{X}{N},\quad \frac{y-b}{r}=\frac{Y}{N},\quad \frac{z-c}{r}=\frac{Z}{N}.$$

§. 5.

Setzen wir der Kürze wegen im Folgenden immer:

21)

$$\mathfrak{A} = \sin(yz)^2, \quad \mathfrak{B} = \sin(zx)^2, \quad \mathfrak{C} = \sin(xy)^2;$$

$$A = \cos(zx)\cos(xy) - \cos(yz),$$
$$B = \cos(xy)\cos(yz) - \cos(zx),$$
$$C = \cos(yz)\cos(zx) - \cos(xy);$$

$$N = 1 - \cos(xy)^2 - \cos(yz)^2 - \cos(zx)^2 + 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx);$$

$$X = \mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma,$$
$$Y = C\cos\alpha + \mathfrak{B}\cos\beta + A\cos\gamma,$$
$$Z = B\cos\alpha + A\cos\beta + \mathfrak{C}\cos\gamma;$$

so ist nach 20):

$$22) \quad \ldots \quad \frac{x-a}{X} = \frac{r}{N}, \quad \frac{y-b}{Y} = \frac{r}{N}, \quad \frac{z-c}{Z} = \frac{r}{N};$$

und die Gleichungen der im Vorhergehenden betrachteten, durch den Punkt (abc) gehenden Geraden sind also:

$$23) \quad \ldots \ldots \quad \frac{x-a}{X} = \frac{y-b}{Y} = \frac{z-c}{Z},$$

folglich nach 21):

$$24) \quad \ldots \ldots \quad \frac{x-a}{\mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma}$$
$$= \frac{y-b}{C\cos\alpha + \mathfrak{B}\cos\beta + A\cos\gamma}$$
$$= \frac{z-c}{B\cos\alpha + A\cos\beta + \mathfrak{C}\cos\gamma}.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem ist offenbar:

$$\mathfrak{A}=1, \quad \mathfrak{B}=1, \quad \mathfrak{C}=1; \quad A=0, \quad B=0, \quad C=0;$$

also die Gleichungen der Geraden:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma},$$

wie wir schon in 14) gefunden haben.

§. 6.

Wir wollen uns jetzt zwei von einem beliebigen Punkte ausgehende Gerade denken, welche mit den positiven Theilen der

Axen der x, y, z die 180° nicht übersteigenden Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 einschliessen. Der von diesen beiden Geraden eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel sei $W_{0,1}$. Um diesen Winkel zu bestimmen, lassen wir von dem Anfange der Coordinaten O zwei mit den beiden in Rede stehenden Geraden gleich gerichtete Gerade ausgehen, welche offenbar auch den 180° nicht übersteigenden Winkel $W_{0,1}$ mit einander, und mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z die 180° nicht übersteigenden Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 einschliessen. In diesen beiden von O ausgehenden Geraden nehmen wir beliebig die Punkte P_0 und P_1 an und bezeichnen deren als positiv zu betrachtende Entfernungen von dem Anfange der Coordinaten O durch r_0 und r_1, ihre Entfernung von einander durch $E_{0,1}$; so ist nach einer bekannten trigonometrischen Formel in dem Dreieck P_0OP_1 offenbar:

$$E_{0,1}{}^2 = r_0{}^2 + r_1{}^2 - 2r_0r_1 \cos W_{0,1}.$$

Nun ist aber, wenn wir die Coordinaten der Punkte P_0 und P_1 durch x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 bezeichnen, nach 18):

$$r_0{}^2 = x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 + 2x_0y_0 \cos(xy) + 2y_0z_0 \cos(yz) + 2z_0x_0 \cos(zx),$$

$$r_1{}^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 + 2x_1y_1 \cos(xy) + 2y_1z_1 \cos(yz) + 2z_1x_1 \cos(zx)$$

und

$$\begin{aligned} E_{0,1}{}^2 = (x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 + (z_0-z_1)^2 &+ 2(x_0-x_1)(y_0-y_1)\cos(xy) \\ &+ 2(y_0-y_1)(z_0-z_1)\cos(yz) \\ &+ 2(z_0-z_1)(x_0-x_1)\cos(zx); \end{aligned}$$

also, wenn wir diese Ausdrücke in die obige Gleichung einführen und aufheben, was sich aufheben lässt:

$$r_0r_1 \cos W_{0,1} = x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1$$

$$+ (x_0y_1 + y_0x_1)\cos(xy) + (y_0z_1 + z_0y_1)\cos(yz) + (z_0x_1 + x_0z_1)\cos(zx).$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen:

$$25) \ldots \left\{ \begin{aligned} X_0 &= \mathfrak{A}\cos\alpha_0 + C\cos\beta_0 + B\cos\gamma_0, \\ Y_0 &= C\cos\alpha_0 + \mathfrak{B}\cos\beta_0 + A\cos\gamma_0, \\ Z_0 &= B\cos\alpha_0 + A\cos\beta_0 + \mathfrak{C}\cos\gamma_0 \end{aligned} \right.$$

und

$$26) \ldots \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \mathfrak{A}\cos\alpha_1 + C\cos\beta_1 + B\cos\gamma_1, \\ Y_1 &= C\cos\alpha_1 + \mathfrak{B}\cos\beta_1 + A\cos\gamma_1, \\ Z_1 &= B\cos\alpha_1 + A\cos\beta_1 + \mathfrak{C}\cos\gamma_1; \end{aligned} \right.$$

so ist nach 22) offenbar, wenn man dort $a=0$, $b=0$, $c=0$ setzt:

$$x_0=\frac{r_0X_0}{N},\quad y_0=\frac{r_0Y_0}{N},\quad z_0=\frac{r_0Z_0}{N};$$

$$x_1=\frac{r_1X_1}{N},\quad y_1=\frac{r_1Y_1}{N},\quad z_1=\frac{r_1Z_1}{N};$$

also, wenn man dies in den obigen Ausdruck von $r_0r_1\cos W_{0,1}$ einführt:

27)

$$\begin{aligned}N^2\cos W_{0,1}=X_0X_1+Y_0Y_1+Z_0Z_1&+(X_0Y_1+Y_0X_1)\cos(xy)\\&+(Y_0Z_1+Z_0Y_1)\cos(yz)\\&+(Z_0X_1+X_0Z_1)\cos(zx),\end{aligned}$$

mittelst welcher merkwürdigen Formel der Winkel $W_{0,1}$ aus den Winkeln α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 berechnet werden kann.

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem geht aus dieser Formel unmittelbar die längst bekannte Formel

28) $$\cos W_{0,1}=\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1$$

hervor.

Wenn die beiden Geraden mit einander zusammenfallen, so ist

$$\alpha_0=\alpha_1,\quad \beta_0=\beta_1,\quad \gamma_0=\gamma_1;$$

also

$$X_0=X_1,\quad Y_0=Y_1,\quad Z_0=Z_1;$$

und $W_{0,1}=0$. Setzen wir nun in diesem Falle, wie es verstattet ist:

$$\alpha=\alpha_0=\alpha_1,\quad \beta=\beta_0=\beta_1,\quad \gamma=\gamma_0=\gamma_1;$$

$$X=X_0=X_1,\quad Y=Y_0=Y_1,\quad Z=Z_0=Z_1;$$

wo X, Y, Z ihre aus dem Obigen bekannte Bedeutung haben; so wird die Gleichung 27):

29)

$$N^2=X^2+Y^2+Z^2+2XY\cos(xy)+2YZ\cos(yz)+2ZX\cos(zx),$$

welche Gleichung für ein rechtwinkliges Coordinatensystem offenbar in die bekannte Gleichung

30) . . . . . $$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1$$

übergeht.

§. 7.

Nach 22) ist:

$$rX = N(x-a),\quad rY = N(y-b),\quad rZ = N(z-c);$$

also, wie sogleich erhellet:

$$r\{X + Y\cos(xy) + Z\cos(zx)\} = N\{(x-a) + (y-b)\cos(xy) + (z-c)\cos(zx)\},$$

$$r\{X\cos(xy) + Y + Z\cos(yz)\} = N\{(x-a)\cos(xy) + (y-b) + (z-c)\cos(yz)\},$$

$$r\{X\cos(zx) + Y\cos(yz) + Z\} = N\{(x-a)\cos(zx) + (y-b)\cos(yz) + (z-c)\};$$

folglich, weil nach 15):

$$(x-a) + (y-b)\cos(xy) + (z-c)\cos(zx) = r\cos\alpha,$$

$$(x-a)\cos(xy) + (y-b) + (z-c)\cos(yz) = r\cos\beta,$$

$$(x-a)\cos(zx) + (y-b)\cos(yz) + (z-c) = r\cos\gamma$$

ist:

$$31)\ \ldots\ \begin{cases} X + Y\cos(xy) + Z\cos(zx) = N\cos\alpha, \\ X\cos(xy) + Y + Z\cos(yz) = N\cos\beta, \\ X\cos(zx) + Y\cos(yz) + Z = N\cos\gamma; \end{cases}$$

oder:

$$32)\ \ldots\ \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{X + Y\cos(xy) + Z\cos(zx)}{N}, \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{X\cos(xy) + Y + Z\cos(yz)}{N}, \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{X\cos(zx) + Y\cos(yz) + Z}{N}. \end{cases}$$

Da sich nun die Gleichung 29) offenbar auch unter der Form

$$\begin{aligned} N^2 = \ & X\{X + Y\cos(xy) + Z\cos(zx)\} \\ & + Y\{X\cos(xy) + Y + Z\cos(yz)\} \\ & + Z\{X\cos(zx) + Y\cos(yz) + Z\} \end{aligned}$$

schreiben lässt, so erhalten wir nach 31) die folgende merkwürdige Gleichung:

$$33)\ \ldots\ X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = N$$

oder nach 21):

34)

$$\mathfrak{A}\cos\alpha^2+\mathfrak{B}\cos\beta^2+\mathfrak{C}\cos\gamma^2+2C\cos\alpha\cos\beta+2A\cos\beta\cos\gamma+2B\cos\gamma\cos\alpha=N.$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem führt diese Gleichung wieder auf die Gleichung 30).

§. 8.

Mit Rücksicht auf 25) und 26) haben wir also nach 33) die beiden Gleichungen:

$$35)\ \ldots\ \begin{cases} X_0\cos\alpha_0+Y_0\cos\beta_0+Z_0\cos\gamma_0=N, \\ X_1\cos\alpha_1+Y_1\cos\beta_1+Z_1\cos\gamma_1=N. \end{cases}$$

Die Gleichung 27) lässt sich auf die beiden folgenden Arten schreiben:

$$\begin{aligned} N^2\cos W_{0,1}= \ & X_0\{X_1+Y_1\cos(xy)+Z_1\cos(zx)\} \\ & +Y_0\{X_1\cos(xy)+Y_1+Z_1\cos(yz)\} \\ & +Z_0\{X_1\cos(zx)+Y_1\cos(yz)+Z_1\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} N^2\cos W_{0,1}= \ & X_1\{X_0+Y_0\cos(xy)+Z_0\cos(zx)\} \\ & +Y_1\{X_0\cos(xy)+Y_0+Z_0\cos(yz)\} \\ & +Z_1\{X_0\cos(zx)+Y_0\cos(yz)+Z_0\}; \end{aligned}$$

also ist nach 31):

$$36)\ \ldots\ \begin{cases} N\cos W_{0,1}=X_0\cos\alpha_1+Y_0\cos\beta_1+Z_0\cos\gamma_1, \\ N\cos W_{0,1}=X_1\cos\alpha_0+Y_1\cos\beta_0+Z_1\cos\gamma_0. \end{cases}$$

Führt man in diese Formeln für X_0, Y_0, Z_0 oder X_1, Y_1, Z_1 ihre Werthe aus 25) oder 26) ein, so erhält man sogleich die folgende Gleichung:

37)

$$\begin{aligned} N\cos W_{0,1}= \ & \mathfrak{A}\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\mathfrak{B}\cos\beta_0\cos\beta_1+\mathfrak{C}\cos\gamma_0\cos\gamma_1 \\ & +A(\cos\beta_0\cos\gamma_1+\cos\gamma_0\cos\beta_1) \\ & +B(\cos\gamma_0\cos\alpha_1+\cos\alpha_0\cos\gamma_1) \\ & +C(\cos\alpha_0\cos\beta_1+\cos\beta_0\cos\alpha_1). \end{aligned}$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem erhält man hieraus wieder die aus 28) bereits bekannte Formel

$$\cos W_{0,1} = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1.$$

Mittelst der Gleichungen 35) und 36) erhält man auf der Stelle:

$$\begin{aligned} & N^2\sin W_{0,1}{}^2 \\ = \; & (X_0\cos\alpha_0 + Y_0\cos\beta_0 + Z_0\cos\gamma_0)(X_1\cos\alpha_1 + Y_1\cos\beta_1 + Z_1\cos\gamma_1) \\ & -(X_0\cos\alpha_1 + Y_0\cos\beta_1 + Z_0\cos\gamma_1)(X_1\cos\alpha_0 + Y_1\cos\beta_0 + Z_1\cos\gamma_0), \end{aligned}$$

also, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned} N^2\sin W_{0,1}{}^2 = \; & (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)(X_0Y_1 - Y_0X_1) \\ & + (\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)(Y_0Z_1 - Z_0Y_1) \\ & + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)(Z_0X_1 - X_0Z_1), \end{aligned}$$

oder, wenn der Kürze wegen:

$$38) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_{0,1} &= \cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1, \\ \mathrm{B}_{0,1} &= \cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1, \\ \mathrm{C}_{0,1} &= \cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1 \end{aligned} \right.$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} 39) \quad \ldots\ldots\ldots \quad & N^2\sin W_{0,1}{}^2 \\ = \mathrm{A}_{0,1}(Y_0Z_1 - Z_0Y_1) + & \mathrm{B}_{0,1}(Z_0X_1 - X_0Z_1) + \mathrm{C}_{0,1}(X_0Y_1 - Y_0X_1). \end{aligned}$$

Mittelst der Gleichungen 25) und 26) erhält man ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} X_0Y_1 - Y_0X_1 &= \mathrm{A}_{0,1}(CA - B\mathfrak{B}) + \mathrm{B}_{0,1}(BC - A\mathfrak{A}) + \mathrm{C}_{0,1}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - CC), \\ Y_0Z_1 - Z_0Y_1 &= \mathrm{A}_{0,1}(\mathfrak{B}\mathfrak{C} - AA) + \mathrm{B}_{0,1}(AB - C\mathfrak{C}) + \mathrm{C}_{0,1}(CA - B\mathfrak{B}), \\ Z_0X_1 - X_0Z_1 &= \mathrm{A}_{0,1}(AB - C\mathfrak{C}) + \mathrm{B}_{0,1}(\mathfrak{C}\mathfrak{A} - BB) + \mathrm{C}_{0,1}(BC - A\mathfrak{A}). \end{aligned}$$

Nun ist aber ferner, wie man mittelst der Formeln 21) leicht findet:

$$40) \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C} - AA = N, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{A} - BB = N, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} - CC = N$$

und

$$41) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} BC - A\mathfrak{A} &= N\cos(yz), \\ CA - B\mathfrak{B} &= N\cos(zx), \\ AB - C\mathfrak{C} &= N\cos(xy); \end{aligned} \right.$$

also ist nach dem Obigen:

$$42)\quad \begin{cases} X_0 Y_1 - Y_0 X_1 = N\{A_{0,1}\cos(zx) + B_{0,1}\cos(yz) + C_{0,1}\}, \\ Y_0 Z_1 - Z_0 Y_1 = N\{A_{0,1} + B_{0,1}\cos(xy) + C_{0,1}\cos(zx)\}, \\ Z_0 X_1 - X_0 Z_1 = N\{A_{0,1}\cos(xy) + B_{0,1} + C_{0,1}\cos(yz)\}. \end{cases}$$

Daher ist nach 39):

$$\begin{aligned} 43)\quad N\sin W_{0,1}{}^2 = \; & A_{0,1}\{A_{0,1} + B_{0,1}\cos(xy) + C_{0,1}\cos(zx)\} \\ & + B_{0,1}\{A_{0,1}\cos(xy) + B_{0,1} + C_{0,1}\cos(yz)\} \\ & + C_{0,1}\{A_{0,1}\cos(zx) + B_{0,1}\cos(yz) + C_{0,1}\} \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} 44)\quad \ldots\ldots\ldots\quad & N\sin W_{0,1}{}^2 \\ = A_{0,1}{}^2 + B_{0,1}{}^2 + C_{0,1}{}^2 + 2A_{0,1}B_{0,1}\cos(xy) & + 2B_{0,1}C_{0,1}\cos(yz) \\ & + 2C_{0,1}A_{0,1}\cos(zx) \end{aligned}$$

oder, wenn man für $A_{0,1}$, $B_{0,1}$, $C_{0,1}$ ihre obigen Ausdrücke einführt:

$$\begin{aligned} 45)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad & N\sin W_{0,1}{}^2 \\ = \; & (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)^2 \\ & + (\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)^2 \\ & + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2 \\ & + 2(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)\cos(xy) \\ & + 2(\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)\cos(yz) \\ & + 2(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)\cos(zx). \end{aligned}$$

Für ein rechtwinkliges Coordinatensystem wird

$$\begin{aligned} \sin W_{0,1}{}^2 = (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta_0\cos\gamma_1 - \cos\gamma_0\cos\beta_1)^2 \\ + (\cos\gamma_0\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2 \end{aligned}$$

oder, weil in diesem Falle

$$\cos\alpha_0{}^2 + \cos\beta_0{}^2 + \cos\gamma_0{}^2 = 1, \quad \cos\alpha_1{}^2 + \cos\beta_1{}^2 + \cos\gamma_1{}^2 = 1$$

ist:

$$\sin W_{0,1}{}^2 = 1 - (\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2,$$

wie bekannt.

§. 9.

Stehen die beiden vorher betrachteten Geraden auf einander senkrecht, so ist $W_{0,1}=90^0$, und folglich:

$$\cos W_{0,1}=0, \quad \sin W_{0,1}=1;$$

daher haben wir in diesem Falle nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

46)

$$\left.\begin{array}{l} X_0X_1+Y_0Y_1+Z_0Z_1 \\ +(X_0Y_1+Y_0X_1)\cos(xy)+(Y_0Z_1+Z_0Y_1)\cos(yz) \\ \qquad +(Z_0X_1+X_0Z_1)\cos(zx) \end{array}\right\}=0,$$

$$X_0\cos\alpha_1+Y_0\cos\beta_1+Z_0\cos\gamma_1=0,$$

$$X_1\cos\alpha_0+Y_1\cos\beta_0+Z_1\cos\gamma_0=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\mathfrak{B}\cos\beta_0\cos\beta_1+\mathfrak{C}\cos\gamma_0\cos\gamma_1 \\ +A(\cos\beta_0\cos\gamma_1+\cos\gamma_0\cos\beta_1) \\ +B(\cos\gamma_0\cos\alpha_1+\cos\alpha_0\cos\gamma_1) \\ +C(\cos\alpha_0\cos\beta_1+\cos\beta_0\cos\alpha_1) \end{array}\right\}=0;$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}_{0,1}{}^2+\mathrm{B}_{0,1}{}^2+\mathrm{C}_{0,1}{}^2 \\ +2\mathrm{A}_{0,1}\mathrm{B}_{0,1}\cos(xy)+2\mathrm{B}_{0,1}\mathrm{C}_{0,1}\cos(yz)+2\mathrm{C}_{0,1}\mathrm{A}_{0,1}\cos(zx) \end{array}\right\}=N;$$

wo man in diese letzte Gleichung für $\mathrm{A}_{0,1}$, $\mathrm{B}_{0,1}$, $\mathrm{C}_{0,1}$ auch noch ihre aus dem Obigen bekannten Werthe einführen könnte.

§. 10.

Hat man zwei Coordinatensysteme der xyz und $x'y'z'$, und setzt für das erste dieser beiden Coordinatensysteme wie früher:

$$\mathfrak{A}=\sin(yz)^2, \quad \mathfrak{B}=\sin(zx)^2, \quad \mathfrak{C}=\sin(xy)^2;$$

$$A=\cos(zx)\cos(xy)-\cos(yz),$$

$$B=\cos(xy)\cos(yz)-\cos(zx),$$

$$C=\cos(yz)\cos(zx)-\cos(xy);$$

$$N=1-\cos(xy)^2-\cos(yz)^2-\cos(zx)^2+2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx)$$

für das zweite Coordinatensystem auf ähnliche Art:

$$\mathfrak{A}'=\sin(y'z')^2,\quad \mathfrak{B}'=\sin(z'x')^2,\quad \mathfrak{C}'=\sin(x'y')^2;$$

$$\begin{aligned}A'&=\cos(z'x')\cos(x'y')-\cos(y'z'),\\ B'&=\cos(x'y')\cos(y'z')-\cos(z'x'),\\ C'&=\cos(y'z')\cos(z'x')-\cos(x'y');\end{aligned}$$

$$N'=1-\cos(x'y')^2-\cos(y'z')^2-\cos(z'x')^2+2\cos(x'y')\cos(y'z')\cos(z'x');$$

ferner der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}=\cos(xx'), && \mathrm{B}=\cos(xy'), && \mathrm{C}=\cos(xz');\\ &\mathrm{A}'=\cos(yx'), && \mathrm{B}'=\cos(yy'), && \mathrm{C}'=\cos(yz');\\ &\mathrm{A}''=\cos(zx'), && \mathrm{B}''=\cos(zy'), && \mathrm{C}''=\cos(zz');\end{aligned}$$

so hat man zwischen diesen letzten neun Grössen nach 34) und 27) die folgenden zwölf Gleichungen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\mathrm{A}^2+\mathfrak{B}\mathrm{A}'^2+\mathfrak{C}\mathrm{A}''^2+2C\mathrm{A}\mathrm{A}'+2A\mathrm{A}'\mathrm{A}''+2B\mathrm{A}''\mathrm{A}&=N,\\ \mathfrak{A}\mathrm{B}^2+\mathfrak{B}\mathrm{B}'^2+\mathfrak{C}\mathrm{B}''^2+2C\mathrm{B}\mathrm{B}'+2A\mathrm{B}'\mathrm{B}''+2B\mathrm{B}''\mathrm{B}&=N,\\ \mathfrak{A}\mathrm{C}^2+\mathfrak{B}\mathrm{C}'^2+\mathfrak{C}\mathrm{C}''^2+2C\mathrm{C}\mathrm{C}'+2A\mathrm{C}'\mathrm{C}''+2B\mathrm{C}''\mathrm{C}&=N;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}'\mathrm{A}^2+\mathfrak{B}'\mathrm{B}^2+\mathfrak{C}'\mathrm{C}^2+2C'\mathrm{A}\mathrm{B}+2A'\mathrm{B}\mathrm{C}+2B'\mathrm{C}\mathrm{A}&=N',\\ \mathfrak{A}'\mathrm{A}'^2+\mathfrak{B}'\mathrm{B}'^2+\mathfrak{C}'\mathrm{C}'^2+2C'\mathrm{A}'\mathrm{B}'+2A'\mathrm{B}'\mathrm{C}'+2B'\mathrm{C}'\mathrm{A}'&=N',\\ \mathfrak{A}'\mathrm{A}''^2+\mathfrak{B}'\mathrm{B}''^2+\mathfrak{C}'\mathrm{C}''^2+2C'\mathrm{A}''\mathrm{B}''+2A'\mathrm{B}''\mathrm{C}''+2B'\mathrm{C}''\mathrm{A}''&=N';\end{aligned}$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned}&(\mathfrak{A}\mathrm{A}+C\mathrm{A}'+B\mathrm{A}'')(\mathfrak{A}\mathrm{B}+C\mathrm{B}'+B\mathrm{B}'')\\ &+(C\mathrm{A}+\mathfrak{B}\mathrm{A}'+A\mathrm{A}'')(C\mathrm{B}+\mathfrak{B}\mathrm{B}'+A\mathrm{B}'')\\ &+(B\mathrm{A}+A\mathrm{A}'+\mathfrak{C}\mathrm{A}'')(B\mathrm{B}+A\mathrm{B}'+\mathfrak{C}\mathrm{B}'')\\ &+\left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{A}\mathrm{A}+C\mathrm{A}'+B\mathrm{A}'')(C\mathrm{B}+\mathfrak{B}\mathrm{B}'+A\mathrm{B}'')\\ &+(C\mathrm{A}+\mathfrak{B}\mathrm{A}'+A\mathrm{A}'')(\mathfrak{A}\mathrm{B}+C\mathrm{B}'+B\mathrm{B}'')\end{aligned}\right\}\cos(xy)\\ &+\left\{\begin{aligned}&(C\mathrm{A}+\mathfrak{B}\mathrm{A}'+A\mathrm{A}'')(B\mathrm{B}+A\mathrm{B}'+\mathfrak{C}\mathrm{B}'')\\ &+(B\mathrm{A}+A\mathrm{A}'+\mathfrak{C}\mathrm{A}'')(C\mathrm{B}+\mathfrak{B}\mathrm{B}'+A\mathrm{B}'')\end{aligned}\right\}\cos(yz)\\ &+\left\{\begin{aligned}&(B\mathrm{A}+A\mathrm{A}'+\mathfrak{C}\mathrm{A}'')(\mathfrak{A}\mathrm{B}+C\mathrm{B}'+B\mathrm{B}'')\\ &+(\mathfrak{A}\mathrm{A}+C\mathrm{A}'+B\mathrm{A}'')(B\mathrm{B}+A\mathrm{B}'+\mathfrak{C}\mathrm{B}'')\end{aligned}\right\}\cos(zx)\end{aligned}\right\}=N^2\cos(x'y'),$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}\mathrm{B} + C\mathrm{B}' + B\mathrm{B}'')(\mathfrak{A}\mathrm{C} + C\mathrm{C}' + B\mathrm{C}'') \\
+(C\mathrm{B} + \mathfrak{B}\mathrm{B}' + A\mathrm{B}'')(C\mathrm{C} + \mathfrak{B}\mathrm{C}' + A\mathrm{C}'') \\
+(B\mathrm{B} + A\mathrm{B}' + \mathfrak{C}\mathrm{B}'')(B\mathrm{C} + A\mathrm{C}' + \mathfrak{C}\mathrm{C}'') \\
+\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{A}\mathrm{B}+C\mathrm{B}'+B\mathrm{B}'')(C\mathrm{C}+\mathfrak{B}\mathrm{C}'+A\mathrm{C}'') \\ +(C\mathrm{B}+\mathfrak{B}\mathrm{B}'+A\mathrm{B}'')(\mathfrak{A}\mathrm{C}+C\mathrm{C}'+B\mathrm{C}'') \end{array}\right\}\cos(xy) \\
+\left\{\begin{array}{l} (C\mathrm{B}+\mathfrak{B}\mathrm{B}'+A\mathrm{B}'')(B\mathrm{C}+A\mathrm{C}'+\mathfrak{C}\mathrm{C}'') \\ +(B\mathrm{B}+A\mathrm{B}'+\mathfrak{C}\mathrm{B}'')(C\mathrm{C}+\mathfrak{B}\mathrm{C}'+A\mathrm{C}'') \end{array}\right\}\cos(yz) \\
+\left\{\begin{array}{l} (B\mathrm{B}+A\mathrm{B}'+\mathfrak{C}\mathrm{B}'')(\mathfrak{A}\mathrm{C}+C\mathrm{C}'+B\mathrm{C}'') \\ +(\mathfrak{A}\mathrm{B}+C\mathrm{B}'+B\mathrm{B}'')(B\mathrm{C}+A\mathrm{C}'+\mathfrak{C}\mathrm{C}'') \end{array}\right\}\cos(zx)
\end{array}\right\} = N^2\cos(y'z'),$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}\mathrm{C} + C\mathrm{C}' + B\mathrm{C}'')(\mathfrak{A}\mathrm{A} + C\mathrm{A}' + B\mathrm{A}'') \\
+(C\mathrm{C} + \mathfrak{B}\mathrm{C}' + A\mathrm{C}'')(C\mathrm{A} + \mathfrak{B}\mathrm{A}' + A\mathrm{A}'') \\
+(B\mathrm{C} + A\mathrm{C}' + \mathfrak{C}\mathrm{C}'')(B\mathrm{A} + A\mathrm{A}' + \mathfrak{C}\mathrm{A}'') \\
+\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{A}\mathrm{C}+C\mathrm{C}'+B\mathrm{C}'')(C\mathrm{A}+\mathfrak{B}\mathrm{A}'+A\mathrm{A}'') \\ +(C\mathrm{C}+\mathfrak{B}\mathrm{C}'+A\mathrm{C}'')(\mathfrak{A}\mathrm{A}+C\mathrm{A}'+B\mathrm{A}'') \end{array}\right\}\cos(xy) \\
+\left\{\begin{array}{l} (C\mathrm{C}+\mathfrak{B}\mathrm{C}'+A\mathrm{C}'')(B\mathrm{A}+A\mathrm{A}'+\mathfrak{C}\mathrm{A}'') \\ +(B\mathrm{C}+A\mathrm{C}'+\mathfrak{C}\mathrm{C}'')(C\mathrm{A}+\mathfrak{B}\mathrm{A}'+A\mathrm{A}'') \end{array}\right\}\cos(yz) \\
+\left\{\begin{array}{l} (B\mathrm{C}+A\mathrm{C}'+\mathfrak{C}\mathrm{C}'')(\mathfrak{A}\mathrm{A}+C\mathrm{A}'+B\mathrm{A}'') \\ +(\mathfrak{A}\mathrm{C}+C\mathrm{C}'+B\mathrm{C}'')(B\mathrm{A}+A\mathrm{A}'+\mathfrak{C}\mathrm{A}'') \end{array}\right\}\cos(zx)
\end{array}\right\} = N^2\cos(z'x');$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}'\mathrm{A} + C'\mathrm{B} + B'\mathrm{C})(\mathfrak{A}'\mathrm{A}' + C'\mathrm{B}' + B'\mathrm{C}') \\
+(C'\mathrm{A} + \mathfrak{B}'\mathrm{B} + A'\mathrm{C})(C'\mathrm{A}' + \mathfrak{B}'\mathrm{B}' + A'\mathrm{C}') \\
+(B'\mathrm{A} + A'\mathrm{B} + \mathfrak{C}'\mathrm{C})(B'\mathrm{A}' + A'\mathrm{B}' + \mathfrak{C}'\mathrm{C}') \\
+\left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{A}'\mathrm{A}+C'\mathrm{B}+B'\mathrm{C})(C'\mathrm{A}'+\mathfrak{B}'\mathrm{B}'+A'\mathrm{C}') \\ +(C'\mathrm{A}+\mathfrak{B}'\mathrm{B}+A'\mathrm{C})(\mathfrak{A}'\mathrm{A}'+C'\mathrm{B}'+B'\mathrm{C}') \end{array}\right\}\cos(x'y') \\
+\left\{\begin{array}{l} (C'\mathrm{A}+\mathfrak{B}'\mathrm{B}+A'\mathrm{C})(B'\mathrm{A}'+A'\mathrm{B}'+\mathfrak{C}'\mathrm{C}') \\ +(B'\mathrm{A}+A'\mathrm{B}+\mathfrak{C}'\mathrm{C})(C'\mathrm{A}'+\mathfrak{B}'\mathrm{B}'+A'\mathrm{C}') \end{array}\right\}\cos(y'z') \\
+\left\{\begin{array}{l} (B'\mathrm{A}+A'\mathrm{B}+\mathfrak{C}'\mathrm{C})(\mathfrak{A}'\mathrm{A}'+C'\mathrm{B}'+B'\mathrm{C}') \\ +(\mathfrak{A}'\mathrm{A}+C'\mathrm{B}+B'\mathrm{C})(B'\mathrm{A}'+A'\mathrm{B}'+\mathfrak{C}'\mathrm{C}') \end{array}\right\}\cos(z'x')
\end{array}\right\} = N'^2\cos(xy),$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}'\mathrm{A}'+C'\mathrm{B}'+B'\mathrm{C}')(\mathfrak{A}'\mathrm{A}''+C'\mathrm{B}''+B'\mathrm{C}'')\\
+(C'\mathrm{A}'+\mathfrak{B}'\mathrm{B}'+A'\mathrm{C}')(C'\mathrm{A}''+\mathfrak{B}'\mathrm{B}''+A'\mathrm{C}'')\\
+(B'\mathrm{A}'+A'\mathrm{B}'+\mathfrak{C}'\mathrm{C}')(B'\mathrm{A}''+A'\mathrm{B}''+\mathfrak{C}'\mathrm{C}'')\\
+\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{A}'\mathrm{A}'+C'\mathrm{B}'+B'\mathrm{C}')(C'\mathrm{A}''+\mathfrak{B}'\mathrm{B}''+A'\mathrm{C}'')\\+(C'\mathrm{A}'+\mathfrak{B}'\mathrm{B}'+A'\mathrm{C}')(\mathfrak{A}'\mathrm{A}''+C'\mathrm{B}''+B'\mathrm{C}'')\end{array}\right\}\cos(x'y')\\
+\left\{\begin{array}{l}(C'\mathrm{A}'+\mathfrak{B}'\mathrm{B}'+A'\mathrm{C}')(B'\mathrm{A}''+A'\mathrm{B}''+\mathfrak{C}'\mathrm{C}'')\\+(B'\mathrm{A}'+A'\mathrm{B}'+\mathfrak{C}'\mathrm{C}')(C'\mathrm{A}''+\mathfrak{B}'\mathrm{B}''+A'\mathrm{C}'')\end{array}\right\}\cos(y'z')\\
+\left\{\begin{array}{l}(B'\mathrm{A}'+A'\mathrm{B}'+\mathfrak{C}'\mathrm{C}')(\mathfrak{A}'\mathrm{A}''+C'\mathrm{B}''+B'\mathrm{C}'')\\+(\mathfrak{A}'\mathrm{A}'+C'\mathrm{B}'+B'\mathrm{C}')(B'\mathrm{A}''+A'\mathrm{B}''+\mathfrak{C}'\mathrm{C}'')\end{array}\right\}\cos(z'x')
\end{array}\right\}=N'^2\cos(yz).$$

$$\left.\begin{array}{l}
(\mathfrak{A}'\mathrm{A}''+C'\mathrm{B}''+B'\mathrm{C}'')(\mathfrak{A}'\mathrm{A}+C'\mathrm{B}+B'\mathrm{C})\\
+(C'\mathrm{A}''+\mathfrak{B}'\mathrm{B}''+A'\mathrm{C}'')(C'\mathrm{A}+\mathfrak{B}'\mathrm{B}+A'\mathrm{C})\\
+(B'\mathrm{A}''+A'\mathrm{B}''+\mathfrak{C}'\mathrm{C}'')(B'\mathrm{A}+A'\mathrm{B}+\mathfrak{C}'\mathrm{C})\\
+\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{A}'\mathrm{A}''+C'\mathrm{B}''+B'\mathrm{C}'')(C'\mathrm{A}+\mathfrak{B}'\mathrm{B}+A'\mathrm{C})\\+(C'\mathrm{A}''+\mathfrak{B}'\mathrm{B}''+A'\mathrm{C}'')(\mathfrak{A}'\mathrm{A}+C'\mathrm{B}+B'\mathrm{C})\end{array}\right\}\cos(x'y')\\
+\left\{\begin{array}{l}(C'\mathrm{A}''+\mathfrak{B}'\mathrm{B}''+A'\mathrm{C}'')(B'\mathrm{A}+A'\mathrm{B}+\mathfrak{C}'\mathrm{C})\\+(B'\mathrm{A}''+A'\mathrm{B}''+\mathfrak{C}'\mathrm{C}'')(C'\mathrm{A}+\mathfrak{B}'\mathrm{B}+A'\mathrm{C})\end{array}\right\}\cos(y'z')\\
+\left\{\begin{array}{l}(B'\mathrm{A}''+A'\mathrm{B}''+\mathfrak{C}'\mathrm{C}'')(\mathfrak{A}'\mathrm{A}+C'\mathrm{B}+B'\mathrm{C})\\+(\mathfrak{A}'\mathrm{A}''+C'\mathrm{B}''+B'\mathrm{C}'')(B'\mathrm{A}+A'\mathrm{B}+\mathfrak{C}'\mathrm{C})\end{array}\right\}\cos(z'x')
\end{array}\right\}=N'^2\cos(zx).$$

Wenn die beiden Systeme rechtwinklig sind, so ist

$$\cos(xy)=0,\quad \cos(yz)=0,\quad \cos(zx)=0;$$

$$\cos(x'y')=0,\quad \cos(y'z')=0,\quad \cos(z'x')=0;$$

$$\mathfrak{A}=1,\quad \mathfrak{B}=1,\quad \mathfrak{C}=1;\quad \mathfrak{A}'=1,\quad \mathfrak{B}'=1,\quad \mathfrak{C}'=1;$$

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0;\quad A'=0,\quad B'=0,\quad C'=0;$$

$$N=1,\quad N'=1;$$

und die vorhergehenden Gleichungen gehen also in diesem Falle in die folgenden über:

$$A^2+A'^2+A''^2=1,$$
$$B^2+B'^2+B''^2=1,$$
$$C^2+C'^2+C''^2=1;$$

$$A^2+B^2+C^2=1,$$
$$A'^2+B'^2+C'^2=1,$$
$$A''^2+B''^2+C''^2=1;$$

$$AB+A'B'+A''B''=0,$$
$$BC+B'C'+B''C''=0,$$
$$CA+C'A'+C''A''=0;$$

$$AA'+BB'+CC'=0,$$
$$A'A''+B'B''+C'C''=0,$$
$$A''A+B''B+C''C=0;$$

welche längst bekannten merkwürdigen und wichtigen Gleichungen also unter unseren obigen ganz allgemeinen, für jedes beliebige schiefwinklige Coordinatensystem geltenden Gleichungen als ein besonderer Fall enthalten sind.

§. 11.

Wir wollen nun zunächst die Gleichungen der durch zwei gegebene Punkte $(f_0g_0h_0)$ und $(f_1g_1h_1)$ gehenden Geraden suchen.

Zu dem Ende sei (abc) ein beliebiger in der gesuchten Geraden liegender Punkt, und α, β, γ seien die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der eine der beiden von dem Punkte (abc) nach entgegengesetzten Richtungen hin ausgehenden Theile der gesuchten Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst. Setzen wir dann wie in 21):

$$X=\mathfrak{A}\cos\alpha+C\cos\beta+B\cos\gamma,$$

$$Y=C\cos\alpha+\mathfrak{B}\cos\beta+A\cos\gamma,$$

$$Z=B\cos\alpha+A\cos\beta+\mathfrak{C}\cos\gamma;$$

so sind nach 23) die Gleichungen der gesuchten Geraden:

$$\frac{x-a}{X}=\frac{y-b}{Y}=\frac{z-c}{Z};$$

und da nun diese Gerade durch die Punkte $(f_0g_0h_0)$ und $(f_1g_1h_1)$ gehen soll, so haben wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{f_0-a}{X}=\frac{g_0-b}{Y}=\frac{h_0-c}{Z},$$

$$\frac{f_1-a}{X}=\frac{g_1-b}{Y}=\frac{h_1-c}{Z};$$

aus denen sich durch Subtraction die Gleichungen

$$\frac{f_0-f_1}{X}=\frac{g_0-g_1}{Y}=\frac{h_0-h_1}{Z}$$

ergeben, indem man sich ausserdem mittelst des Obigen auf der Stelle überzeugt, dass die Gleichungen der gesuchten Geraden auch entweder unter der Form

$$\frac{x-f_0}{X}=\frac{y-g_0}{Y}=\frac{z-h_0}{Z}$$

oder unter der Form

$$\frac{x-f_1}{X}=\frac{y-g_1}{Y}=\frac{z-h_1}{Z}$$

dargestellt werden können. Aus den Gleichungen

$$\frac{f_0-f_1}{X}=\frac{g_0-g_1}{Y}=\frac{h_0-h_1}{Z}$$

ergiebt sich aber auf der Stelle, dass, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet,

$$X=G(f_0-f_1),\quad Y=G(g_0-g_1),\quad Z=G(h_0-h_1)$$

gesetzt werden kann, so dass also die Gleichungen unserer Geraden nach dem Obigen entweder unter der Form

$$47)\quad \ldots\ldots \quad \frac{x-f_0}{f_0-f_1}=\frac{y-g_0}{g_0-g_1}=\frac{z-h_0}{h_0-h_1}$$

oder unter der Form

$$48)\quad \ldots\ldots \quad \frac{x-f_1}{f_0-f_1}=\frac{y-g_1}{g_0-g_1}=\frac{z-h_1}{h_0-h_1}$$

dargestellt werden können, und also hiermit gefunden sind.

Um nun aber auch den Factor G zu bestimmen, bemerken wir, dass nach 29)

$$X^2+Y^2+Z^2+2XY\cos(xy)+2YZ\cos(yz)+2ZX\cos(zx)=N^2,$$

folglich nach dem Obigen:

$$G^2 \left\{ \begin{array}{l} (f_0-f_1)^2+(g_0-g_1)^2+(h_0-h_1)^2+2(f_0-f_1)(g_0-g_1)\cos(xy) \\ +2(g_0-g_1)(h_0-h_1)\cos(yz)+2(h_0-h_1)(f_0-f_1)\cos(zx) \end{array} \right\} = N^2,$$

und daher, weil nach 18), wenn $E_{0,1}$ die Entfernung der beiden Punkte $(f_0 g_0 h_0)$ und $(f_1 g_1 h_1)$ von einander bezeichnet:

$$49) \quad \ldots \quad E_{0,1}{}^2 = (f_0-f_1)^2+(g_0-g_1)^2+(h_0-h_1)^2$$
$$+2(f_0-f_1)(g_0-g_1)\cos(xy)+2(g_0-g_1)(h_0-h_1)\cos(yz)$$
$$+2(h_0-h_1)(f_0-f_1)\cos(zx)$$

ist,

$$50) \quad \ldots \ldots \quad G^2 E_{0,1}{}^2 = N^2, \quad \text{also} \quad G = \pm \frac{N}{E_{0,1}}$$

gesetzt werden kann, wo das Erscheinen des doppelten Zeichens ganz in der Natur der Sache begründet ist, weil ja die Winkel α, β, γ sowohl der einen, als auch der anderen Richtung der gesuchten Geraden entsprechen können, indem man jeder Geraden immer zwei von einem beliebigen Punkte in ihr ausgehende entgegengesetzte Richtungen beizulegen hat. Für X, Y, Z ergeben sich nun aus dem Obigen unmittelbar die folgenden Ausdrücke:

$$51) \quad X = \pm \frac{N(f_0-f_1)}{E_{0,1}}, \quad Y = \pm \frac{N(g_0-g_1)}{E_{0,1}}, \quad Z = \pm \frac{N(h_0-h_1)}{E_{0,1}};$$

und hieraus nach 32) ferner die folgenden Formeln:

$$52) \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha = \pm \dfrac{(f_0-f_1)+(g_0-g_1)\cos(xy)+(h_0-h_1)\cos(zx)}{E_{0,1}}, \\[2ex] \cos\beta = \pm \dfrac{(f_0-f_1)\cos(xy)+(g_0-g_1)+(h_0-h_1)\cos(yz)}{E_{0,1}}, \\[2ex] \cos\gamma = \pm \dfrac{(f_0-f_1)\cos(zx)+(g_0-g_1)\cos(yz)+(h_0-h_1)}{E_{0,1}}; \end{array} \right.$$

wodurch jetzt also die gesuchte Gerade vollkommen bestimmt ist.

§. 12.

Wenn a, b, c und K, L, M beliebige constante Grössen sind, so wird durch zwei Gleichungen von der Form

$$53) \quad \ldots \ldots \quad \frac{x-a}{K} = \frac{y-b}{L} = \frac{z-c}{M}$$

jederzeit eine durch den Punkt (abc) gehende Gerade charakterisirt.

Man nehme, um dies zu beweisen, in der durch die Gleichungen 53) charakterisirten Linie oder Curve zwei beliebige Punkte $(f_0 g_0 h_0)$ und $(f_1 g_1 h_1)$ an, und lege durch dieselben eine Gerade, deren Gleichungen nach 47) und 48)

$$\frac{x-f_0}{f_0-f_1}=\frac{y-g_0}{g_0-g_1}=\frac{z-h_0}{h_0-h_1}$$

oder

$$\frac{x-f_1}{f_0-f_1}=\frac{y-g_1}{g_0-g_1}=\frac{z-h_1}{h_0-h_1}$$

sind. Nun sei $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ ein beliebiger, aber bestimmter Punkt in der durch die Gleichungen 53) charakterisirten Curve, so ist

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{K}=\frac{\mathfrak{y}-b}{L}=\frac{\mathfrak{z}-c}{M}.$$

Weil die Punkte $(f_0 g_0 h_0)$ und $(f_1 g_1 h_1)$ gleichfalls in dieser Curve liegen, so ist:

$$\frac{f_0-a}{K}=\frac{g_0-b}{L}=\frac{h_0-c}{M},$$

$$\frac{f_1-a}{K}=\frac{g_1-b}{L}=\frac{h_1-c}{M};$$

also durch Subtraction:

$$\frac{f_0-f_1}{K}=\frac{g_0-g_1}{L}=\frac{h_0-h_1}{M},$$

und folglich, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$K=G(f_0-f_1),\quad L=G(g_0-g_1),\quad M=G(h_0-h_1);$$

also nach dem Obigen offenbar:

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{f_0-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-b}{g_0-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-c}{h_0-h_1}$$

und

$$\frac{f_0-a}{f_0-f_1}=\frac{g_0-b}{g_0-g_1}=\frac{h_0-c}{h_0-h_1},$$

$$\frac{f_1-a}{f_0-f_1}=\frac{g_1-b}{g_0-g_1}=\frac{h_1-c}{h_0-h_1};$$

folglich durch Subtraction:

$$\frac{\mathfrak{x}-f_0}{f_0-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-g_0}{g_0-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-h_0}{h_0-h_1},$$

$$\frac{\mathfrak{x}-f_1}{f_0-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-g_1}{g_0-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-h_1}{h_0-h_1};$$

woraus sich, in Verbindung mit dem Obigen, ergiebt, dass der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ in der durch die Punkte $(f_0g_0h_0)$ und $(f_1g_1h_1)$ gelegten Geraden liegt. Da nun $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ ein ganz beliebiger Punkt der durch die Gleichungen 53) charakterisirten Curve ist, so ist klar, dass jeder Punkt dieser Curve in der in Rede stehenden Geraden liegt, dass also diese Curve ganz mit der in Rede stehenden Geraden zusammenfällt, und daher selbst eine Gerade ist, wie bewiesen werden sollte. Dass der Punkt (abc) in dieser Geraden liegt, ist für sich klar.

Bezeichnen wir nun die von einer der beiden Richtungen der durch die Gleichungen 53) charakterisirten Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ, und setzen wie gewöhnlich

$$X = \mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma,$$
$$Y = C\cos\alpha + \mathfrak{B}\cos\beta + A\cos\gamma,$$
$$Z = B\cos\alpha + A\cos\beta + \mathfrak{C}\cos\gamma;$$

so sind die Gleichungen der durch die Gleichungen 53) charakterisirten Geraden nach 23) auch:

$$\frac{x-a}{X} = \frac{y-b}{Y} = \frac{z-c}{Z},$$

und wenn also G' einen gewissen Factor bezeichnet, so ist, wie sich aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit den Gleichungen 53) auf der Stelle ergiebt:

$$54) \quad \ldots \quad X = G'K, \quad Y = G'L, \quad Z = G'M;$$

also nach 29):

$$G'^2\{K^2+L^2+M^2+2KL\cos(xy)+2LM\cos(yz)+2MK\cos(zx)\} = N^2,$$

folglich:

55)

$$G' = \pm\frac{N}{\sqrt{K^2+L^2+M^2+2KL\cos(xy)+2LM\cos(yz)+2MK\cos(zx)}}.$$

Ferner ist nach 32) und 54):

$$\cos\alpha = \frac{G'\{K + L\cos(xy) + M\cos(zx)\}}{N},$$

$$\cos\beta = \frac{G'\{K\cos(xy) + L + M\cos(yz)\}}{N},$$

$$\cos\gamma = \frac{G'\{K\cos(zx) + L\cos(yz) + M\}}{N};$$

also nach 55):

56)

$$\cos\alpha = \pm\frac{K+L\cos(xy)+M\cos(zx)}{\sqrt{K^2+L^2+M^2+2KL\cos(xy)+2LM\cos(yz)+2MK\cos(zx)}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{K\cos(xy)+L+M\cos(yz)}{\sqrt{K^2+L^2+M^2+2KL\cos(xy)+2LM\cos(yz)+2MK\cos(zx)}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{K\cos(zx)+L\cos(yz)+M}{\sqrt{K^2+L^2+M^2+2KL\cos(xy)+2LM\cos(yz)+2MK\cos(zx)}}.$$

§. 13.

Es seien jetzt

$$57) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{x-a_0}{K_0}=\dfrac{y-b_0}{L_0}=\dfrac{z-c_0}{M_0}, \\ \dfrac{x-a_1}{K_1}=\dfrac{y-b_1}{L_1}=\dfrac{z-c_1}{M_1} \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Geraden.

Um die Bedingungen der Parallellität dieser beiden Geraden zu finden, bezeichne man die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche zwei gleichstimmige Richtungen derselben mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliessen, durch α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1; und setze:

$$X_0 = \mathfrak{A}\cos\alpha_0 + C\cos\beta_0 + B\cos\gamma_0,$$
$$Y_0 = C\cos\alpha_0 + \mathfrak{B}\cos\beta_0 + A\cos\gamma_0,$$
$$Z_0 = B\cos\alpha_0 + A\cos\beta_0 + \mathfrak{C}\cos\gamma_0$$

und

$$X_1 = \mathfrak{A}\cos\alpha_1 + C\cos\beta_1 + B\cos\gamma_1,$$
$$Y_1 = C\cos\alpha_1 + \mathfrak{B}\cos\beta_1 + A\cos\gamma_1,$$
$$Z_1 = B\cos\alpha_1 + A\cos\beta_1 + \mathfrak{C}\cos\gamma_1.$$

Dann sind nach 23) die Gleichungen der beiden durch die Gleichungen 57) charakterisirten Geraden auch:

$$\frac{x-a_0}{X_0}=\frac{y-b_0}{Y_0}=\frac{z-c_0}{Z_0},$$

$$\frac{x-a_1}{X_1}=\frac{y-b_1}{Y_1}=\frac{z-c_1}{Z_1};$$

und es ist also, wenn G_0 und G_1 zwei gewisse Factoren bezeichnen, offenbar:

$$X_0 = G_0 K_0, \quad Y_0 = G_0 L_0, \quad Z_0 = G_0 M_0;$$
$$X_1 = G_1 K_1, \quad Y_1 = G_1 L_1, \quad Z_1 = G_1 M_1.$$

Die Bedingungen der Parallellität der beiden Geraden sind offenbar:

$$\alpha_0 = \alpha_1, \quad \beta_0 = \beta_1, \quad \gamma_0 = \gamma_1;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$X_0 = X_1, \quad Y_0 = Y_1, \quad Z_0 = Z_1$$

oder:

$$G_0 K_0 = G_1 K_1, \quad G_0 L_0 = G_1 L_1, \quad G_0 M_0 = G_1 M_1;$$

woraus

$$58) \quad \ldots\ldots \quad \frac{K_0}{K_1} = \frac{L_0}{L_1} = \frac{M_0}{M_1}$$

folgt. Dass hierin drei Gleichungen, aber nur zwei von einander unabhängige, da offenbar eine jede aus den beiden anderen folgt, enthalten sind, braucht kaum noch besonders erinnert zu werden. Uebrigens kann man die drei in Rede stehenden Gleichungen auch auf folgende Art ausdrücken:

$$59) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} K_0 L_1 - L_0 K_1 = 0, \\ L_0 M_1 - M_0 L_1 = 0, \\ M_0 K_1 - K_0 M_1 = 0. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichung, dass die beiden durch die Gleichungen 57) charakterisirten Geraden auf einander senkrecht stehen, ist nach 46):

$$\left.\begin{array}{l} X_0 X_1 + Y_0 Y_1 + Z_0 Z_1 + (X_0 Y_1 + Y_0 X_1)\cos(xy) \\ \quad + (Y_0 Z_1 + Z_0 Y_1)\cos(yz) + (Z_0 X_1 + X_0 Z_1)\cos(zx) \end{array}\right\} = 0,$$

also, wenn man für X_0, Y_0, Z_0 und X_1, Y_1, Z_1 ihre obigen Ausdrücke einführt, und die Gleichung dann durch $G_0 G_1$ dividirt:

60)

$$\left.\begin{array}{l} K_0 K_1 + L_0 L_1 + M_0 M_1 + (K_0 L_1 + L_0 K_1)\cos(xy) \\ \quad + (L_0 M_1 + M_0 L_1)\cos(yz) + (M_0 K_1 + K_0 M_1)\cos(zx) \end{array}\right\} = 0.$$

Nach 27) und dem Obigen ist, wenn $W_{0,1}$ die von den durch die Gleichungen 57) charakterisirten Geraden eingeschlossenen Winkel bezeichnet, allgemein:

$$N^2 \cos W_{0,1} = G_0 G_1 \left\{ \begin{array}{c} K_0 K_1 + L_0 L_1 + M_0 M_1 \\ +2(K_0 L_1 + L_0 K_1)\cos(xy) \\ +2(L_0 M_1 + M_0 L_1)\cos(yz) \\ +2(M_0 K_1 + K_0 M_1)\cos(zx) \end{array} \right\}.$$

und nach 29) und dem Obigen ist offenbar ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$G_0 = \pm \frac{N}{\sqrt{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0 L_0 \cos(xy) + 2L_0 M_0 \cos(yz) + 2M_0 K_0 \cos(zx)}},$$

$$G_1 = \pm \frac{N}{\sqrt{K_1^2 + L_1^2 + M_1^2 + 2K_1 L_1 \cos(xy) + 2L_1 M_1 \cos(yz) + 2M_1 K_1 \cos(zx)}};$$

also ist:

60*) . . . . $\cos W_{0,1}$

$$= \pm \frac{\left\{ \begin{array}{l} K_0 K_1 + L_0 L_1 + M_0 M_1 + 2(K_0 L_1 + L_0 K_1)\cos(xy) \\ \quad + 2(L_0 M_1 + M_0 L_1)\cos(yz) + 2(M_0 K_1 + K_0 M_1)\cos(zx) \end{array} \right\}}{\sqrt{\begin{array}{l} \{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0 L_0 \cos(xy) + 2L_0 M_0 \cos(yz) + 2M_0 K_0 \cos(zx)\} \\ \times \{K_1^2 + L_1^2 + M_1^2 + 2K_1 L_1 \cos(xy) + 2L_1 M_1 \cos(yz) + 2M_1 K_1 \cos(zx)\} \end{array}}}$$

Wir wollen nun auch noch die Bedingungsgleichung des Schneidens der beiden durch die Gleichungen 57) charakterisirten Geraden suchen.

Die Gleichungen unserer beiden Geraden sind nach dem Obigen auch:

$$\frac{x - a_0}{X_0} = \frac{y - b_0}{Y_0} = \frac{z - c_0}{Z_0},$$

$$\frac{x - a_1}{X_1} = \frac{y - b_1}{Y_1} = \frac{z - c_1}{Z_1}.$$

Sollen nun die beiden Geraden sich schneiden, so müssen diese Gleichungen durch dieselben Werthe von x, y, z erfüllt werden können, und die Werthe von x, y, z, welche dieser Bedingung genügen, bestimmen dann die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Geraden. Setzen wir, dies vorausgesetzt,

$$\frac{x-a_0}{X_0}=\frac{y-b_0}{Y_0}=\frac{z-c_0}{Z_0}=G_0{}',$$

$$\frac{x-a_1}{X_1}=\frac{y-b_1}{Y_1}=\frac{z-c_1}{Z_1}=G_1{}';$$

so ist:

$$x-a_0=G_0{}'X_0,\qquad x-a_1=G_1{}'X_1,$$
$$y-b_0=G_0{}'Y_0,\qquad x-b_1=G_1{}'Y_1,$$
$$z-c_0=G_0{}'Z_0;\qquad x-c_1=G_1{}'Z_1;$$

also durch Subtraction:

$$a_0-a_1=G_1{}'X_1-G_0{}'X_0,$$
$$b_0-b_1=G_1{}'Y_1-G_0{}'Y_0,$$
$$c_0-c_1=G_1{}'Z_1-G_0{}'Z_0.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$Y_0Z_1-Z_0Y_1,\quad Z_0X_1-X_0Z_1,\quad X_0Y_1-Y_0X_1$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man als Bedingungsgleichung, dass die drei vorstehenden Gleichungen durch dieselben Werthe von $G_0{}'$ und $G_1{}'$ erfüllt werden können, die Gleichung:

61)

$$(a_0-a_1)(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(b_0-b_1)(Z_0X_1-X_0Z_1)$$
$$+(c_0-c_1)(X_0Y_1-Y_0X_1)=0,$$

welches die gesuchte Bedingungsgleichung des Schneidens ist.

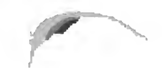
Führt man für X_0, Y_0, Z_0 und X_1, Y_1, Z_1 ihre obigen Ausdrücke ein und dividirt die Gleichung dann durch G_0G_1, so erhält man die folgende Bedingungsgleichung:

62)

$$(a_0-a_1)(L_0M_1-M_0L_1)+(b_0-b_1)(M_0K_1-K_0M_1)$$
$$+(c_0-c_1)(K_0L_1-L_0K_1)=0.$$

Nach 42) kann man die Gleichung 61) auch auf folgende Art drücken:

63)
$$\left.\begin{array}{l}(a_0-a_1)\{\mathrm{A}_{0,1}+\mathrm{B}_{0,1}\cos(xy)+\mathrm{C}_{0,1}\cos(zx)\}\\+(b_0-b_1)\{\mathrm{A}_{0,1}\cos(xy)+\mathrm{B}_{0,1}+\mathrm{C}_{0,1}\cos(yz)\}\\+(c_0-c_1)\{\mathrm{A}_{0,1}\cos(zx)+\mathrm{B}_{0,1}\cos(yz)+\mathrm{C}_{0,1}\}\end{array}\right\}=0.$$



Multiplicirt man die drei Gleichungen

$$a_0 - a_1 = G_1'X_1 - G_0'X_0,$$

$$b_0 - b_1 = G_1'Y_1 - G_0'Y_0,$$

$$c_0 - c_1 = G_1'Z_1 - G_0'Z_0$$

zuerst nach der Reihe mit

$$Y_1 - Z_1,\quad Z_1 - X_1,\quad X_1 - Y_1;$$

dann nach der Reihe mit

$$Y_0 - Z_0,\quad Z_0 - X_0,\quad X_0 - Y_0;$$

und addirt sie in beiden Fällen zu einander, so erhält man:

$$G_0' = -\frac{(a_0-a_1)(Y_1-Z_1)+(b_0-b_1)(Z_1-X_1)+(c_0-c_1)(X_1-Y_1)}{(X_0Y_1-Y_0X_1)+(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(Z_0X_1-X_0Z_1)},$$

$$G_1' = -\frac{(a_0-a_1)(Y_0-Z_0)+(b_0-b_1)(Z_0-X_0)+(c_0-c_1)(X_0-Y_0)}{(X_0Y_1-Y_0X_1)+(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(Z_0X_1-X_0Z_1)}.$$

Also ist nach dem Obigen:

64)

$$x-a_0 = -\frac{(a_0-a_1)(Y_1-Z_1)+(b_0-b_1)(Z_1-X_1)+(c_0-c_1)(X_1-Y_1)}{(X_0Y_1-Y_0X_1)+(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(Z_0X_1-X_0Z_1)}X_0,$$

$$y-b_0 = -\frac{(a_0-a_1)(Y_1-Z_1)+(b_0-b_1)(Z_1-X_1)+(c_0-c_1)(X_1-Y_1)}{(X_0Y_1-Y_0X_1)+(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(Z_0X_1-X_0Z_1)}Y_0,$$

$$z-c_0 = -\frac{(a_0-a_1)(Y_1-Z_1)+(b_0-b_1)(Z_1-X_1)+(c_0-c_1)(X_1-Y_1)}{(X_0Y_1-Y_0X_1)+(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(Z_0X_1-X_0Z_1)}Z_0$$

und

65)

$$x-a_1 = -\frac{(a_0-a_1)(Y_0-Z_0)+(b_0-b_1)(Z_0-X_0)+(c_0-c_1)(X_0-Y_0)}{(X_0Y_1-Y_0X_1)+(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(Z_0X_1-X_0Z_1)}X_1,$$

$$y-b_1 = -\frac{(a_0-a_1)(Y_0-Z_0)+(b_0-b_1)(Z_0-X_0)+(c_0-c_1)(X_0-Y_0)}{(X_0Y_1-Y_0X_1)+(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(Z_0X_1-X_0Z_1)}Y_1,$$

$$z-c_1 = -\frac{(a_0-a_1)(Y_0-Z_0)+(b_0-b_1)(Z_0-X_0)+(c_0-c_1)(X_0-Z_0)}{(X_0Y_1-Y_0X_1)+(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(Z_0X_1-X_0Z_1)}Z_1.$$

Führt man für X_0, Y_0, Z_0 und X_1, Y_1, Z_1 ihre obigen Werthe ein, so erhält man leicht:

66)

$$x-a_0=-\frac{(a_0-a_1)(L_1-M_1)+(b_0-b_1)(M_1-K_1)+(c_0-c_1)(K_1-L_1)}{(K_0L_1-L_0K_1)+(L_0M_1-M_0L_1)+(M_0K_1-K_0M_1)}K_0,$$

$$y-b_0=-\frac{(a_0-a_1)(L_1-M_1)+(b_0-b_1)(M_1-K_1)+(c_0-c_1)(K_1-L_1)}{(K_0L_1-L_0K_1)+(L_0M_1-M_0L_1)+(M_0K_1-K_0M_1)}L_0,$$

$$z-c_0=-\frac{(a_0-a_1)(L_1-M_1)+(b_0-b_1)(M_1-K_1)+(c_0-c_1)(K_1-L_1)}{(K_0L_1-L_0K_1)+(L_0M_1-M_0L_1)+(M_0K_1-K_0M_1)}M_0$$

und

67)

$$x-a_1=-\frac{(a_0-a_1)(L_0-M_0)+(b_0-b_1)(M_0-K_0)+(c_0-c_1)(K_0-L_0)}{(K_0L_1-L_0K_1)+(L_0M_1-M_0L_1)+(M_0K_1-K_0M_1)}K_1,$$

$$y-b_1=-\frac{(a_0-a_1)(L_0-M_0)+(b_0-b_1)(M_0-K_0)+(c_0-c_1)(K_0-L_0)}{(K_0L_1-L_0K_1)+(L_0M_1-M_0L_1)+(M_0K_1-K_0M_1)}L_1,$$

$$z-c_1=-\frac{(a_0-a_1)(L_0-M_0)+(b_0-b_1)(M_0-K_0)+(c_0-c_1)(K_0-L_0)}{(K_0L_1-L_0K_1)+(L_0M_1-M_0L_1)+(M_0K_1-K_0M_1)}M_1.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

68)

$$U_0=(a_0-a_1)(Y_0-Z_0)+(b_0-b_1)(Z_0-X_0)+(c_0-c_1)(X_0-Y_0),$$

$$U_1=(a_0-a_1)(Y_1-Z_1)+(b_0-b_1)(Z_1-X_1)+(c_0-c_1)(X_1-Y_1);$$

so ist nach 64) und 65):

$$\frac{x-a_0}{x-a_1}=\frac{U_1}{U_0}\cdot\frac{X_0}{X_1},\quad \frac{y-b_0}{y-b_1}=\frac{U_1}{U_0}\cdot\frac{Y_0}{Y_1},\quad \frac{z-c_0}{z-c_1}=\frac{U_1}{U_0}\cdot\frac{Z_0}{Z_1};$$

also:

$$69)\quad\ldots\quad\begin{cases} x=\dfrac{a_0U_0X_1-a_1U_1X_0}{U_0X_1-U_1X_0}, \\[2ex] y=\dfrac{b_0U_0Y_1-b_1U_1Y_0}{U_0Y_1-U_1Y_0}, \\[2ex] z=\dfrac{c_0U_0Z_1-c_1U_1Z_0}{U_0Z_1-U_1Z_0}. \end{cases}$$

Auf ähnliche Art ist, wenn wir

70)

$$V_0=(a_0-a_1)(L_0-M_0)+(b_0-b_1)(M_0-K_0)+(c_0-c_1)(K_0-L_0),$$

$$V_1=(a_0-a_1)(L_1-M_1)+(b_0-b_1)(M_1-K_1)+(c_0-c_1)(K_1-L_1)$$

setzen, nach 66) und 67):

$$\frac{x-a_0}{x-a_1}=\frac{V_1}{V_0}\cdot\frac{K_0}{K_1},\quad \frac{y-b_0}{y-b_1}=\frac{V_1}{V_0}\cdot\frac{L_0}{L_1},\quad \frac{z-c_0}{z-c_1}=\frac{V_1}{V_0}\cdot\frac{M_0}{M_1};$$

also:

$$71)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{a_0V_0K_1-a_1V_1K_0}{V_0K_1-V_1K_0},\\ y=\dfrac{b_0V_0L_1-b_1V_1L_0}{V_0L_1-V_1L_0},\\ z=\dfrac{c_0V_0M_1-c_1V_1M_0}{V_0M_1-V_1M_0}. \end{array}\right.$$

§. 14.

Wir wollen jetzt die Gleichungen der Geraden suchen, welche durch den gegebenen Punkt $(a_1b_1c_1)$ geht, und auf der durch die Gleichungen

$$72)\quad\ldots\ldots\quad \frac{x-a_0}{K_0}=\frac{y-b_0}{L_0}=\frac{z-c_0}{M_0}$$

charakterisirten Geraden senkrecht steht; zugleich sollen die Coordinaten des Durchschnittspunkts des Perpendikels mit der gegebenen Geraden, und die Entfernung des Punktes $(a_1b_1c_1)$ von derselben bestimmt werden.

Bezeichnen wir wieder durch α_0, β_0, γ_0 die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Richtungen der gegebenen Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, und setzen:

$$X_0=\mathfrak{A}\cos\alpha_0+C\cos\beta_0+B\cos\gamma_0,$$

$$Y_0=C\cos\alpha_0+\mathfrak{B}\cos\beta_0+A\cos\gamma_0,$$

$$Z_0=B\cos\alpha_0+A\cos\beta_0+\mathfrak{C}\cos\gamma_0;$$

so ist wie früher:

$$X_0=G_0K_0,\quad Y_0=G_0L_0,\quad Z_0=G_0M_0;$$

und die Gleichungen der durch die Gleichungen 72) charakterisirten Geraden sind also auch:

$$\frac{x-a_0}{X_0}=\frac{y-b_0}{Y_0}=\frac{z-c_0}{Z_0}.$$

Bezeichnen ferner α_1, β_1, γ_1 die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Richtungen des gesuchten Perpendikels mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, und wird

$$X_1 = \mathfrak{A}\cos\alpha_1 + C\cos\beta_1 + B\cos\gamma_1,$$

$$Y_1 = C\cos\alpha_1 + \mathfrak{B}\cos\beta_1 + A\cos\gamma_1,$$

$$Z_1 = B\cos\alpha_1 + A\cos\beta_1 + \mathfrak{C}\cos\gamma_1$$

gesetzt; so sind bekanntlich im Allgemeinen

$$\frac{x-a_1}{X_1} = \frac{y-b_1}{Y_1} = \frac{z-c_1}{Z_1}$$

die Gleichungen des gesuchten Perpendikels.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Geraden durch u, v, w, so ist:

$$\frac{u-a_0}{X_0} = \frac{v-b_0}{Y_0} = \frac{w-c_0}{Z_0},$$

$$\frac{u-a_1}{X_1} = \frac{v-b_1}{Y_1} = \frac{w-c_1}{Z_1};$$

und die Bedingung der Perpendicularität ist bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{r} X_0X_1 + Y_0Y_1 + Z_0Z_1 + (X_0Y_1 + Y_0X_1)\cos(xy) \\ +(Y_0Z_1 + Z_0Y_1)\cos(yz) \\ +(Z_0X_1 + X_0Z_1)\cos(zx) \end{array}\right\} = 0.$$

Setzen wir nun

$$\frac{u-a_1}{X_1} = \frac{v-b_1}{Y_1} = \frac{w-c_1}{Z_1} = \frac{1}{G_1},$$

so ist:

$$X_1 = G_1(u-a_1), \quad Y_1 = G_1(v-b_1), \quad Z_1 = G_1(w-c_1);$$

also wegen der vorstehenden Bedingungsgleichung der Perpendicularität:

$$\left.\begin{array}{l} (u-a_1)X_0 + (v-b_1)Y_0 + (w-c_1)Z_0 \\ +\{(v-b_1)X_0 + (u-a_1)Y_0\}\cos(xy) \\ +\{(w-c_1)Y_0 + (v-b_1)Z_0\}\cos(yz) \\ +\{(u-a_1)Z_0 + (w-c_1)X_0\}\cos(zx) \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{r} \{X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)\}(u - a_1) \\ + \{X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)\}(v - b_1) \\ + \{X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0\}(w - c_1) \end{array}\right\} = 0,$$

also:

$$\begin{aligned} &\{X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)\}(u - a_0) \\ +&\{X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)\}(v - b_0) \\ +&\{X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0\}(w - c_0) \\ = \;&\{X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)\}(a_1 - a_0) \\ +&\{X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)\}(b_1 - b_0) \\ +&\{X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0\}(c_1 - c_0). \end{aligned}$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$\frac{u - a_0}{X_0} = \frac{v - b_0}{Y_0} = \frac{w - c_0}{Z_0},$$

und überlegt, dass

$$\begin{aligned} &\{X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)\}X_0 \\ +&\{X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)\}Y_0 \\ +&\{X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0\}Z_0 \end{aligned}$$

$$= X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 + 2X_0Y_0\cos(xy) + 2Y_0Z_0\cos(yz) + 2Z_0X_0\cos(zx) = N^2$$

ist; so erhält man zur Bestimmung von u, v, w die folgenden Formeln:

73)

$$N^2.(u - a_0) = \left\{\begin{array}{r} [X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)](a_1 - a_0) \\ + [X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)](b_1 - b_0) \\ + [X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0](c_1 - c_0) \end{array}\right\} X_0,$$

$$N^2.(v - b_0) = \left\{\begin{array}{r} [X_0 + Y_0\cos(xy) + Y_0\cos(zx)](a_1 - a_0) \\ + [X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)](b_1 - b_0) \\ + [X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0](c_1 - c_0) \end{array}\right\} Y_0,$$

$$N^2.(w - c_0) = \left\{\begin{array}{r} [X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)](a_1 - a_0) \\ + [X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)](b_1 - b_0) \\ + [X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0](c_1 - c_0) \end{array}\right\} Z_0.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$74) \ldots \mathfrak{U} = \{X_0 + Y_0 \cos(xy) + Z_0 \cos(zx)\}(a_1 - a_0)$$
$$+ \{X_0 \cos(xy) + Y_0 + Z_0 \cos(yz)\}(b_1 - b_0)$$
$$+ \{X_0 \cos(zx) + Y_0 \cos(yz) + Z_0\}(c_1 - c_0),$$

so ist auch:

$$75) \ldots \left\{ \begin{array}{l} N^2.(a_1 - u) = N^2.(a_1 - a_0) - \mathfrak{U} X_0, \\ N^2.(b_1 - v) = N^2.(b_1 - b_0) - \mathfrak{U} Y_0, \\ N^2.(c_1 - w) = N^2.(c_1 - c_0) - \mathfrak{U} Z_0. \end{array} \right.$$

Bezeichnet nun P die Länge des von dem Punkte $(a_1 b_1 c_1)$ auf die gegebene Gerade gefällten Perpendikels, so ist nach 18) bekanntlich:

$$P^2 = (a_1 - u)^2 + (b_1 - v)^2 + (c_1 - w)^2 + 2(a_1 - u)(b_1 - v)\cos(xy)$$
$$+ 2(b_1 - v)(c_1 - w)\cos(yz)$$
$$+ 2(c_1 - w)(a_1 - u)\cos(zx),$$

und folglich, weil nach 75)

$$a_1 - u = a_1 - a_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} X_0,$$

$$b_1 - v = b_1 - b_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} Y_0,$$

$$c_1 - w = c_1 - c_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} Z_0$$

ist:

$$P^2 = (a_1 - a_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} X_0)^2 + (b_1 - b_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} Y_0)^2 + (c_1 - c_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} Z_0)^2$$

$$+ 2(a_1 - a_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} X_0)(b_1 - b_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} Y_0)\cos(xy)$$

$$+ 2(b_1 - b_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} Y_0)(c_1 - c_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} Z_0)\cos(yz)$$

$$+ 2(c_1 - c_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} Z_0)(a_1 - a_0 - \frac{\mathfrak{U}}{N^2} X_0)\cos(zx).$$

Ueberlegt man, dass, wenn $E_{0,1}$ die Entfernung der beiden Punkte $(a_0 b_0 c_0)$ und $(a_1 b_1 c_1)$ von einander bezeichnet, nach 18)

$$E_{0,1}{}^2 = (a_1-a_0)^2+(b_1-b_0)^2+(c_1-c_0)^2+2(a_1-a_0)(b_1-b_0)\cos(xy)$$
$$+2(b_1-b_0)(c_1-c_0)\cos(yz)$$
$$+2(c_1-c_0)(a_1-a_0)\cos(zx),$$

dass ferner offenbar

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} = \quad & (a_1-a_0)X_0+(b_1-b_0)Y_0+(c_1-c_0)Z_0\\ &+\{(a_1-a_0)Y_0+(b_1-b_0)X_0\}\cos(xy)\\ &+\{(b_1-b_0)Z_0+(c_1-c_0)Y_0\}\cos(yz)\\ &+\{(c_1-c_0)X_0+(a_1-a_0)Z_0\}\cos(zx),\end{aligned}$$

und endlich, dass

$$N^2 = X_0{}^2+Y_0{}^2+Z_0{}^2+2X_0Y_0\cos(xy)+2Y_0Z_0\cos(yz)+2Z_0X_0\cos(zx)$$

ist; so erhält man durch leichte Entwickelung des obigen Ausdrucks von P^2 auf der Stelle die Gleichung:

$$P^2 = E_{0,1}{}^2 - 2\frac{\mathfrak{U}^2}{N^2}+\frac{\mathfrak{U}^2}{N^2} = E_{0,1}{}^2-\left(\frac{\mathfrak{U}}{N}\right)^2,$$

also:

$$76) \quad \ldots\ldots \quad P=\sqrt{E_{0,1}{}^2-\left(\frac{\mathfrak{U}}{N}\right)^2}.$$

Nun ist aber bekanntlich auch

$$X_1{}^2+Y_1{}^2+Z_1{}^2+2X_1Y_1\cos(xy)+2Y_1Z_1\cos(yz)+2Z_1X_1\cos(zx)=N^2,$$

also nach dem Obigen:

$$G_1{}^2\left\{\begin{aligned}(u-a_1)^2+(v-b_1)^2+(w-c_1)^2+2(u-a_1)(v-b_1)\cos(xy)\\ +2(v-b_1)(w-c_1)\cos(yz)\\ +2(w-c_1)(u-a_1)\cos(zx)\end{aligned}\right\}=N^2,$$

folglich offenbar

$$77) \quad \ldots \quad G_1{}^2P^2=N^2, \text{ also } G_1=\pm\frac{N}{P};$$

und daher:

$$78) \quad X_1=\pm\frac{N(u-a_1)}{P}, \quad Y_1=\pm\frac{N(v-b_1)}{P}, \quad Z_1=\pm\frac{N(w-c_1)}{P};$$

also weil nach 75):

$$u-a_1=a_0-a_1+\frac{\mathfrak{U}}{N^2}X_0,$$

$$v-b_1=b_0-b_1+\frac{\mathfrak{U}}{N^2}Y_0,$$

$$w-c_1=c_0-c_1+\frac{\mathfrak{U}}{N^2}Z_0$$

ist:

$$79)\quad\ldots\quad\begin{cases} X_1=\pm\frac{N}{P}(a_0-a_1+\frac{\mathfrak{U}}{N^2}X_0),\\ Y_1=\pm\frac{N}{P}(b_0-b_1+\frac{\mathfrak{U}}{N^2}Y_0),\\ Z_1=\pm\frac{N}{P}(c_0-c_1+\frac{\mathfrak{U}}{N^2}Z_0). \end{cases}$$

Endlich ist nach 32):

$$\cos\alpha_1=\frac{X_1+Y_1\cos(xy)+Z_1\cos(zx)}{N},$$

$$\cos\beta_1=\frac{X_1\cos(xy)+Y_1+Z_1\cos(yz)}{N},$$

$$\cos\gamma_1=\frac{X_1\cos(zx)+Y_1\cos(yz)+Z_1}{N};$$

und man erhält daher mittelst der Formeln 79) leicht die folgenden Ausdrücke:

80)

$$P\cos\alpha_1=\pm\begin{Bmatrix} (a_0-a_1)+(b_0-b_1)\cos(xy)+(c_0-c_1)\cos(zx)\\ +\frac{\mathfrak{U}}{N^2}[X_0+Y_0\cos(xy)+Z_0\cos(zx)] \end{Bmatrix},$$

$$P\cos\beta_1=\pm\begin{Bmatrix} (a_0-a_1)\cos(xy)+(b_0-b_1)+(c_0-c_1)\cos(yz)\\ +\frac{\mathfrak{U}}{N^2}[X_0\cos(xy)+Y_0+Z_0\cos(yz)] \end{Bmatrix},$$

$$P\cos\gamma_1=\pm\begin{Bmatrix} (a_0-a_1)\cos(zx)+(b_0-b_1)\cos(yz)+(c_0-c_1)\\ +\frac{\mathfrak{U}}{N^2}[X_0\cos(zx)+Y_0\cos(yz)+Z_0] \end{Bmatrix};$$

oder auch, weil

$$\cos\alpha_0 = \frac{X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)}{N},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)}{N},$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0}{N}$$

ist:

81)

$$\cos\alpha_1 = \pm\frac{(a_0-a_1) + (b_0-b_1)\cos(xy) + (c_0-c_1)\cos(zx) + \frac{\mathfrak{U}}{N}\cos\alpha_0}{P},$$

$$\cos\beta_1 = \pm\frac{(a_0-a_1)\cos(xy) + (b_0-b_1) + (c_0-c_1)\cos(yz) + \frac{\mathfrak{U}}{N}\cos\beta_0}{P},$$

$$\cos\gamma_1 = \pm\frac{(a_0-a_1)\cos(zx) + (b_0-b_1)\cos(yz) + (c_0-c_1) + \frac{\mathfrak{U}}{N}\cos\gamma_0}{P}.$$

In alle diesen Formeln könnte man nun statt X_0, Y_0, Z_0 auch leicht K_0, L_0, M_0 einführen, denn weil

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 + 2X_0Y_0\cos(xy) + 2Y_0Z_0\cos(yz) + 2Z_0X_0\cos(zx) = N^2$$

ist, so ist nach dem Obigen:

$$G_0^2\{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0L_0\cos(xy) + 2L_0M_0\cos(yz) + 2M_0K_0\cos(zx)\} = N^2,$$

also:

82) . . . . $$G_0 = \pm\frac{N}{\sqrt{K_0^2+L_0^2+M_0^2+2K_0L_0\cos(xy)+2L_0M_0\cos(yz)+2M_0K_0\cos(zx)}},$$

und folglich:

83) . . . . $$X_0 = \pm\frac{NK_0}{\sqrt{K_0^2+L_0^2+M_0^2+2K_0L_0\cos(xy)+2L_0M_0\cos(yz)+2M_0K_0\cos(zx)}},$$

$$Y_0 = \pm\frac{NL_0}{\sqrt{K_0^2+L_0^2+M_0^2+2K_0L_0\cos(xy)+2L_0M_0\cos(yz)+2M_0K_0\cos(zx)}},$$

$$Z_0 = \pm\frac{NM_0}{\sqrt{K_0^2+L_0^2+M_0^2+2K_0L_0\cos(xy)+2L_0M_0\cos(yz)+2M_0K_0\cos(zx)}}.$$

Offenbar ist nach dem Vorhergehenden auch:

84)

$$\mathfrak{U} = N\{(a_1 - a_0)\cos\alpha_0 + (b_1 - b_0)\cos\beta_0 + (c_1 - c_0)\cos\gamma_0\},$$

folglich nach 76):

85)

$$P = \sqrt{E_{0,1}{}^2 - \{(a_0 - a_1)\cos\alpha_0 + (b_0 - b_1)\cos\beta_0 + (c_0 - c_1)\cos\gamma_0\}^2},$$

welcher Ausdruck also für jedes ganz beliebige Coordinatensystem gilt. Den aus 84) folgenden Ausdruck:

86)

$$\frac{\mathfrak{U}}{N} = (a_1 - a_0)\cos\alpha_0 + (b_1 - b_0)\cos\beta_0 + (c_1 - c_0)\cos\gamma_0$$

kann man leicht in die Formeln 81) und auch in die unmittelbar aus 79) sich ergebenden Formeln:

$$87) \ldots\ldots \begin{cases} X_1 = \pm \dfrac{1}{P}\{(a_0 - a_1)N + \dfrac{\mathfrak{U}}{N}X_0\}, \\ Y_1 = \pm \dfrac{1}{P}\{(b_0 - b_1)N + \dfrac{\mathfrak{U}}{N}Y_0\}, \\ Z_1 = \pm \dfrac{1}{P}\{(c_0 - c_1)N + \dfrac{\mathfrak{U}}{N}Z_0\} \end{cases}$$

einführen.

Die Gleichungen des von dem Punkte $(a_1 b_1 c_1)$ auf die gegebene Gerade gefällten Perpendikels sind:

$$88) \ldots\ldots \frac{x - a_1}{X_1} = \frac{y - b_1}{Y_1} = \frac{z - c_1}{Z_1},$$

also nach 87):

89)

$$\frac{x - a_1}{(a_0 - a_1)N + \frac{\mathfrak{U}}{N}X_0} = \frac{y - b_1}{(b_0 - b_1)N + \frac{\mathfrak{U}}{N}Y_0} = \frac{z - c_1}{(c_0 - c_1)N + \frac{\mathfrak{U}}{N}Z_0},$$

die man leicht noch auf verschiedene Arten schreiben könnte.

§. 15.

Wir wollen nun die kürzeste Entfernung der beiden durch die Gleichungen

$$90) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-a_0}{K_0}=\frac{y-b_0}{L_0}=\frac{z-c_0}{M_0}, \\ \frac{x-a_1}{K_1}=\frac{y-b_1}{L_1}=\frac{z-c_1}{M_1} \end{array} \right.$$

charakterisirten Geraden von einander, welche bekanntlich die auf diesen beiden Geraden zugleich senkrecht stehende Gerade ist, bestimmen.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine der beiden Richtungen der ersten und der zweiten Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, respective durch $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; und setzen

$$91) \ldots \left\{ \begin{array}{l} X_0=\mathfrak{A}\cos\alpha_0+C\cos\beta_0+B\cos\gamma_0, \\ Y_0=C\cos\alpha_0+\mathfrak{B}\cos\beta_0+A\cos\gamma_0, \\ Z_0=B\cos\alpha_0+A\cos\beta_0+\mathfrak{C}\cos\gamma_0 \end{array} \right.$$

und

$$92) \ldots \left\{ \begin{array}{l} X_1=\mathfrak{A}\cos\alpha_1+C\cos\beta_1+B\cos\gamma_1, \\ Y_1=C\cos\alpha_1+\mathfrak{B}\cos\beta_1+A\cos\gamma_1, \\ Z_1=B\cos\alpha_1+A\cos\beta_1+\mathfrak{C}\cos\gamma_1; \end{array} \right.$$

so sind die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden bekanntlich auch:

$$93) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-a_0}{X_0}=\frac{y-b_0}{Y_0}=\frac{z-c_0}{Z_0}, \\ \frac{x-a_1}{X_1}=\frac{y-b_1}{Y_1}=\frac{z-c_1}{Z_1}; \end{array} \right.$$

und wenn wir ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$94) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad G_0=$$

$$\pm\frac{N}{\sqrt{K_0^2+L_0^2+M_0^2+2K_0L_0\cos(xy)+2L_0M_0\cos(yz)+2M_0K_0\cos(zx)}},$$

$$G_1=$$

$$\pm\frac{N}{\sqrt{K_1^2+L_1^2+M_1^2+2K_1L_1\cos(xy)+2L_1M_1\cos(yz)+2M_1K_1\cos(zx)}}$$

setzen; so ist:

$$95) \ldots \begin{cases} X_0 = G_0 K_0, & Y_0 = G_0 L_0, & Z_0 = G_0 M_0; \\ X_1 = G_1 K_1, & Y_1 = G_1 L_1, & Z_1 = G_1 M_1. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Durchschnittspunkte der kürzesten Entfernung mit den beiden gegebenen Geraden durch x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1, so sind nach 47) oder 48) die Gleichungen der kürzesten Entfernung:

$$\frac{x - x_0}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_0 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_0 - z_1}$$

oder

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_0 - z_1};$$

auch haben wir die folgenden Gleichungen:

$$\frac{x_0 - a_0}{X_0} = \frac{y_0 - b_0}{Y_0} = \frac{z_0 - c_0}{Z_0} = G_0',$$

$$\frac{x_1 - a_1}{X_1} = \frac{y_1 - b_1}{Y_1} = \frac{z_1 - c_1}{Z_1} = G_1'.$$

Weil die kürzeste Entfernung auf den beiden gegebenen Geraden senkrecht steht, so haben wir wegen ihrer obigen Gleichungen und der zweiten und dritten der Gleichungen 46) offenbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$(x_0 - x_1)\cos\alpha_0 + (y_0 - y_1)\cos\beta_0 + (z_0 - z_1)\cos\gamma_0 = 0,$$

$$(x_0 - x_1)\cos\alpha_1 + (y_0 - y_1)\cos\beta_1 + (z_0 - z_1)\cos\gamma_1 = 0;$$

also, weil nach dem Vorhergehenden:

$$x_0 - a_0 = G_0' X_0, \quad y_0 - b_0 = G_0' Y_0, \quad z_0 - c_0 = G_0' Z_0;$$

$$x_1 - a_1 = G_1' X_1, \quad y_1 - b_1 = G_1' Y_1, \quad z_1 - c_1 = G_1' Z_1$$

und folglich

$$x_0 - x_1 = a_0 - a_1 + G_0' X_0 - G_1' X_1,$$

$$y_0 - y_1 = b_0 - b_1 + G_0' Y_0 - G_1' Y_1,$$

$$z_0 - z_1 = c_0 - c_1 + G_0' Z_0 - G_1' Z_1$$

ist:

$$\left.\begin{array}{l} (a_0 - a_1)\cos\alpha_0 + (b_0 - b_1)\cos\beta_0 + (c_0 - c_1)\cos\gamma_0 \\ \quad + (X_0\cos\alpha_0 + Y_0\cos\beta_0 + Z_0\cos\gamma_0)\,G_0' \\ \quad - (X_1\cos\alpha_0 + Y_1\cos\beta_0 + Z_1\cos\gamma_0)\,G_1' \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(a_0-a_1)\cos\alpha_1+(b_0-b_1)\cos\beta_1+(c_0-c_1)\cos\gamma_1\\ \quad+(X_0\cos\alpha_1+Y_0\cos\beta_1+Z_0\cos\gamma_1)G_0'\\ \quad-(X_1\cos\alpha_1+Y_1\cos\beta_1+Z_1\cos\gamma_1)G_1'\end{array}\right\}=0.$$

Nach 35) ist:

$$X_0\cos\alpha_0+Y_0\cos\beta_0+Z_0\cos\gamma_0=N,$$
$$X_1\cos\alpha_1+Y_1\cos\beta_1+Z_1\cos\gamma_1=N;$$

und wenn wir den von den beiden gegebenen Geraden eingeschlossenen Winkel, welcher den beiden durch die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 bestimmten Richtungen derselben entspricht, durch $W_{0,1}$ bezeichnen, so ist nach 36):

$$X_0\cos\alpha_1+Y_0\cos\beta_1+Z_0\cos\gamma_1=N\cos W_{0,1},$$
$$X_1\cos\alpha_0+Y_1\cos\beta_0+Z_1\cos\gamma_0=N\cos W_{0,1}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$(a_1-a_0)\cos\alpha_0+(b_1-b_0)\cos\beta_0+(c_1-c_0)\cos\gamma_0$$
$$=NG_0'-\cos W_{0,1}.NG_1',$$

$$(a_1-a_0)\cos\alpha_1+(b_1-b_0)\cos\beta_1+(c_1-c_0)\cos\gamma_1$$
$$=\cos W_{0,1}.NG_0'-NG_1';$$

mittelst welcher beiden Gleichungen NG_0' und NG_1', also auch G_0' und G_1' bestimmt werden können.

Nach leichter Rechnung erhält man auf diese Weise:

96)

$$\sin W_{0,1}{}^2.NG_0'=\left\{\begin{array}{l}\quad(a_1-a_0)(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos W_{0,1})\\+(b_1-b_0)(\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos W_{0,1})\\+(c_1-c_0)(\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos W_{0,1}),\end{array}\right.$$

$$\sin W_{0,1}{}^2.NG_1'=-\left\{\begin{array}{l}\quad(a_1-a_0)(\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos W_{0,1})\\+(b_1-b_0)(\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos W_{0,1})\\+(c_1-c_0)(\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos W_{0,1}).\end{array}\right.$$

Hat man auf diese Art G_0' und G_1' bestimmt, so ist nach dem Obigen:

$$97)\quad\left\{\begin{array}{l}x_0=a_0+G_0'X_0,\quad y_0=b_0+G_0'Y_0,\quad z_0=c_0+G_0'Z_0;\\ x_1=a_1+G_1'X_1,\quad y_1=b_1+G_1'Y_1,\quad z_1=c_1+G_1'Z_1;\end{array}\right.$$

wo man für X_0, Y_0, Z_0 und X_1, Y_1, Z_1 auch ihre Werthe aus 91) und 92) oder aus 95) einführen kann.

Will man die Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1 ganz eliminiren, so hat man nach 32) die folgenden Formeln:

98)

$$\cos\alpha_0 = \frac{X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)}{N},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)}{N},$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0}{N};$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{X_1 + Y_1\cos(xy) + Z_1\cos(zx)}{N},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{X_1\cos(xy) + Y_1 + Z_1\cos(yz)}{N},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{X_1\cos(zx) + Y_1\cos(yz) + Z_1}{N}$$

oder, wo keine Beziehung der Zeichen auf einander in den beiden folgenden Systemen Statt findet:

99) . . . . $\cos\alpha_0$

$$= \pm\frac{K_0 + L_0\cos(xy) + M_0\cos(zx)}{\sqrt{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0L_0\cos(xy) + 2L_0M_0\cos(yz) + 2M_0K_0\cos(zx)}},$$

$$\cos\beta_0$$

$$= \pm\frac{K_0\cos(xy) + L_0 + M_0\cos(yz)}{\sqrt{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0L_0\cos(xy) + 2L_0M_0\cos(yz) + 2M_0K_0\cos(zx)}},$$

$$\cos\gamma_0$$

$$= \pm\frac{K_0\cos(zx) + L_0\cos(yz) + M_0}{\sqrt{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0L_0\cos(xy) + 2L_0M_0\cos(yz) + 2M_0K_0\cos(zx)}};$$

$$\cos\alpha_1$$

$$= \pm\frac{K_1 + L_1\cos(xy) + M_1\cos(zx)}{\sqrt{K_1^2 + L_1^2 + M_1^2 + 2K_1L_1\cos(xy) + 2L_1M_1\cos(yz) + 2M_1K_1\cos(zx)}},$$

$$\cos\beta_1$$

$$= \pm\frac{K_1\cos(xy) + L_1 + M_1\cos(yz)}{\sqrt{K_1^2 + L_1^2 + M_1^2 + 2K_1L_1\cos(xy) + 2L_1M_1\cos(yz) + 2M_1K_1\cos(zx)}},$$

$$\cos\gamma_1$$

$$= \pm\frac{K_1\cos(zx) + L_1\cos(yz) + M_1}{\sqrt{K_1^2 + L_1^2 + M_1^2 + 2K_1L_1\cos(xy) + 2L_1M_1\cos(yz) + 2M_1K_1\cos(zx)}}$$

in Anwendung zu bringen.



Aus den beiden Gleichungen

$$(x_0-x_1)\cos\alpha_0+(y_0-y_1)\cos\beta_0+(z_0-z_1)\cos\gamma_0=0,$$
$$(x_0-x_1)\cos\alpha_1+(y_0-y_1)\cos\beta_1+(z_0-z_1)\cos\gamma_1=0$$

folgt, wenn $G_{0,1}$ einen gewissen Factor bezeichnet:

$$x_0-x_1=G_{0,1}(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1),$$
$$y_0-y_1=G_{0,1}(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1),$$
$$z_0-z_1=G_{0,1}(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1);$$

oder nach 38):

$$100) \quad . \quad . \quad x_0-x_1=G_{0,1}\mathrm{A}_{0,1}, \quad y_0-y_1=G_{0,1}\mathrm{B}_{0,1},$$
$$z_0-z_1=G_{0,1}\mathrm{C}_{0,1}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$G_{0,1}\mathrm{A}_{0,1}=a_0-a_1+G_0'X_0-G_1'X_1,$$
$$G_{0,1}\mathrm{B}_{0,1}=b_0-b_1+G_0'Y_0-G_1'Y_1,$$
$$G_{0,1}\mathrm{C}_{0,1}=c_0-c_1+G_0'Z_0-G_1'Z_1;$$

woraus, wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$Y_0Z_1-Z_0Y_1, \quad Z_0X_1-X_0Z_1, \quad X_0Y_1-Y_0X_1$$

multiplicirt, und dann zu einander addirt, auf der Stelle der folgende Ausdruck erhalten wird:

$$101) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad G_{0,1}=$$

$$\frac{(a_0-a_1)(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+(b_0-b_1)(Z_0X_1-X_0Z_1)+(c_0-c_1)(X_0Y_1-Y_0X_1)}{\mathrm{A}_{0,1}(Y_0Z_1-Z_0Y_1)+\mathrm{B}_{0,1}(Z_0X_1-X_0Z_1)+\mathrm{C}_{0,1}(X_0Y_1-Y_0X_1)}.$$

Folglich ist nach 42):

102)

$$G_{0,1}=\frac{\begin{array}{c}\{\mathrm{A}_{0,1}+\mathrm{B}_{0,1}\cos(xy)+\mathrm{C}_{0,1}\cos(zx)\}(a_0-a_1)\\ +\{\mathrm{A}_{0,1}\cos(xy)+\mathrm{B}_{0,1}+\mathrm{C}_{0,1}\cos(yz)\}(b_0-b_1)\\ +\{\mathrm{A}_{0,1}\cos(zx)+\mathrm{B}_{0,1}\cos(yz)+\mathrm{C}_{0,1}\}(c_0-c_1)\end{array}}{\left\{\begin{array}{c}\mathrm{A}_{0,1}^2+\mathrm{B}_{0,1}^2+\mathrm{C}_{0,1}^2+2\mathrm{A}_{0,1}\mathrm{B}_{0,1}\cos(xy)+2\mathrm{B}_{0,1}\mathrm{C}_{0,1}\cos(yz)\\ +2\mathrm{C}_{0,1}\mathrm{A}_{0,1}\cos(zx)\end{array}\right\}}.$$

Bezeichnen wir jetzt die kürzeste Entfernung der beiden gegebenen Geraden von einander durch $E_{0,1}$, so ist nach 18) und 100):

$$E_{0,1}{}^2 = G_{0,1}{}^2 \{ A_{0,1}{}^2 + B_{0,1}{}^2 + C_{0,1}{}^2 + 2A_{0,1} B_{0,1} \cos(xy) + 2B_{0,1} C_{0,1} \cos(yz) + 2C_{0,1} A_{0,1} \cos(zx) \},$$

also nach 102), wenn man in dem folgenden Ausdrucke das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem der Zähler des Bruchs positiv oder negativ ist:

103)

$$E_{0,1} = \pm \frac{\begin{array}{l} \{A_{0,1} + B_{0,1} \cos(xy) + C_{0,1} \cos(zx)\}(a_0 - a_1) \\ + \{A_{0,1} \cos(xy) + B_{0,1} + C_{0,1} \cos(yz)\}(b_0 - b_1) \\ + \{A_{0,1} \cos(zx) + B_{0,1} \cos(yz) + C_{0,1}\}(c_0 - c_1) \end{array}}{\sqrt{\left\{ \begin{array}{l} A_{0,1}{}^2 + B_{0,1}{}^2 + C_{0,1}{}^2 + 2A_{0,1} B_{0,1} \cos(xy) \\ + 2B_{0,1} C_{0,1} \cos(yz) + 2C_{0,1} A_{0,1} \cos(zx) \end{array} \right\}}}.$$

Nach 44) ist

104)

$$\sin W_{0,1} \cdot \sqrt{N} = \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} A_{0,1}{}^2 + B_{0,1}{}^2 + C_{0,1}{}^2 + 2A_{0,1} B_{0,1} \cos(xy) \\ + 2B_{0,1} C_{0,1} \cos(yz) + 2C_{0,1} A_{0,1} \cos(zx) \end{array} \right\}},$$

was man auch in den vorigen Ausdruck für den Nenner einführen könnte.

Aus 103) und 42), in Verbindung mit 104), erhält man auch leicht:

105)

$$E_{0,1} = \pm \frac{\left\{ \begin{array}{l} (Y_0 Z_1 - Z_0 Y_1)(a_0 - a_1) + (Z_0 X_1 - X_0 Z_1)(b_0 - b_1) \\ + (X_0 Y_1 - Y_0 X_1)(c_0 - c_1) \end{array} \right\}}{\sin W_{0,1} \cdot N\sqrt{N}},$$

und kann für X_0, Y_0, Z_0 und X_1, Y_1, Z_1 in diese Formel auch leicht die Ausdrücke 95) in Verbindung mit 94) einführen.

Zweites Kapitel.

Die Ebene.

§. 16.

Um die allgemeine Gleichung der Ebene zu finden, wollen wir dieselbe betrachten als den Ort aller der Geraden, welche auf

einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte derselben senkrecht stehen, so dass wir uns also die Ebene beschrieben oder entstanden denken durch den einen Schenkel eines um seinen andern, als eine feste Gerade im Raume gedachten Schenkel sich herumbewegenden rechten Winkels. Demnach denken wir uns, um die allgemeine Gleichung der Ebene zu entwickeln, eine durch den Punkt (abc) gehende feste Gerade, deren eine Richtung mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschliesst. Die Gleichungen dieser Geraden sind nach I. 13):

$$\frac{(x-a)+(y-b)\cos(xy)+(z-c)\cos(zx)}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{(x-a)\cos(xy)+(y-b)+(z-c)\cos(yz)}{\cos\beta}$$

$$=\frac{(x-a)\cos(zx)+(y-b)\cos(yz)+(z-c)}{\cos\gamma}.$$

Die Gleichungen einer zweiten durch den Punkt (abc) gehenden beliebigen Geraden seien:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(x-a)+(y-b)\cos(xy)+(z-c)\cos(zx)}{\cos\theta}\\ =&\frac{(x-a)\cos(xy)+(y-b)+(z-c)\cos(yz)}{\cos\omega}\\ =&\frac{(x-a)\cos(zx)+(y-b)\cos(yz)+(z-c)}{\cos\varpi}\end{aligned}\right\}=G.$$

Soll nun die zweite Gerade auf der ersten senkrecht stehen, so muss nach I. 46), wenn wir

$$X=\mathfrak{A}\cos\alpha+C\cos\beta+B\cos\gamma,$$
$$Y=C\cos\alpha+\mathfrak{B}\cos\beta+A\cos\gamma,$$
$$Z=B\cos\alpha+A\cos\beta+\mathfrak{C}\cos\gamma$$

und

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{A}\cos\theta+C\cos\omega+B\cos\varpi,$$
$$\mathfrak{Y}=C\cos\theta+\mathfrak{B}\cos\omega+A\cos\varpi,$$
$$\mathfrak{Z}=B\cos\theta+A\cos\omega+\mathfrak{C}\cos\varpi$$

setzen,

$$\left.\begin{aligned}&X\mathfrak{X}+Y\mathfrak{Y}+Z\mathfrak{Z}\\ &+(X\mathfrak{Y}+Y\mathfrak{X})\cos(xy)+(Y\mathfrak{Z}+Z\mathfrak{Y})\cos(yz)+(Z\mathfrak{X}+X\mathfrak{Z})\cos(zx)\end{aligned}\right\}=0$$

sein, welche Gleichung, weil die zweite Gerade nicht als fest und unveränderlich wie die erste aufgefasst wird, unabhängig von bestimmten Werthen von θ, ω, ϖ Statt finden muss.

Nach dem Obigen ist aber:

$$G\cos\theta=(x-a)+(y-b)\cos(xy)+(z-c)\cos(zx),$$

$$G\cos\omega=(x-a)\cos(xy)+(y-b)+(z-c)\cos(yz),$$

$$G\cos\varpi=(x-a)\cos(zx)+(y-b)\cos(yz)+(z-c);$$

also:

$$\begin{aligned}G\mathfrak{X}= &\{\mathfrak{A}+C\cos(xy)+B\cos(zx)\}(x-a)\\ &+\{\mathfrak{A}\cos(xy)+C+B\cos(yz)\}(y-b)\\ &+\{\mathfrak{A}\cos(zx)+C\cos(yz)+B\}(z-c),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\mathfrak{Y}= &\{C+\mathfrak{B}\cos(xy)+A\cos(zx)\}(x-a)\\ &+\{C\cos(xy)+\mathfrak{B}+A\cos(yz)\}(y-b)\\ &+\{C\cos(zx)+\mathfrak{B}\cos(yz)+A\}(z-c),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G\mathfrak{Z}= &\{B+A\cos(xy)+\mathfrak{C}\cos(zx)\}(x-a)\\ &+\{B\cos(xy)+A+\mathfrak{C}\cos(yz)\}(y-b)\\ &+\{B\cos(zx)+A\cos(yz)+\mathfrak{C}\}(z-c);\end{aligned}$$

und mittelst leichter Rechnung findet man:

$$1)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}&\mathfrak{A}+C\cos(xy)+B\cos(zx)=N,\\ &\mathfrak{A}\cos(xy)+C+B\cos(yz)=0,\\ &\mathfrak{A}\cos(zx)+C\cos(yz)+B=0;\end{aligned}\right.$$

$$2)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}&C+\mathfrak{B}\cos(xy)+A\cos(zx)=0,\\ &C\cos(xy)+\mathfrak{B}+A\cos(yz)=N,\\ &C\cos(zx)+\mathfrak{B}\cos(yz)+A=0;\end{aligned}\right.$$

$$3)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}&B+A\cos(xy)+\mathfrak{C}\cos(zx)=0,\\ &B\cos(xy)+A+\mathfrak{C}\cos(yz)=0,\\ &B\cos(zx)+A\cos(yz)+\mathfrak{C}=N;\end{aligned}\right.$$

also nach dem Obigen:

$$G\mathfrak{X}=N(x-a),\quad G\mathfrak{Y}=N(y-b),\quad G\mathfrak{Z}=N(z-c).$$

Wir haben daher, wenn wir die obige Gleichung zwischen X, Y, Z und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ mit G multipliciren und für $G\mathfrak{X}$, $G\mathfrak{Y}$, $G\mathfrak{Z}$ ihre vorstehenden Werthe setzen, die folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} X(x-a)+Y(y-b)+Z(z-c) \\ +[X(y-b)+Y(x-a)]\cos(xy) \\ +[Y(z-c)+Z(y-b)]\cos(yz) \\ +[Z(x-a)+X(z-c)]\cos(zx) \end{array}\right\} . N=0,$$

Also ist die gesuchte Gleichung der Ebene:

$$4) \ldots \left.\begin{array}{l} X(x-a)+Y(y-b)+Z(z-c) \\ +\{X(y-b)+Y(x-a)\}\cos(xy) \\ +\{Y(z-c)+Z(y-b)\}\cos(yz) \\ +\{Z(x-a)+X(z-c)\}\cos(zx) \end{array}\right\} =0$$

oder:

$$5) \ldots \left.\begin{array}{l} \{X+Y\cos(xy)+Z\cos(zx)\}(x-a) \\ +\{X\cos(xy)+Y+Z\cos(yz)\}(y-b) \\ +\{X\cos(zx)+Y\cos(yz)+Z\}(z-c) \end{array}\right\} =0.$$

Nach I. 31) ist aber:

$$X+Y\cos(xy)+Z\cos(zx)=N\cos\alpha,$$

$$X\cos(xy)+Y+Z\cos(yz)=N\cos\beta,$$

$$X\cos(zx)+Y\cos(yz)+Z=N\cos\gamma;$$

also ist:

$$6) \ldots (x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma=0$$

die Gleichung der Ebene.

Geht diese Ebene überhaupt durch den Punkt (fgh), so dass also dieser Punkt ein Punkt der Ebene ist, so ist nach 6):

$$(f-a)\cos\alpha+(g-b)\cos\beta+(h-c)\cos\gamma=0,$$

folglich, wenn man diese Gleichung von 6) abzieht:

$$7) \ldots (x-f)\cos\alpha+(y-g)\cos\beta+(z-h)\cos\gamma=0$$

die Gleichung der Ebene.

§. 17.

Jede durch eine Gleichung von der Form

$$8) \quad \ldots\ldots \quad K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

charakterisirte Fläche ist eine durch den Punkt (abc) gehende Ebene.

Man nehme in der durch die Gleichung 8) charakterisirten Fläche zwei beliebige Punkte $(f_0 g_0 h_0)$ und $(f_1 g_1 h_1)$ an, so ist:

$$K(f_0-a)+L(g_0-b)+M(h_0-c)=0,$$
$$K(f_1-a)+L(g_1-b)+M(h_1-c)=0;$$

also durch Subtraction:

$$K(f_0-f_1)+L(g_0-g_1)+M(h_0-h_1)=0.$$

Legt man nun durch die beiden Punkte $(f_0 g_0 h_0)$ und $(f_1 g_1 h_1)$ eine Gerade, so sind nach §. 11. deren Gleichungen:

$$\frac{x-f_0}{f_0-f_1}=\frac{y-g_0}{g_0-g_1}=\frac{z-h_0}{h_0-h_1}$$

oder

$$\frac{x-f_1}{f_0-f_1}=\frac{y-g_1}{g_0-g_1}=\frac{z-h_1}{h_0-h_1},$$

und wenn also jetzt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ einen beliebigen, aber bestimmten Punkt dieser Geraden bezeichnet, so ist:

$$\frac{\mathfrak{x}-f_0}{f_0-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-g_0}{g_0-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-h_0}{h_0-h_1}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{x}-f_1}{f_0-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-g_1}{g_0-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-h_1}{h_0-h_1};$$

also, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$f_0-f_1=G(\mathfrak{x}-f_0),\quad g_0-g_1=G(\mathfrak{y}-g_0),\quad h_0-h_1=G(\mathfrak{z}-h_0);$$

und folglich nach dem Obigen:

$$K(\mathfrak{x}-f_0)+L(\mathfrak{y}-g_0)+M(\mathfrak{z}-h_0)=0.$$

Addirt man hierzu die aus dem Obigen bekannte Gleichung:

$$K(f_0-a)+L(g_0-b)+M(h_0-c)=0,$$

so erhält man die Gleichung

$$K(\mathfrak{x}-a)+L(\mathfrak{y}-b)+M(\mathfrak{z}-c)=0,$$

und sieht also, dass der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ die Gleichung

$$K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

befriedigt, folglich in der durch dieselbe charakterisirten Fläche liegt. Da nun die Punkte $(f_0g_0h_0)$ und $(f_1g_1h_1)$ in dieser Fläche beliebig angenommen worden sind, und da $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ ein ganz willkührlicher Punkt in der durch diese beiden Punkte gehenden Geraden ist, so sieht man, dass jede durch irgend zwei Punkte in der in Rede stehenden Fläche gezogene Gerade ihrer ganzen Ausdehnung nach in diese Fläche fällt, diese Fläche folglich eine Ebene ist, wie bewiesen werden sollte. Dass aber diese Ebene durch den Punkt (abc) geht, oder dass dieser Punkt in derselben liegt, versteht sich von selbst, weil die Gleichung

$$K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

durch die Werthe a, b, c der Coordinaten x, y, z erfüllt wird.

§. 18.

Wir wollen jetzt die Bedingungsgleichungen suchen, welche erfüllt sein müssen, wenn eine Ebene und eine Gerade, deren Gleichungen beziehungsweise

$$9) \quad . \; . \; . \quad K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

und

$$10) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{x-a_0}{K_0}=\frac{y-b_0}{L_0}=\frac{z-c_0}{M_0}$$

sind, auf einander senkrecht stehen sollen.

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Richtungen der durch die Gleichungen 10) charakterisirten Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch α_0, β_0, γ_0; so ist nach §. 16. die Gleichung der durch den Punkt (abc) gehenden, auf der in Rede stehenden Geraden senkrecht stehenden Ebene:

$$(x-a)\cos\alpha_0+(y-b)\cos\beta_0+(z-c)\cos\gamma_0=0 \;{}^{*});$$

---

*) Zum Ueberfluss kann man, dass im Allgemeinen durch die Gleichung

$$1) \quad . \; . \; . \quad (x-f)\cos\alpha+(y-g)\cos\beta+(z-h)\cos\gamma=0$$

eine durch den Punkt (fgh) gehende Ebene dargestellt wird, welche auf einer Geraden, deren eine Richtung mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschliesst, senkrecht steht, jetzt noch besonders auf folgende Art beweisen.

Dass die in Rede stehende Gleichung eine durch den Punkt (fgh)

und da nun mit dieser Ebene die durch die Gleichung 9) charakterisirte, gleichfalls durch den Punkt (abc) gehende Ebene zusammenfallen muss, wenn sie auf der durch die Gleichungen 10) charakterisirten Geraden senkrecht stehen soll, so muss, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

---

gehende Ebene darstellt, folgt unmittelbar aus §. 17. Ist nun (abc) der Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Geraden, deren eine Richtung mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ einschliesst, so ist nach 1):

$$2) \quad \ldots \quad (a-f)\cos\alpha+(b-g)\cos\beta+(c-h)\cos\gamma=0,$$

also, wenn man 2) von 1) subtrahirt:

$$3) \quad \ldots . \quad (x-a)\cos\alpha+(y-b)\cos\beta+(z-c)\cos\gamma=0$$

die Gleichung der Ebene. Zieht man nun von irgend einem Punkte (xyz) dieser Ebene nach dem Punkte (abc) eine Gerade, und bezeichnet die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine Richtung dieser Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch θ, ω, ϖ, so sind bekanntlich

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(x-a)+(y-b)\cos(xy)+(z-c)\cos(zx)}{\cos\theta}\\ =&\frac{(x-a)\cos(xy)+(y-b)+(z-c)\cos(yz)}{\cos\omega}\\ =&\frac{(x-a)\cos(zx)+(y-b)\cos(yz)+(z-c)}{\cos\varpi}\end{aligned}\right\}=G$$

die Gleichungen dieser Geraden, und wir können also setzen:

$$\begin{aligned}(x-a)+(y-b)\cos(xy)+(z-c)\cos(zx)&=G\cos\theta,\\ (x-a)\cos(xy)+(y-b)+(z-c)\cos(yz)&=G\cos\omega,\\ (x-a)\cos(zx)+(y-b)\cos(yz)+(z-c)&=G\cos\varpi;\end{aligned}$$

wo jetzt x, y, z die Coordinaten des in Rede stehenden, in der Ebene angenommenen Punktes bezeichnen. Multipliciren wir diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\mathfrak{A},\ C,\ B;\quad C,\ \mathfrak{B},\ A;\quad B,\ A,\ \mathfrak{C}$$

und addire sie in jedem Falle zu einander, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen §. 16. 1), 2), 3) und die dortigen Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$:

$$N(x-a)=G\mathfrak{X},\quad N(y-b)=G\mathfrak{Y},\quad N(z-c)=G\mathfrak{Z};$$

also wegen der Gleichung 3):

$$\mathfrak{X}\cos\alpha+\mathfrak{Y}\cos\beta+\mathfrak{Z}\cos\gamma=0,$$

und folglich nach I. 32):

$$K = G\cos\alpha_0,\quad L = G\cos\beta_0,\quad M = G\cos\gamma_0$$

sein. Setzen wir nun

$$X_0 = \mathfrak{A}\cos\alpha_0 + C\cos\beta_0 + B\cos\gamma_0,$$
$$Y_0 = C\cos\alpha_0 + \mathfrak{B}\cos\beta_0 + A\cos\gamma_0,$$
$$Z_0 = B\cos\alpha_0 + A\cos\beta_0 + \mathfrak{C}\cos\gamma_0;$$

so sind die Gleichungen der durch die Gleichungen 10) charakterisirten Geraden bekanntlich auch:

$$\frac{x-a_0}{X_0} = \frac{y-b_0}{Y_0} = \frac{z-c_0}{Z_0},$$

und es ist folglich, wenn G_0 einen gewissen Factor bezeichnet:

$$K_0 = G_0 X_0,\quad L_0 = G_0 Y_0,\quad M_0 = G_0 Z_0;$$

also:

$$K_0 = G_0(\mathfrak{A}\cos\alpha_0 + C\cos\beta_0 + B\cos\gamma_0),$$
$$L_0 = G_0(C\cos\alpha_0 + \mathfrak{B}\cos\beta_0 + A\cos\gamma_0),$$
$$M_0 = G_0(B\cos\alpha_0 + A\cos\beta_0 + \mathfrak{C}\cos\gamma_0);$$

folglich nach dem Obigen:

$$K_0 = \frac{G_0}{G}(K\mathfrak{A} + LC + MB),$$

$$L_0 = \frac{G_0}{G}(KC + L\mathfrak{B} + MA),$$

$$M_0 = \frac{G_0}{G}(KB + LA + M\mathfrak{C});$$

also sind die gesuchten Bedingungsgleichungen offenbar:

$$11)\quad \frac{K_0}{K\mathfrak{A}+LC+MB} = \frac{L_0}{KC+L\mathfrak{B}+MA} = \frac{M_0}{KB+LA+M\mathfrak{C}}.$$

Aus den vorstehenden Ausdrücken von K_0, L_0, M_0 folgt auch:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{X}\{X + Y\cos(xy) + Z\cos(zx)\} \\ +\mathfrak{Y}\{X\cos(xy) + Y + Z\cos(yz)\} \\ +\mathfrak{Z}\{X\cos(zx) + Y\cos(yz) + Z\} \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z} \\ +(X\mathfrak{Y}+Y\mathfrak{X})\cos(xy) + (Y\mathfrak{Z}+Z\mathfrak{Y})\cos(yz) + (Z\mathfrak{X}+X\mathfrak{Z})\cos(zx) \end{array}\right\} = 0.$$

Folglich stehen nach I. 46) die beiden vorher betrachteten Geraden auf einander senkrecht, und da dies in gleicher Weise von jeder in der Ebene gezogenen Geraden gilt, so ist der Satz bewiesen.

$$K_0+L_0\cos(xy)+M_0\cos(zx)$$

$$=\frac{G_0}{G}\left\{\begin{array}{l} K[\mathfrak{A}+C\cos(xy)+B\cos(zx)] \\ +L[C+\mathfrak{B}\cos(xy)+A\cos(zx)] \\ +M[B+A\cos(xy)+\mathfrak{C}\cos(zx)] \end{array}\right\},$$

$$K_0\cos(xy)+L_0+M_0\cos(yz)$$

$$=\frac{G_0}{G}\left\{\begin{array}{l} K[\mathfrak{A}\cos(xy)+C+B\cos(yz)] \\ +L[C\cos(xy)+\mathfrak{B}+A\cos(yz)] \\ +M[B\cos(xy)+A+\mathfrak{C}\cos(yz)] \end{array}\right\},$$

$$K_0\cos(zx)+L_0\cos(yz)+M_0$$

$$=\frac{G_0}{G}\left\{\begin{array}{l} K[\mathfrak{A}\cos(zx)+C\cos(yz)+B] \\ +L[C\cos(zx)+\mathfrak{B}\cos(yz)+A] \\ +M[B\cos(zx)+A\cos(yz)+\mathfrak{C}] \end{array}\right\};$$

folglich nach 1), 2), 3):

$$K_0+L_0\cos(xy)+M_0\cos(zx)=\frac{G_0}{G}NK,$$

$$K_0\cos(xy)+L_0+M_0\cos(yz)=\frac{G_0}{G}NL,$$

$$K_0\cos(zx)+L_0\cos(yz)+M_0=\frac{G_0}{G}NM;$$

daher lassen sich die gesuchten Bedingungsgleichungen auch auf folgende Art ausdrücken:

11*) . . . . . .
$$\frac{K}{K_0+L_0\cos(xy)+M_0\cos(zx)}$$
$$=\frac{L}{K_0\cos(xy)+L_0+M_0\cos(yz)}$$
$$=\frac{M}{K_0\cos(zx)+L_0\cos(yz)+M_0}.$$

Nach dem Vorhergehenden haben wir zugleich die folgenden Relationen:

11**)

$$NKK_0=(K\mathfrak{A}+LC+MB)\{K_0+L_0\cos(xy)+M_0\cos(zx)\},$$
$$NLL_0=(KC+L\mathfrak{B}+MA)\{K_0\cos(xy)+L_0+M_0\cos(yz)\},$$
$$NMM_0=(KB+LA+M\mathfrak{C})\{K_0\cos(zx)+L_0\cos(yz)+M_0\};$$

welche dazu dienen, die Grössen

$$K\mathfrak{A}+LC+MB,\quad KC+L\mathfrak{B}+MA,\quad KB+LA+M\mathfrak{C}$$

durch die Grössen

$$K_0+L_0\cos(xy)+M_0\cos(zx),\quad K_0\cos(xy)+L_0+M_0\cos(yz),$$
$$K_0\cos(zx)+L_0\cos(yz)+M_0$$

auszudrücken, und umgekehrt.

§. 19.

Es sei jetzt wieder

$$12)\ \ldots\ldots\ K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

die Gleichung einer Ebene, und nun die Gerade zu bestimmen, welche durch den gegebenen Punkt $(a_0b_0c_0)$ geht, und auf der durch diese Gleichung gegebenen Ebene senkrecht steht.

Die von der einen der beiden Richtungen der gesuchten Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien α_0, β_0, γ_0; so ist nach §. 16. die Gleichung der durch die Gleichung 12) charakterisirten Ebene auch:

$$(x-a)\cos\alpha_0+(y-b)\cos\beta_0+(z-c)\cos\gamma_0=0,$$

also, wenn G_0 einen gewissen Factor bezeichnet, nach 12):

$$\cos\alpha_0=G_0K,\quad \cos\beta_0=G_0L,\quad \cos\gamma_0=G_0M.$$

Setzen wir nun

$$X_0=\mathfrak{A}\cos\alpha_0+C\cos\beta_0+B\cos\gamma_0,$$
$$Y_0=C\cos\alpha_0+\mathfrak{B}\cos\beta_0+A\cos\gamma_0,$$
$$Z_0=B\cos\alpha_0+A\cos\beta_0+\mathfrak{C}\cos\gamma_0;$$

so ist nach I. 33):

$$X_0\cos\alpha_0+Y_0\cos\beta_0+Z_0\cos\gamma_0=N,$$

also nach dem Obigen:

$$G_0(KX_0+LY_0+MZ_0)=N.$$

Zugleich ist aber

$$X_0=G_0(\mathfrak{A}K+CL+BM),$$
$$Y_0=G_0(CK+\mathfrak{B}L+AM),$$
$$Z_0=G_0(BK+AL+\mathfrak{C}M);$$

also:

$$KX_0+LY_0+MZ_0=G_0(\mathfrak{A}K^2+\mathfrak{B}L^2+\mathfrak{C}M^2+2CKL+2ALM+2BMK),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$13)\quad G_0=\pm\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{A}K^2+\mathfrak{B}L^2+\mathfrak{C}M^2+2CKL+2ALM+2BMK}},$$

woraus dann ferner α_0, β_0, γ_0 mittelst der Formeln:

$$14)\ \ldots\ \cos\alpha_0=G_0K,\quad \cos\beta_0=G_0L,\quad \cos\gamma_0=G_0M$$

gefunden werden, und daher die gesuchte, durch den Punkt $(a_0b_0c_0)$ gehende Gerade vollkommen bestimmt ist.

Die Gleichungen dieser Geraden sind nach I. 23):

$$\frac{x-a_0}{X_0}=\frac{y-b_0}{Y_0}=\frac{z-c_0}{Z_0},$$

also nach dem Obigen:

$$15)\quad \frac{x-a_0}{\mathfrak{A}K+CL+BM}=\frac{y-b_0}{CK+\mathfrak{B}L+AM}=\frac{z-c_0}{BK+AL+\mathfrak{C}M}.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts des Perpendikels mit der gegebenen Ebene durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; so haben wir zu deren Bestimmung nach 12) und 15) die folgenden Gleichungen:

$$K(\mathfrak{x}-a)+L(\mathfrak{y}-b)+M(\mathfrak{z}-c)=0,$$

$$\frac{\mathfrak{x}-a_0}{\mathfrak{A}K+CL+BM}=\frac{\mathfrak{y}-b_0}{CK+\mathfrak{B}L+AM}=\frac{\mathfrak{z}-c_0}{BK+AL+\mathfrak{C}M};$$

deren erste man auch unter der folgenden Form darstellen kann:

$$K(\mathfrak{x}-a_0)+L(\mathfrak{y}-b_0)+M(\mathfrak{z}-c_0)=K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0);$$

und setzt man nun der Kürze wegen:

$$\frac{\mathfrak{x}-a_0}{\mathfrak{A}K+CL+BM}=\frac{\mathfrak{y}-b_0}{CK+\mathfrak{B}L+AM}=\frac{\mathfrak{z}-c_0}{BK+AL+\mathfrak{C}M}=G_0',$$

so ist

$$K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0)$$
$$=\{K(\mathfrak{A}K+CL+BM)+L(CK+\mathfrak{B}L+AM)+M(BK+AL+\mathfrak{C}M)\}G_0'$$
$$=(\mathfrak{A}K^2+\mathfrak{B}L^2+\mathfrak{C}M^2+2CKL+2ALM+2BMK)G_0',$$

also:

$$16)\quad G_0' = \frac{K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0)}{\mathfrak{A}K^2+\mathfrak{B}L^2+\mathfrak{C}M^2+2CKL+2ALM+2BMK},$$

und zur Bestimmung der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln:

$$17)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \mathfrak{x}-a_0 = G_0'(\mathfrak{A}K+CL+BM), \\ \mathfrak{y}-b_0 = G_0'(CK+\mathfrak{B}L+AM), \\ \mathfrak{z}-c_0 = G_0'(BK+AL+\mathfrak{C}M); \end{cases}$$

welche man nach dem Obigen auch unter der folgenden Form darstellen kann:

$$17^*)\quad \mathfrak{x}-a_0 = \frac{G_0'}{G_0}X_0,\quad \mathfrak{y}-b_0 = \frac{G_0'}{G_0}Y_0,\quad \mathfrak{z}-c_0 = \frac{G_0'}{G_0}Z_0.$$

Bezeichnen wir nun die Länge des von dem Punkte $(a_0b_0c_0)$ auf die gegebene Ebene gefällten Perpendikels durch P_0, so ist bekanntlich:

$$P_0^2 = (\mathfrak{x}-a_0)^2+(\mathfrak{y}-b_0)^2+(\mathfrak{z}-c_0)^2$$

$$+2(\mathfrak{x}-a_0)(\mathfrak{y}-b_0)\cos(xy)+2(\mathfrak{y}-b_0)(\mathfrak{z}-c_0)\cos(yz)+2(\mathfrak{z}-c_0)(\mathfrak{x}-a_0)\cos(zx),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$P_0^2 = \frac{G_0'^2}{G_0^2}\left\{\begin{array}{l} X_0^2+Y_0^2+Z_0^2+2X_0Y_0\cos(xy) \\ \qquad +2Y_0Z_0\cos(yz)+2Z_0X_0\cos(zx) \end{array}\right\},$$

und folglich nach einer schon oft angewandten Formel:

$$P_0^2 = \frac{G_0'^2}{G_0^2}N^2.$$

Nun ist aber nach 13) und 16):

$$\frac{G_0^2}{N} = \frac{G_0'}{K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0)},$$

also

$$G_0' = \frac{\{K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0)\}G_0^2}{N},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$P_0^2 = G_0^2\{K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0)\}^2,$$

also:

18) . . $P_0 = \pm G_0\{K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0)\}$,

das Zeichen so genommen, dass P_0 positiv wird. Für G_0 ist der Werth 13) einzuführen.

§. 20.

Wir wollen jetzt die von zwei durch die Gleichungen

19) . . $$\begin{cases} K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0, \\ K_1(x-a_1)+L_1(y-b_1)+M_1(z-c_1)=0 \end{cases}$$

charakterisirten Ebenen eingeschlossenen Winkel $V_{0,1}$ bestimmen.

Zu dem Ende denken wir uns auf jede der beiden Ebenen ein Perpendikel errichtet, und bezeichnen die von einer der beiden Richtungen eines jeden dieser Perpendikel mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen Winkel respective durch α_0, β_0, γ_0 und α_1, β_1, γ_1. Dann fällt auf der Stelle in die Augen, dass die Winkel $V_{0,1}$ von den Winkeln dieser Perpendikel nicht verschieden sind, und dass es also bloss auf die Bestimmung dieser letzteren Winkel ankommt.

Setzen wir ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

20)

$$G_0 = \pm\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{A}K_0^2+\mathfrak{B}L_0^2+\mathfrak{C}M_0^2+2CK_0L_0+2AL_0M_0+2BM_0K_0}},$$

$$G_1 = \pm\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{A}K_1^2+\mathfrak{B}L_1^2+\mathfrak{C}M_1^2+2CK_1L_1+2AL_1M_1+2BM_1K_1}};$$

so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\cos\alpha_0 = G_0K_0,\quad \cos\beta_0 = G_0L_0,\quad \cos\gamma_0 = G_0M_0;$$
$$\cos\alpha_1 = G_1K_1,\quad \cos\beta_1 = G_1L_1,\quad \cos\gamma_1 = G_1M_1.$$

Für

$$X_0 = \mathfrak{A}\cos\alpha_0 + C\cos\beta_0 + B\cos\gamma_0,$$
$$Y_0 = C\cos\alpha_0 + \mathfrak{B}\cos\beta_0 + A\cos\gamma_0,$$
$$Z_0 = B\cos\alpha_0 + A\cos\beta_0 + \mathfrak{C}\cos\gamma_0$$

und

$$X_1 = \mathfrak{A}\cos\alpha_1 + C\cos\beta_1 + B\cos\gamma_1,$$
$$Y_1 = C\cos\alpha_1 + \mathfrak{B}\cos\beta_1 + A\cos\gamma_1,$$
$$Z_1 = B\cos\alpha_1 + A\cos\beta_1 + \mathfrak{C}\cos\gamma_1$$

ist nach I. 36):

$$\cos V_{0,1} = \frac{X_0 \cos\alpha_1 + Y_0 \cos\beta_1 + Z_0 \cos\gamma_1}{N},$$

$$\cos V_{0,1} = \frac{X_1 \cos\alpha_0 + Y_1 \cos\beta_0 + Z_1 \cos\gamma_0}{N};$$

also nach dem Obigen:

$$\cos V_{0,1} = \frac{G_1(K_1X_0 + L_1Y_0 + M_1Z_0)}{N},$$

$$\cos V_{0,1} = \frac{G_0(K_0X_1 + L_0Y_1 + M_0Z_1)}{N}.$$

Nun ist aber:

$$X_0 = G_0(\mathfrak{A}K_0 + CL_0 + BM_0),$$

$$Y_0 = G_0(CK_0 + \mathfrak{B}L_0 + AM_0),$$

$$Z_0 = G_0(BK_0 + AL_0 + \mathfrak{C}M_0);$$

also:

$$K_1X_0 + L_1Y_0 + M_1Z_0$$

$$= G_0 \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{A}K_0K_1 + \mathfrak{B}L_0L_1 + \mathfrak{C}M_0M_1 \\ + A(L_0M_1 + M_0L_1) + B(M_0K_1 + K_0M_1) + C(K_0L_1 + L_0K_1) \end{array} \right\};$$

folglich nach dem Obigen:

$$\cos V_{0,1}$$

$$= \frac{G_0G_1 \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{A}K_0K_1 + \mathfrak{B}L_0L_1 + \mathfrak{C}M_0M_1 \\ + A(L_0M_1 + M_0L_1) + B(M_0K_1 + K_0M_1) + C(K_0L_1 + L_0K_1) \end{array} \right\}}{N}$$

oder nach 20):

21) . . . . $\cos V_{0,1}$

$$= \pm \frac{\left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{A}K_0K_1 + \mathfrak{B}L_0L_1 + \mathfrak{C}M_0M_1 \\ + A(L_0M_1 + M_0L_1) + B(M_0K_1 + K_0M_1) + C(K_0L_1 + L_0K_1) \end{array} \right\}}{\sqrt{\begin{array}{l} \{\mathfrak{A}K_0^2 + \mathfrak{B}L_0^2 + \mathfrak{C}M_0^2 + 2AL_0M_0 + 2BM_0K_0 + 2CK_0L_0\} \\ \times \{\mathfrak{A}K_1^2 + \mathfrak{B}L_1^2 + \mathfrak{C}M_1^2 + 2AL_1M_1 + 2BM_1K_1 + 2CK_1L_1\} \end{array}}},$$

woraus sich zugleich ergiebt, dass die Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muss, wenn die beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen sollen, die folgende ist:

$$22) \quad \left.\begin{array}{r}\mathfrak{A}K_0K_1+\mathfrak{B}L_0L_1+\mathfrak{C}M_0M_1\\ +A(L_0M_1+M_0L_1)+B(M_0K_1+K_0M_1)+C(K_0L_1+L_0K_1)\end{array}\right\}=0.$$

Für

$$\mathrm{A}_{0,1}=\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1,$$

$$\mathrm{B}_{0,1}=\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1,$$

$$\mathrm{C}_{0,1}=\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1$$

ist nach I. 44):

$$N\sin V_{0,1}^2$$

$$=\mathrm{A}_{0,1}^2+\mathrm{B}_{0,1}^2+\mathrm{C}_{0,1}^2+2\mathrm{A}_{0,1}\mathrm{B}_{0,1}\cos(xy)+2\mathrm{B}_{0,1}\mathrm{C}_{0,1}\cos(yz)$$
$$+2\mathrm{C}_{0,1}\mathrm{A}_{0,1}\cos(zx).$$

Nun ist nach dem Obigen:

$$\mathrm{A}_{0,1}=G_0G_1(L_0M_1-M_0L_1),$$

$$\mathrm{B}_{0,1}=G_0G_1(M_0K_1-K_0M_1),$$

$$\mathrm{C}_{0,1}=G_0G_1(K_0L_1-L_0K_1);$$

also:

$$23) \quad N\sin V_{0,1}^2$$

$$=G_0^2G_1^2\left\{\begin{array}{l}(K_0L_1-L_0K_1)^2+(L_0M_1-M_0L_1)^2+(M_0K_1-K_0M_1)^2\\ +2(L_0M_1-M_0L_1)(M_0K_1-K_0M_1)\cos(xy)\\ +2(M_0K_1-K_0M_1)(K_0L_1-L_0K_1)\cos(yz)\\ +2(K_0L_1-L_0K_1)(L_0M_1-M_0L_1)\cos(zx)\end{array}\right\}$$

oder:

$$24) \quad \sin V_{0,1}^2$$

$$=N\frac{\left\{\begin{array}{l}(K_0L_1-L_0K_1)^2+(L_0M_1-M_0L_1)^2+(M_0K_1-K_0M_1)^2\\ +2(L_0M_1-M_0L_1)(M_0K_1-K_0M_1)\cos(xy)\\ +2(M_0K_1-K_0M_1)(K_0L_1-L_0K_1)\cos(yz)\\ +2(K_0L_1-L_0K_1)(L_0M_1-M_0L_1)\cos(zx)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{A}K_0^2+\mathfrak{B}L_0^2+\mathfrak{C}M_0^2+2AL_0M_0+2BM_0K_0+2CK_0L_0)\\ \times(\mathfrak{A}K_1^2+\mathfrak{B}L_1^2+\mathfrak{C}M_1^2+2AL_1M_1+2BM_1K_1+2CK_1L_1)\end{array}\right\}}.$$

Endlich erhält man aus den beiden Gleichungen 21) und 24) durch Division:

$$25) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tan V_{0,1}{}^2$$

$$=N\frac{\left\{\begin{array}{c}(K_0L_1-L_0K_1)^2+(L_0M_1-M_0L_1)^2+(M_0K_1-K_0M_1)^2\\ +2(L_0M_1-M_0L_1)(M_0K_1-K_0M_1)\cos(xy)\\ +2(M_0K_1-K_0M_1)(K_0L_1-L_0K_1)\cos(yz)\\ +2(K_0L_1-L_0K_1)(L_0M_1-M_0L_1)\cos(zx)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\mathfrak{A}K_0K_1+\mathfrak{B}L_0L_1+\mathfrak{C}M_0M_1\\ +A(L_0M_1+M_0L_1)+B(M_0K_1+K_0M_1)+C(K_0L_1+L_0K_1)\end{array}\right\}^2}.$$

§. 21.

Wenn jetzt

$$26) \quad \ldots \quad K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

die Gleichung einer Ebene ist, und

$$27) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x-a_0}{K_0}=\frac{y-b_0}{L_0}=\frac{z-c_0}{M_0}$$

die Gleichungen einer Geraden sind, so soll man den Neigungswinkel J_0 dieser letzteren gegen die erstere finden.

Die von der einen der beiden Richtungen der durch die Gleichungen 27) charakterisirten Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien α_0, β_0, γ_0; und wie gewöhnlich werde

$$X_0=\mathfrak{A}\cos\alpha_0+C\cos\beta_0+B\cos\gamma_0,$$
$$Y_0=C\cos\alpha_0+\mathfrak{B}\cos\beta_0+A\cos\gamma_0,$$
$$Z_0=B\cos\alpha_0+A\cos\beta_0+\mathfrak{C}\cos\gamma_0$$

gesetzt; dann sind die Gleichungen der gegebenen Geraden bekanntlich auch:

$$\frac{x-a_0}{X_0}=\frac{y-b_0}{Y_0}=\frac{z-c_0}{Z_0}.$$

Ferner denke man sich auf die gegebene Ebene ein Perpendikel errichtet und bezeichne die von der einen der beiden Richtungen dieses Perpendikels mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ, so ist bekanntlich, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\alpha=GK,\quad \cos\beta=GL,\quad \cos\gamma=GM.$$

Nun ist offenbar $\sin J_0$ dem absoluten Werthe des Cosinus eines der beiden von diesem Perpendikel mit der gegebenen Geraden eingeschlossenen Winkel gleich. Also ist nach I. 36):

$$\sin J_0 = \pm \frac{X_0 \cos\alpha + Y_0 \cos\beta + Z_0 \cos\gamma}{N},$$

oder nach dem Obigen:

$$\sin J_0 = \pm \frac{G(KX_0 + LY_0 + MZ_0)}{N},$$

das Zeichen so genommen, dass $\sin J_0$ positiv wird.

Setzen wir

$$\begin{aligned} X &= \mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma, \\ Y &= C\cos\alpha + \mathfrak{B}\cos\beta + A\cos\gamma, \\ Z &= B\cos\alpha + A\cos\beta + \mathfrak{C}\cos\gamma; \end{aligned}$$

so ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} X &= G(\mathfrak{A}K + CL + BM), \\ Y &= G(CK + \mathfrak{B}L + AM), \\ Z &= G(BK + AL + \mathfrak{C}M); \end{aligned}$$

und weil nun nach I. 35)

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = N,$$

d. h. nach dem Obigen

$$G(KX + LY + MZ) = N$$

ist; so ist offenbar:

$$G = \pm \sqrt{\frac{N}{\mathfrak{A}K^2 + \mathfrak{B}L^2 + \mathfrak{C}M^2 + 2ALM + 2BMK + 2CKL}},$$

also nach dem Obigen:

28)

$$\sin J_0 = \pm \frac{KX_0 + LY_0 + MZ_0}{\sqrt{N(\mathfrak{A}K^2 + \mathfrak{B}L^2 + \mathfrak{C}M^2 + 2ALM + 2BMK + 2CKL)}},$$

oder nach dem Obigen:

29) . . . . $\sin J_0 =$

$$\pm \frac{(\mathfrak{A}K + CL + BM)\cos\alpha_0 + (CK + \mathfrak{B}L + AM)\cos\beta_0 + (BK + AL + \mathfrak{C}M)\cos\gamma_0}{\sqrt{N(\mathfrak{A}K^2 + BL^2 + \mathfrak{C}M^2 + 2ALM + 2BMK + 2CKL)}}.$$

Nach dem Obigen ist ferner, wenn G_0 einen gewissen Factor bezeichnet:

$$X_0 = G_0 K_0, \quad Y_0 = G_0 L_0, \quad Z_0 = G_0 M_0;$$

und folglich, weil bekanntlich

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 + 2X_0 Y_0 \cos(xy) + 2Y_0 Z_0 \cos(yz) + 2Z_0 X_0 \cos(zx) = N^2$$

ist:

$$G_0 = \pm \frac{N}{\sqrt{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0 L_0 \cos(xy) + 2L_0 M_0 \cos(yz) + 2M_0 K_0 \cos(zx)}}.$$

Nun ist aber nach I. 32):

$$\cos\alpha_0 = \frac{X_0 + Y_0 \cos(xy) + Z_0 \cos(zx)}{N},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{X_0 \cos(xy) + Y_0 + Z_0 \cos(yz)}{N},$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{X_0 \cos(zx) + Y_0 \cos(yz) + Z_0}{N};$$

also:

$$\cos\alpha_0 = \frac{G_0 \{K_0 + L_0 \cos(xy) + M_0 \cos(zx)\}}{N},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{G_0 \{K_0 \cos(xy) + L_0 + M_0 \cos(yz)\}}{N},$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{G_0 \{K_0 \cos(zx) + L_0 \cos(yz) + M_0\}}{N};$$

oder nach dem Obigen:

30) . . . . $\cos\alpha_0$

$$= \pm \frac{K_0 + L_0 \cos(xy) + M_0 \cos(zx)}{\sqrt{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0 L_0 \cos(xy) + 2L_0 M_0 \cos(yz) + 2M_0 K_0 \cos(zx)}},$$

$\cos\beta_0$

$$= \pm \frac{K_0 \cos(xy) + L_0 + M_0 \cos(yz)}{\sqrt{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0 L_0 \cos(xy) + 2L_0 M_0 \cos(yz) + 2M_0 K_0 \cos(zx)}},$$

$\cos\gamma_0$

$$= \pm \frac{K_0 \cos(zx) + L_0 \cos(yz) + M_0}{\sqrt{K_0^2 + L_0^2 + M_0^2 + 2K_0 L_0 \cos(xy) + 2L_0 M_0 \cos(yz) + 2M_0 K_0 \cos(zx)}}.$$

Folglich ist nach 29):

31) . . . . $\sin J_0 =$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{A}K+CL+BM)\{K_0+L_0\cos(xy)+M_0\cos(zx)\}\\+(CK+\mathfrak{B}L+AM)\{K_0\cos(xy)+L_0+M_0\cos(yz)\}\\+(BK+AL+\mathfrak{C}M)\{K_0\cos(zx)+L_0\cos(yz)+M_0\}\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}N(\mathfrak{A}K^2+\mathfrak{B}L^2+\mathfrak{C}M^2+2ALM+2BMK+2CKL)\\\times\{K_0{}^2+L_0{}^2+M_0{}^2+2K_0L_0\cos(xy)+2L_0M_0\cos(yz)+2M_0K_0\cos(zx)\}\end{array}}}.$$

Nun kann man aber den Zähler offenbar auf die folgende Form bringen:

$$\begin{array}{l}KK_0\,\{\mathfrak{A}+C\cos(xy)+B\cos(zx)\}\\+LL_0\,\{C\cos(xy)+\mathfrak{B}+A\cos(yz)\}\\+MM_0\{B\cos(zx)+A\cos(yz)+\mathfrak{C}\}\\+KL_0\,\{\mathfrak{A}\cos(xy)+C+B\cos(yz)\}\\+KM_0\{\mathfrak{A}\cos(zx)+C\cos(yz)+B\}\\+LK_0\,\{C+\mathfrak{B}\cos(xy)+A\cos(zx)\}\\+LM_0\{C\cos(zx)+\mathfrak{B}\cos(yz)+A\}\\+MK_0\{B+A\cos(xy)+\mathfrak{C}\cos(zx)\}\\+ML_0\{B\cos(xy)+A+\mathfrak{C}\cos(yz)\},\end{array}$$

so dass also nach 1), 2), 3) der Zähler offenbar

$$(KK_0+LL_0+MM_0)N,$$

und folglich nach 31):

32) . . . . $\sin J_0 =$

$$\pm\frac{(KK_0+LL_0+MM_0)\sqrt{N}}{\sqrt{\begin{array}{l}(\mathfrak{A}K^2+\mathfrak{B}L^2+\mathfrak{C}M^2+2ALM+2BMK+2CKL)\\\times\{K_0{}^2+L_0{}^2+M_0{}^2+2K_0L_0\cos(xy)+2L_0M_0\cos(yz)+2M_0K_0\cos(zx)\}\end{array}}}$$

ist, indem man in allen Ausdrücken von $\sin J_0$ das Zeichen so nimmt, dass $\sin J_0$ positiv wird.

§. 22.

Wenn zwei Ebenen, deren Gleichungen:

33) . . $\left\{\begin{array}{l}K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0,\\K_1(x-a_1)+L_1(y-b_1)+M_1(z-c_1)=0\end{array}\right.$

sind, einander parallel sein sollen, so muss es eine Gerade geben die auf diesen beiden Ebenen senkrecht steht; und sind nun α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die eine der beiden Richtungen dieser Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, so muss nach dem Obigen, wenn G_0 und G_1 gewisse Factoren bezeichnen:

$$\cos\alpha = G_0K_0,\quad \cos\beta = G_0L_0,\quad \cos\gamma = G_0M_0;$$

$$\cos\alpha = G_1K_1,\quad \cos\beta = G_1L_1,\quad \cos\gamma = G_1M_1;$$

also:

$$G_0K_0 = G_1K_1,$$
$$G_0L_0 = G_1L_1,$$
$$G_0M_0 = G_1M_1;$$

folglich

$$\frac{K_0}{K_1} = \frac{L_0}{L_1} = \frac{M_0}{M_1} = \frac{G_1}{G_0}$$

sein. Daher sind die gesuchten Bedingungsgleichungen:

$$34) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{K_0}{K_1} = \frac{L_0}{L_1} = \frac{M_0}{M_1}.$$

Wir verbinden hiermit zugleich die Entwickelung der Gleichung der Durchschnittslinie der beiden durch die Gleichungen

$$35) \ldots \left\{ \begin{array}{l} K_0(x-a_0) + L_0(y-b_0) + M_0(z-c_0) = 0, \\ K_1(x-a_1) + L_1(y-b_1) + M_1(z-c_1) = 0 \end{array} \right.$$

charakterisirten Ebenen, insofern dieselben sich schneiden.

Die Gleichungen dieser Durchschnittslinie seien:

$$\frac{x-a_{0,1}}{K_{0,1}} = \frac{y-b_{0,1}}{L_{0,1}} = \frac{z-c_{0,1}}{M_{0,1}}.$$

Da der Punkt $(a_{0,1}, b_{0,1}, c_{0,1})$ in beiden Ebenen liegt, so ist:

$$K_0(a_{0,1}-a_0) + L_0(b_{0,1}-b_0) + M_0(c_{0,1}-c_0) = 0,$$

$$K_1(a_{0,1}-a_1) + L_1(b_{0,1}-b_1) + M_1(c_{0,1}-c_1) = 0;$$

und die Gleichungen der beiden Ebenen sind also auch:

$$K_0(x-a_{0,1}) + L_0(y-b_{0,1}) + M_0(z-c_{0,1}) = 0,$$

$$K_1(x-a_{0,1}) + L_1(y-b_{0,1}) + M_1(z-c_{0,1}) = 0;$$

folglich offenbar:

$$K_0 K_{0,1} + L_0 L_{0,1} + M_0 M_{0,1} = 0,$$
$$K_1 K_{0,1} + L_1 L_{0,1} + M_1 M_{0,1} = 0;$$

woraus man, wenn $G_{0,1}$ einen gewissen Factor bezeichnet,

$$36) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} K_{0,1} = G_{0,1}(L_0 M_1 - M_0 L_1), \\ L_{0,1} = G_{0,1}(M_0 K_1 - K_0 M_1), \\ M_{0,1} = G_{0,1}(K_0 L_1 - L_0 K_1) \end{array} \right.$$

erhält, so dass also

37)

$$K_{0,1} : L_{0,1} : M_{0,1} = L_0 M_1 - M_0 L_1 : M_0 K_1 - K_0 M_1 : K_0 L_1 - L_0 K_1$$

ist.

Die Gleichungen der Durchschnittslinie sind nach dem Obigen:

$$38) \quad \frac{x - a_{0,1}}{L_0 M_1 - M_0 L_1} = \frac{y - b_{0,1}}{M_0 K_1 - K_0 M_1} = \frac{z - c_{0,1}}{K_0 L_1 - L_0 K_1},$$

wo zwischen den Coordinaten $a_{0,1}$, $b_{0,1}$, $c_{0,1}$ die zwei folgenden Gleichungen Statt finden:

39)

$$K_0(a_{0,1} - a_0) + L_0(b_{0,1} - b_0) + M_0(c_{0,1} - c_0) = 0,$$
$$K_1(a_{0,1} - a_1) + L_1(b_{0,1} - b_1) + M_1(c_{0,1} - c_1) = 0;$$

oder:

$$40) \left\{ \begin{array}{l} K_0 a_{0,1} + L_0 b_{0,1} + M_0 c_{0,1} = K_0 a_0 + L_0 b_0 + M_0 c_0, \\ K_1 a_{0,1} + L_1 b_{0,1} + M_1 c_{0,1} = K_1 a_1 + L_1 b_1 + M_1 c_1; \end{array} \right.$$

wobei es sich von selbst versteht, dass von einer vollständigen Bestimmung dieser Coordinaten nicht die Rede sein kann, weil dieselben jedem Punkte der Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen angehören können; vielmehr kann man für $a_{0,1}$, $b_{0,1}$, $c_{0,1}$ alle Werthe setzen, welche den beiden vorstehenden Gleichungen genügen.

Nach 34) würden die Nenner der Brüche in 38) verschwinden, wenn die beiden durch die Gleichungen 35) charakterisirten Ebenen einander parallel wären und sich also nicht schnitten.

§. 23.

Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch drei gegebene Punkte $(a_0 b_0 c_0)$, $(a_1 b_1 c_1)$, $(a_2 b_2 c_2)$ geht.

Die gesuchte Gleichung sei

$$K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0,$$

so ist nach der Bedingung der Aufgabe:

$$K(a_0-a)+L(b_0-b)+M(c_0-c)=0,$$
$$K(a_1-a)+L(b_1-b)+M(c_1-c)=0,$$
$$K(a_2-a)+L(b_2-b)+M(c_2-c)=0;$$

oder, wenn wir

$$D=Ka+Lb+Mc$$

setzen:

$$Ka_0+Lb_0+Mc_0=D,$$
$$Ka_1+Lb_1+Mc_1=D,$$
$$Ka_2+Lb_2+Mc_2=D.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen nach der Reihe zuerst mit

$$b_1c_2-c_1b_2,\quad b_2c_0-c_2b_0,\quad b_0c_1-c_0b_1;$$

dann mit

$$c_1a_2-a_1c_2,\quad c_2a_0-a_2c_0,\quad c_0a_1-a_0c_1;$$

endlich mit

$$a_1b_2-b_1a_2,\quad a_2b_0-b_2a_0,\quad a_0b_1-b_0a_1;$$

und addiren sie in jedem Falle zu einander; so erhalten wir, wenn wir der Kürze wegen

$$41)\quad \begin{aligned} \Delta &= a_0(b_1c_2-c_1b_2)+a_1(b_2c_0-c_2b_0)+a_2(b_0c_1-c_0b_1)\\ &= b_0(c_1a_2-a_1c_2)+b_1(c_2a_0-a_2c_0)+b_2(c_0a_1-a_0c_1)\\ &= c_0(a_1b_2-b_1a_2)+c_1(a_2b_0-b_2a_0)+c_2(a_0b_1-b_0a_1)\end{aligned}$$

setzen, die drei folgenden Gleichungen:

$$K\Delta=D\{(b_1c_2-c_1b_2)+(b_2c_0-c_2b_0)+(b_0c_1-c_0b_1)\},$$
$$L\Delta=D\{(c_1a_2-a_1c_2)+(c_2a_0-a_2c_0)+(c_0a_1-a_0c_1)\},$$
$$M\Delta=D\{(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_0-b_2a_0)+(a_0b_1-b_0a_1)\};$$

und wir können also offenbar, wenn G einen beliebigen Factor bezeichnet,

$$42)\left\{\begin{array}{l}K=G\{(b_1c_2-c_1b_2)+(b_2c_0-c_2b_0)+(b_0c_1-c_0b_1)\},\\ L=G\{(c_1a_2-a_1c_2)+(c_2a_0-a_2c_0)+(c_0a_1-a_0c_1)\},\\ M=G\{(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_0-b_2a_0)+(a_0b_1-b_0a_1)\},\\ D=G\Delta\end{array}\right.$$

setzen. Die Gleichung der gesuchten Ebene, welche man auf die Form

$$Kx+Ly+Mz=D$$

bringen kann, ist also:

$$43)\quad\left.\begin{array}{l}\{(b_1c_2-c_1b_2)+(b_2c_0-c_2b_0)+(b_0c_1-c_0b_1)\}x\\ +\{(c_1a_2-a_1c_2)+(c_2a_0-a_2c_0)+(c_0a_1-a_0c_1)\}y\\ +\{(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_0-b_2a_0)+(a_0b_1-b_0a_1)\}z\end{array}\right\}=\Delta.$$

Nimmt man a, b, c so an, dass der Gleichung

$$44)\quad\left.\begin{array}{l}\{(b_1c_2-c_1b_2)+(b_2c_0-c_2b_0)+(b_0c_1-c_0b_1)\}a\\ +\{(c_1a_2-a_1c_2)+(c_2a_0-a_2c_0)+(c_0a_1-a_0c_1)\}b\\ +\{(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_0-b_2a_0)+(a_0b_1-b_0a_1)\}c\end{array}\right\}=\Delta$$

genügt wird, wo also (abc) ein beliebiger Punkt in der durch die drei gegebenen Punkte gehenden Ebene ist, so ist die Gleichung dieser Ebene:

$$45)\quad\left.\begin{array}{l}\{(b_1c_2-c_1b_2)+(b_2c_0-c_2b_0)+(b_0c_1-c_0b_1)\}(x-a)\\ +\{(c_1a_2-a_1c_2)+(c_2a_0-a_2c_0)+(c_0a_1-a_0c_1)\}(y-b)\\ +\{(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_0-b_2a_0)+(a_0b_1-b_0a_1)\}(z-c)\end{array}\right\}=0.$$

Bei der weiteren Umformung dieser Gleichungen will ich mich nicht aufhalten.

Drittes Kapitel.

Die allgemeinsten Gesetze der Krystallographie.

§. 24.

Bei der Entwickelung der allgemeinsten Gesetze der Krystallographie, welche hier zunächst nur einen rein mathematischen

Zweck hat, werde ich, wie dies bei jeder streng mathematischen Untersuchung nothwendig ist, von der folgenden bestimmten Definition eines Krystalls ausgehen, und dieselbe zu der Grundlage der ganzen folgenden Untersuchung machen:

Ein **Krystall** ist ein System von Ebenen im **Raume**, für welches sich drei in einem Punkte sich schneidende gerade Linien oder Axen so angeben lassen, dass, wenn in Bezug auf diese drei Axen als Coordinatenaxen die Gleichungen der das System bildenden Ebenen nach der Reihe

$$K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0,$$

$$K_1(x-a_1)+L_1(y-b_1)+M_1(z-c_1)=0,$$

$$K_2(x-a_2)+L_2(y-b_2)+M_2(z-c_2)=0,$$

u. s. w.

sind, sich **immer** drei positive rationale oder irrationale Zahlen K, L, M und lauter **rationale**, übrigens positive oder negative Zahlen

$$\varkappa_0,\quad \varkappa_1,\quad \varkappa_2,\quad \varkappa_3,\quad \varkappa_4,\ldots;$$

$$\lambda_0,\quad \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \lambda_4,\ldots;$$

$$\mu_0,\quad \mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\quad \mu_4,\ldots$$

von solcher Beschaffenheit angeben lassen, dass

$$K_0=\varkappa_0 K,\quad K_1=\varkappa_1 K,\quad K_2=\varkappa_2 K,\quad K_3=\varkappa_3 K,\ldots;$$

$$L_0=\lambda_0 L,\quad L_1=\lambda_1 L,\quad L_2=\lambda_2 L,\quad L_3=\lambda_3 L,\ldots;$$

$$M_0=\mu_0 M,\quad M_1=\mu_1 M,\quad M_2=\mu_2 M,\quad M_3=\mu_3 M,\ldots;$$

oder, in einer anderen Zusammenstellung dieser Gleichungen,

$$K_0=\varkappa_0 K,\quad L_0=\lambda_0 L,\quad M_0=\mu_0 M;$$

$$K_1=\varkappa_1 K,\quad L_1=\lambda_1 L,\quad M_1=\mu_1 M;$$

$$K_2=\varkappa_2 K,\quad L_2=\lambda_2 L,\quad M_2=\mu_2 M;$$

$$K_3=\varkappa_3 K,\quad L_3=\lambda_3 L,\quad M_3=\mu_3 M;$$

u. s. w.

ist.

Die drei in Rede stehenden Axen sollen, insofern sie die

obige Eigenschaft haben, die **Krystall-Axen**, und ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt soll der **Krystall-Mittelpunkt** genannt werden. Die Zahlen

$$K_0,\quad K_1,\quad K_2,\quad K_3,\quad K_4, \ldots;$$

$$L_0,\quad L_1,\quad L_2,\quad L_3,\quad L_4, \ldots;$$

$$M_0,\quad M_1,\quad M_2,\quad M_3,\quad M_4, \ldots$$

wollen wir, natürlich immer in Bezug auf die betreffenden Krystall-Axen, die **Coefficienten** des Krystalls nennen. Das System paralleler Ebenen, welche, wenn a, b, c die Coordinaten eines beliebigen Punktes sind, im Allgemeinen durch die Gleichung

$$K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

charakterisirt werden, soll das **Grund-System** heissen, und in Bezug hierauf werden wir die positiven Zahlen K, L, M die **Grund-Coefficienten** nennen. Endlich sollen die positiven oder negativen, aber stets **rationalen** Zahlen

$$\varkappa_0,\quad \varkappa_1,\quad \varkappa_2,\quad \varkappa_3,\quad \varkappa_4, \ldots;$$

$$\lambda_0,\quad \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \lambda_4, \ldots;$$

$$\mu_0,\quad \mu_1,\quad \mu_2,\quad \mu_3,\quad \mu_4, \ldots$$

die **Ableitungs-Zahlen** genannt werden.

Anmerkung.

Die obige Erklärung eines Krystalls als ein System einer gewissen Bedingung unterworfener Ebenen ist hier zunächst nur aus rein mathematischem Gesichtspunkte und mit Rücksicht auf die folgenden geometrischen Betrachtungen, denen dieselbe zur theoretischen Grundlage dienen soll, aufzufassen. Rücksichtlich der in der Natur unter dem Namen Krystalle vorkommenden Körper ist es nach meiner Meinung die Hauptaufgabe fortwährender Beobachtungen und Messungen, immer mehr und immer genauer zu untersuchen, ob und in wie weit diese Körper oder vielmehr die sie einschliessenden Ebenen-Systeme der obigen Definition, die, wie gesagt, hier zunächst nur als Grundlage rein mathematischer Betrachtungen über solche Ebenen-Systeme dienen soll, entsprechen.

Die Gleichungen der Ebenen, welche ein solches, von uns mit dem Namen eines Krystalls belegtes Ebenen-System bilden, werden jetzt gewöhnlich durch die sogenannten **Parameter** die-

ser Ebenen ausgedrückt, worunter man die mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen ihrer Durchschnittspunkte mit den drei Axen von dem Anfangspunkte oder dem Mittelpunkte des Axen-Systems versteht; namentlich bedient sich derselben Naumann durchgängig in seinen verdienstlichen krystallographischen Arbeiten, worüber man dessen „Anfangsgründe der Krystallographie. Leipzig. 1854. §. 7. S. 7.“ und „Elemente der theoretischen Krystallographie. Leipzig. 1856. §. 14. S. 17.“ nachsehen kann. Ich gestehe aber, dass ich keinen Grund aufzufinden vermocht habe, welcher mich, — wenigstens für den Zweck der folgenden Untersuchungen, — zu dieser Abweichung von der in der analytischen Geometrie meistens gewöhnlichen Darstellung der Gleichung der Ebene hätte bestimmen können, da die gewöhnlichen Coefficienten sich immer leicht durch die Parameter ausdrücken lassen und umgekehrt, ausserdem aber die Einführung der letzteren auch zu manchen theoretischen Bedenken Veranlassung giebt. Ist nämlich

$$K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

die Gleichung einer Ebene in gewöhnlicher Form und sind p, q, r deren Parameter, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} K(p-a)-Lb-Mc&=0,\\ -Ka+L(q-b)-Mc&=0,\\ -Ka-Lb+M(r-c)&=0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} Kp&=Ka+Lb+Mc,\\ Lq&=Ka+Lb+Mc,\\ Mr&=Ka+Lb+Mc; \end{aligned}$$

also:

$$p=\frac{Ka+Lb+Mc}{K},\quad q=\frac{Ka+Lb+Mc}{L},\quad r=\frac{Ka+Lb+Mc}{M};$$

folglich

$$p:q:r=\frac{1}{K}:\frac{1}{L}:\frac{1}{M}$$

oder

$$K:L:M=\frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r};$$

und da es nun hier offenbar immer bloss auf die Verhältnisse der Coefficienten K, L, M ankommt, so kann man für dieselben

jederzeit ohne Weiteres die reciproken Parameter setzen, wodurch die Gleichung der Ebene die Gestalt

$$\frac{x-a}{p}+\frac{y-b}{q}+\frac{z-c}{r}=0$$

erhält. Schreibt man aber die Gleichung

$$K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

unter der Form

$$Kx+Ly+Mz=Ka+Lb+Mc,$$

so ist auch

$$\frac{Kx}{Ka+Lb+Mc}+\frac{Ly}{Ka+Lb+Mc}+\frac{Mz}{Ka+Lb+Mc}=1,$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,$$

welches die Form ist, die namentlich von Naumann allgemein angewandt wird. Da (abc) bekanntlich ein Punkt in unserer Ebene ist, so ist

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}=1,$$

was, von der vorhergehenden Gleichung abgezogen, wieder die schon vorher gefundene Form

$$\frac{x-a}{p}+\frac{y-b}{q}+\frac{z-c}{r}=0$$

giebt. Man sieht also, dass die Einführung der Parameter statt der Coefficienten nie der geringsten Schwierigkeit unterliegt. Nur aber ist nicht zu übersehen, dass der durchgängige Gebrauch der Gleichung

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$$

manchen theoretischen Bedenken unterliegt, indem z. B., was wir, ohne auf weitere Erörterungen uns einzulassen, für jetzt nur bemerken wollen, unter dieser Form die Gleichung einer durch den Anfang der Coordinaten gehenden Ebene unmittelbar gar nicht enthalten ist. Ich habe also, wie schon erinnert, keinen Grund gefunden, von der in der analytischen Geometrie gewöhnlichen Bezeichnung der Gleichung der Ebene abzugehen, und schliesse

mich in dieser Beziehung ganz an Kupffer an, der in seinem „Handbuche der rechnenden Krystallonomie. Petersburg. 1831." auch durchgängig die in Rede stehende gewöhnliche Form gebraucht, und nur S. 483. ff. den Zusammenhang der gewöhnlichen Coefficienten mit den Parametern nachweiset, eben so wie vorher von mir geschehen. Ausser Naumann bedienen sich unter den neueren Krystallographen der Parameter vorzüglich Quintino Sella in Turin, der in seinen trefflichen Arbeiten (Sulle forme del boro adamantino. Torino. 1857. — Sulla legge di connessione delle forme cristalline di una stessa sostanza. Torino. 1856) auch vielfach von den Determinanten Gebrauch macht, und W. H. Miller in seinen eben so trefflichen, durch ihre ganz elementare Haltung sich besonders auszeichnenden Arbeiten (On the anharmonic ratio of radii normal to four faces of a crystall in one zone; and on the change of the axes of a crystall. Philosophical Magazine for February 1857. — On the application of elementary geometry to crysallography. Philosophical Magazine for May 1857. — Crystallographic notices. Philosophical Magazine for July 1858. — On the employement of the gnomonic projection of the sphere in crystallography. Philos. Mag. for July 1859.)

§. 25.

Zunächst wollen wir nun untersuchen, ob es für einen Krystall nur **ein** System von Krystall-Axen und also auch nur **einen** Krystall-Mittelpunkt, oder ob es mehrere Systeme von Krystall-Axen und demzufolge auch mehrere Krystall-Mittelpunkte geben kann.

Zu dem Ende legen wir durch einen beliebigen Punkt, dessen Coordinaten in Bezug auf das primitive Axen-System der x, y, z durch f, g, h bezeichnet werden mögen, ein beliebiges neues oder secundäres Axen-System der x', y', z'; dann finden nach I. 8) zwischen den Coordinaten x, y, z und x', y', z' die folgenden Gleichungen Statt:

$$\begin{aligned}&(x-f)+(y-g)\cos(xy)+(z-h)\cos(zx)\\&=x'\cos(xx')+y'\cos(xy')+z'\cos(xz'),\\[1ex]&(x-f)\cos(xy)+(y-g)+(z-h)\cos(yz)\\&=x'\cos(yx')+y'\cos(yy')+z'\cos(yz'),\\[1ex]&(x-f)\cos(zx)+(y-g)\cos(yz)+(z-h)\\&=x'\cos(zx')+y'\cos(zy')+z'\cos(zz').\end{aligned}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen nach der Reihe zuerst mit

$$\mathfrak{A},\quad C,\quad B;$$

dann mit

$$C,\quad \mathfrak{B},\quad A;$$

endlich mit

$$B,\quad A,\quad \mathfrak{C};$$

und addire sie in jedem Falle zu einander, so erhalten wir nach II. 1), 2), 3) auf der Stelle die folgenden Ausdrücke:

1)

$$\begin{aligned}
N(x-f) = {} & \mathfrak{A}\{x'\cos(xx')+y'\cos(xy')+z'\cos(xz')\} \\
& + C\{x'\cos(yx')+y'\cos(yy')+z'\cos(yz')\} \\
& + B\{x'\cos(zx')+y'\cos(zy')+z'\cos(zz')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(y-g) = {} & C\{x'\cos(xx')+y'\cos(xy')+z'\cos(xz')\} \\
& + \mathfrak{B}\{x'\cos(yx')+y'\cos(yy')+z'\cos(yz')\} \\
& + A\{x'\cos(zx')+y'\cos(zy')+z'\cos(zz')\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(z-h) = {} & B\{x'\cos(xx')+y'\cos(xy')+z'\cos(xz')\} \\
& + A\{x'\cos(yx')+y'\cos(yy')+z'\cos(yz')\} \\
& + \mathfrak{C}\{x'\cos(zx')+y'\cos(zy')+z'\cos(zz')\};
\end{aligned}$$

wo die Symbole

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C};\ A,\ B,\ C$$

immer ihre aus I. 21) bekannte Bedeutung haben. Es ist also auch:

2)

$$\begin{aligned}
N(x-f) = {} & \{\mathfrak{A}\cos(xx')+C\cos(yx')+B\cos(zx')\}x' \\
& + \{\mathfrak{A}\cos(xy')+C\cos(yy')+B\cos(zy')\}y' \\
& + \{\mathfrak{A}\cos(xz')+C\cos(yz')+B\cos(zz')\}z',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(y-g) = {} & \{C\cos(xx')+\mathfrak{B}\cos(yx')+A\cos(zx')\}x' \\
& + \{C\cos(xy')+\mathfrak{B}\cos(yy')+A\cos(zy')\}y' \\
& + \{C\cos(xz')+\mathfrak{B}\cos(yz')+A\cos(zz')\}z',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(z-h) = {} & \{B\cos(xx')+A\cos(yx')+\mathfrak{C}\cos(zx')\}x' \\
& + \{B\cos(xy')+A\cos(yy')+\mathfrak{C}\cos(zy')\}y' \\
& + \{B\cos(xz')+A\cos(yz')+\mathfrak{C}\cos(zz')\}z'.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun eine Ebene des Krystalls, deren Gleichungen im primitiven und im secundären Systeme respective

$$K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0$$

und

$$K_0'(x'-a_0')+L_0'(y'-b_0')+M_0'(z'-c_0')=0$$

sein mögen, wo a_0, b_0, c_0 und a_0', b_0', c_0' die Coordinaten eines und desselben in dieser Ebene liegenden Punktes im primitiven und im secundären Systeme bezeichnen sollen, so ist nach 2):

$$\begin{aligned}
N(a_0-f)= &\{\mathfrak{A}\cos(xx')+C\cos(yx')+B\cos(zx')\}a_0'\\
&+\{\mathfrak{A}\cos(xy')+C\cos(yy')+B\cos(zy')\}b_0'\\
&+\{\mathfrak{A}\cos(xz')+C\cos(yz')+B\cos(zz')\}c_0',\\
N(b_0-g)= &\{C\cos(xx')+\mathfrak{B}\cos(yx')+A\cos(zx')\}a_0'\\
&+\{C\cos(xy')+\mathfrak{B}\cos(yy')+A\cos(zy')\}b_0'\\
&+\{C\cos(xz')+\mathfrak{B}\cos(yz')+A\cos(zz')\}c_0',\\
N(c_0-h)= &\{B\cos(xx')+A\cos(yx')+\mathfrak{C}\cos(zx')\}a_0'\\
&+\{B\cos(xy')+A\cos(yy')+\mathfrak{C}\cos(zy')\}b_0'\\
&+\{B\cos(xz')+A\cos(yz')+\mathfrak{C}\cos(zz')\}c_0';
\end{aligned}$$

also, wenn man diese Gleichungen von den entsprechenden Gleichungen 2) subtrahirt:

$$\begin{aligned}
N(x-a_0)= &\{\mathfrak{A}\cos(xx')+C\cos(yx')+B\cos(zx')\}(x'-a_0')\\
&+\{\mathfrak{A}\cos(xy')+C\cos(yy')+B\cos(zy')\}(y'-b_0')\\
&+\{\mathfrak{A}\cos(xz')+C\cos(yz')+B\cos(zz')\}(z'-c_0'),\\
N(y-b_0)= &\{C\cos(xx')+\mathfrak{B}\cos(yx')+A\cos(zx')\}(x'-a_0')\\
&+\{C\cos(xy')+\mathfrak{B}\cos(yy')+A\cos(zy')\}(y'-b_0')\\
&+\{C\cos(xz')+\mathfrak{B}\cos(yz')+A\cos(zz')\}(z'-c_0'),\\
N(z-c_0)= &\{B\cos(xx')+A\cos(yx')+\mathfrak{C}\cos(zx')\}(x'-a_0')\\
&+\{B\cos(xy')+A\cos(yy')+\mathfrak{C}\cos(zy')\}(y'-b_0')\\
&+\{B\cos(xz')+A\cos(yz')+\mathfrak{C}\cos(zz')\}(z'-c_0');
\end{aligned}$$

und weil nun

$$K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0$$

die Gleichung unserer Ebene im Systeme der x, y, z ist, so ist die Gleichung dieser Ebene im Systeme der x', y', z' nach den obigen Formeln offenbar:

$$
\left.\begin{array}{r}
\left\{\begin{array}{l}
(K_0\mathfrak{A}+L_0C+M_0B)\cos(xx')\\
+(K_0C+L_0\mathfrak{B}+M_0A)\cos(yx')\\
+(K_0B+L_0A+M_0\mathfrak{C})\cos(zx')
\end{array}\right\}(x'-a_0')\\
+\left\{\begin{array}{l}
(K_0\mathfrak{A}+L_0C+M_0B)\cos(xy')\\
+(K_0C+L_0\mathfrak{B}+M_0A)\cos(yy')\\
+(K_0B+L_0A+M_0\mathfrak{C})\cos(zy')
\end{array}\right\}(y'-b_0')\\
+\left\{\begin{array}{l}
(K_0\mathfrak{A}+L_0C+M_0B)\cos(xz')\\
+(K_0C+L_0\mathfrak{B}+M_0A)\cos(yz')\\
+(K_0B+L_0A+M_0\mathfrak{C})\cos(zz')
\end{array}\right\}(z'-c_0')
\end{array}\right\}=0;
$$

also, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung

$$K_0'(x'-a_0')+L_0'(y'-b_0')+M_0'(z'-c_0')=0,$$

welche derselben Ebene entspricht, vergleicht, indem G_0 einen gewissen Factor bezeichnet:

3)

$$
K_0'=G_0\left\{\begin{array}{l}
(K_0\mathfrak{A}+L_0C+M_0B)\cos(xx')\\
+(K_0C+L_0\mathfrak{B}+M_0A)\cos(yx')\\
+(K_0B+L_0A+M_0\mathfrak{C})\cos(zx')
\end{array}\right\},
$$

$$
L_0'=G_0\left\{\begin{array}{l}
(K_0\mathfrak{A}+L_0C+M_0B)\cos(xy')\\
+(K_0C+L_0\mathfrak{B}+M_0A)\cos(yy')\\
+(K_0B+L_0A+M_0\mathfrak{C})\cos(zy')
\end{array}\right\},
$$

$$
M_0'=G_0\left\{\begin{array}{l}
(K_0\mathfrak{A}+L_0C+M_0B)\cos(xz')\\
+(K_0C+L_0\mathfrak{B}+M_0A)\cos(yz')\\
+(K_0B+L_0A+M_0\mathfrak{C})\cos(zz')
\end{array}\right\}
$$

oder:

4)

$$
K_0'=G_0\left\{\begin{array}{l}
K_0[\mathfrak{A}\cos(xx')+C\cos(yx')+B\cos(zx')]\\
+L_0[C\cos(xx')+\mathfrak{B}\cos(yx')+A\cos(zx')]\\
+M_0[B\cos(xx')+A\cos(yx')+\mathfrak{C}\cos(zx')]
\end{array}\right\},
$$

$$
L_0'=G_0\left\{\begin{array}{l}
K_0[\mathfrak{A}\cos(xy')+C\cos(yy')+B\cos(zy')]\\
+L_0[C\cos(xy')+\mathfrak{B}\cos(yy')+A\cos(zy')]\\
+M_0[B\cos(xy')+A\cos(yy')+\mathfrak{C}\cos(zy')]
\end{array}\right\},
$$

$$
M_0'=G_0\left\{\begin{array}{l}
K_0[\mathfrak{A}\cos(xz')+C\cos(yz')+B\cos(zz')]\\
+L_0[C\cos(xz')+\mathfrak{B}\cos(yz')+A\cos(zz')]\\
+M_0[B\cos(xz')+A\cos(yz')+\mathfrak{C}\cos(zz')]
\end{array}\right\}.
$$

Durch den Punkt (fgh) legen wir jetzt drei Ebenen, deren Gleichungen

$$5) \ldots \left\{\begin{array}{l} K'(x-f)+L'(y-g)+M'(z-h)=0, \\ K''(x-f)+L''(y-g)+M''(z-h)=0, \\ K'''(x-f)+L'''(y-g)+M'''(z-h)=0 \end{array}\right.$$

sein mögen, und nehmen die Durchschnittslinien der

1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 1sten

dieser Ebenen respective als Axen der

$$x',\quad y',\quad z'$$

an; dann sind nach II. 38) die Gleichungen dieser drei Axen beziehungsweise:

$$6) \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-f}{L'M''-M'L''}=\dfrac{y-g}{M'K''-K'M''}=\dfrac{z-h}{K'L''-L'K''}, \\ \dfrac{x-f}{L''M'''-M''L'''}=\dfrac{y-g}{M''K'''-K''M'''}=\dfrac{z-h}{K''L'''-L''K'''}, \\ \dfrac{x-f}{L'''M'-M'''L'}=\dfrac{y-g}{M'''K'-K'''M'}=\dfrac{z-h}{K'''L'-L'''K'}. \end{array}\right.$$

Setzen wir nun aber

$$\begin{array}{l} X^{\prime,\prime\prime}=\mathfrak{A}\cos(xx')+C\cos(yx')+B\cos(zx'), \\ Y^{\prime,\prime\prime}=C\cos(xx')+\mathfrak{B}\cos(yx')+A\cos(zx'), \\ Z^{\prime,\prime\prime}=B\cos(xx')+A\cos(yx')+\mathfrak{C}\cos(zx'); \end{array}$$

$$\begin{array}{l} X^{\prime\prime,\prime\prime\prime}=\mathfrak{A}\cos(xy')+C\cos(yy')+B\cos(zy'), \\ Y^{\prime\prime,\prime\prime\prime}=C\cos(xy')+\mathfrak{B}\cos(yy')+A\cos(zy'), \\ Z^{\prime\prime,\prime\prime\prime}=B\cos(xy')+A\cos(yy')+\mathfrak{C}\cos(zy'); \end{array}$$

$$\begin{array}{l} X^{\prime\prime\prime,\prime}=\mathfrak{A}\cos(xz')+C\cos(yz')+B\cos(zz'), \\ Y^{\prime\prime\prime,\prime}=C\cos(xz')+\mathfrak{B}\cos(yz')+A\cos(zz'), \\ Z^{\prime\prime\prime,\prime}=B\cos(xz')+A\cos(yz')+\mathfrak{C}\cos(zz'); \end{array}$$

so sind nach I. 23) oder 24) die Gleichungen der Axen der x', y', z' auch beziehungsweise:

$$\begin{array}{l} \dfrac{x-f}{X^{\prime,\prime\prime}}=\dfrac{y-g}{Y^{\prime,\prime\prime}}=\dfrac{z-h}{Z^{\prime,\prime\prime}}, \\ \dfrac{x-f}{X^{\prime\prime,\prime\prime\prime}}=\dfrac{y-g}{Y^{\prime\prime,\prime\prime\prime}}=\dfrac{z-h}{Z^{\prime\prime,\prime\prime\prime}}, \\ \dfrac{x-f}{X^{\prime\prime\prime,\prime}}=\dfrac{y-g}{Y^{\prime\prime\prime,\prime}}=\dfrac{z-h}{Z^{\prime\prime\prime,\prime}}; \end{array}$$

und es ist also nach 6), wenn

$$G'{,}'',\quad G''{,}''',\quad G'''{,}'$$

gewisse Factoren bezeichnen:

7)

$$X'{,}''=G'{,}''(L'M''-M'L''),\quad Y'{,}''=G'{,}''(M'K''-K'M''),$$
$$Z'{,}''=G'{,}''(K'L''-L'K'');$$

$$X''{,}'''=G''{,}'''(L''M'''-M''L'''),\quad Y''{,}'''=G''{,}'''(M''K'''-K''M'''),$$
$$Z''{,}'''=G''{,}'''(K''L'''-L''K''');$$

$$X'''{,}'=G'''{,}'(L'''M'-M'''L'),\quad Y'''{,}'=G'''{,}'(M'''K'-K'''M'),$$
$$Z'''{,}'=G'''{,}'(K'''L'-L'''K');$$

wo die Factoren

$$G'{,}'',\quad G''{,}''',\quad G'''{,}'$$

aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

8) . . . . $\left(\frac{N}{G'{,}''}\right)^2$

$$\begin{aligned}
&=(L'M''-M'L'')^2+(M'K''-K'M'')^2+(K'L''-L'K'')^2\\
&\quad+2(L'M''-M'L'')(M'K''-K'M'')\cos(xy)\\
&\quad+2(M'K''-K'M'')(K'L''-L'K'')\cos(yz)\\
&\quad+2(K'L''-L'K'')(L'M''-M'L'')\cos(zx),
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{N}{G''{,}'''}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&=(L''M'''-M''L''')^2+(M''K'''-K''M''')^2+(K''L'''-L''K''')^2\\
&\quad+2(L''M'''-M''L''')(M''K'''-K''M''')\cos(xy)\\
&\quad+2(M''K'''-K''M''')(K''L'''-L''K''')\cos(yz)\\
&\quad+2(K''L'''-L''K''')(L''M'''-M''L''')\cos(zx),
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{N}{G'''{,}'}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&=(L'''M'-M'''L')^2+(M'''K'-K'''M')^2+(K'''L'-L'''K')^2\\
&\quad+2(L'''M'-M'''L')(M'''K'-K'''M')\cos(xy)\\
&\quad+2(M'''K'-K'''M')(K'''L'-L'''K')\cos(yz)\\
&\quad+2(K'''L'-L'''K')(L'''M'-M'''L')\cos(zx).
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Winkel

$$(xx'),\ (yx'),\ (zx');\quad (xy'),\ (yy'),\ (zy');\quad (xz'),\ (yz'),\ (zz')$$

hat man aber nach I. 32) die folgenden Formeln:

9)

$$\cos(xx') = \frac{X'{,}'' + Y'{,}''\cos(xy) + Z'{,}''\cos(zx)}{N},$$

$$\cos(yx') = \frac{X'{,}''\cos(xy) + Y'{,}'' + Z'{,}''\cos(yz)}{N},$$

$$\cos(zx') = \frac{X'{,}''\cos(zx) + Y'{,}''\cos(yz) + Z'{,}''}{N};$$

$$\cos(xy') = \frac{X''{,}''' + Y''{,}'''\cos(xy) + Z''{,}'''\cos(zx)}{N},$$

$$\cos(yy') = \frac{X''{,}'''\cos(xy) + Y''{,}''' + Z''{,}'''\cos(yz)}{N},$$

$$\cos(zy') = \frac{X''{,}'''\cos(zx) + Y''{,}'''\cos(yz) + Z''{,}'''}{N};$$

$$\cos(xz') = \frac{X'''{,}' + Y'''{,}'\cos(xy) + Z'''{,}'\cos(zx)}{N},$$

$$\cos(yz') = \frac{X'''{,}'\cos(xy) + Y'''{,}' + Z'''{,}'\cos(yz)}{N},$$

$$\cos(zz') = \frac{X'''{,}'\cos(zx) + Y'''{,}'\cos(yz) + Z'''{,}'}{N}.$$

Zur Bestimmung von

$$K_0',\quad L_0',\quad M_0'$$

hat man nun nach 4) und dem Obigen die folgenden Formeln:

$$K_0' = G_0(K_0X'{,}'' + L_0Y'{,}'' + M_0Z'{,}''),$$
$$L_0' = G_0(K_0X''{,}''' + L_0Y''{,}''' + M_0Z''{,}'''),$$
$$M_0' = G_0(K_0X'''{,}' + L_0Y'''{,}' + M_0Z'''{,}');$$

oder, wie man wegen der Gleichung

$$K_0'(x' - a_0') + L_0'(y' - b_0') + M_0'(z' - c_0') = 0$$

offenbar kürzer setzen kann:

$$10)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} K_0' = K_0X'{,}'' + L_0Y'{,}'' + M_0Z'{,}'', \\ L_0' = K_0X''{,}''' + L_0Y''{,}''' + M_0Z''{,}''', \\ M_0' = K_0X'''{,}' + L_0Y'''{,}' + M_0Z'''{,}'. \end{array}\right.$$

Sind jetzt die drei durch den Punkt (fgh) gelegten Ebenen, deren Durchschnitte die Axen der x', y', z' bestimmen, drei sich schneidenden Ebenen des Krystalls parallel, so ist nach §. 24.:

$$K' = \varkappa' K, \quad L' = \lambda' L, \quad M' = \mu' M;$$
$$K'' = \varkappa'' K, \quad L'' = \lambda'' L, \quad M'' = \mu'' M;$$
$$K''' = \varkappa''' K, \quad L''' = \lambda''' L, \quad M''' = \mu''' M;$$

wo

$$\varkappa', \lambda', \mu'; \quad \varkappa'', \lambda'', \mu''; \quad \varkappa''', \lambda''', \mu'''$$

rationale Zahlen sind. Also ist nach 7):

11)

$$X','' = G','' (\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'') LM, \qquad Y','' = G','' (\mu'\varkappa'' - \varkappa'\mu'') MK,$$
$$Z','' = G','' (\varkappa'\lambda'' - \lambda'\varkappa'') KL;$$

$$X'','''= G'','''(\lambda''\mu''' - \mu''\lambda''') LM, \quad Y'',''' = G'','''(\mu''\varkappa''' - \varkappa''\mu''') MK,$$
$$Z'',''' = G'','''(\varkappa''\lambda''' - \lambda''\varkappa''') KL;$$

$$X''',' = G''','(\lambda'''\mu' - \mu'''\lambda') LM, \quad Y''',' = G''','(\mu'''\varkappa' - \varkappa'''\mu') MK,$$
$$Z''',' = G''','(\varkappa'''\lambda' - \lambda'''\varkappa') KL;$$

wo $G','', G'',''', G''','$ aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

12) $$\left(\frac{N}{G',''}\right)^2$$
$$= (\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'')^2 L^2M^2 + (\mu'\varkappa'' - \varkappa'\mu'')^2 M^2K^2 + (\varkappa'\lambda'' - \lambda'\varkappa'')^2 K^2L^2$$
$$+ 2(\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'')(\mu'\varkappa'' - \varkappa'\mu'') KLM^2 \cos(xy)$$
$$+ 2(\mu'\varkappa'' - \varkappa'\mu'')(\varkappa'\lambda'' - \lambda'\varkappa'') K^2LM \cos(yz)$$
$$+ 2(\varkappa'\lambda'' - \lambda'\varkappa'')(\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'') KL^2M \cos(zx),$$

$$\left(\frac{N}{G'','''}\right)^2$$
$$= (\lambda''\mu''' - \mu''\lambda''')^2 L^2M^2 + (\mu''\varkappa''' - \varkappa''\mu''')^2 M^2K^2 + (\varkappa''\lambda''' - \lambda''\varkappa''')^2 K^2L^2$$
$$+ 2(\lambda''\mu''' - \mu''\lambda''')(\mu''\varkappa''' - \varkappa''\mu''') KLM^2 \cos(xy)$$
$$+ 2(\mu''\varkappa''' - \varkappa''\mu''')(\varkappa''\lambda''' - \lambda''\varkappa''') K^2LM \cos(yz)$$
$$+ 2(\varkappa''\lambda''' - \lambda''\varkappa''')(\lambda''\mu''' - \mu''\lambda''') KL^2M \cos(zx),$$

$$\left(\frac{N}{G''','}\right)^2$$
$$= (\lambda'''\mu' - \mu'''\lambda')^2 L^2M^2 + (\mu'''\varkappa' - \varkappa'''\mu')^2 M^2K^2 + (\varkappa'''\lambda' - \lambda'''\varkappa')^2 K^2L^2$$
$$+ 2(\lambda'''\mu' - \mu'''\lambda')(\mu'''\varkappa' - \varkappa'''\mu') KLM^2 \cos(xy)$$
$$+ 2(\mu'''\varkappa' - \varkappa'''\mu')(\varkappa'''\lambda' - \lambda'''\varkappa') K^2LM \cos(yz)$$
$$+ 2(\varkappa'''\lambda' - \lambda'''\varkappa')(\lambda'''\mu' - \mu'''\lambda') KL^2M \cos(zx).$$

Weil aber nach §. 24.

$$K_0=\varkappa_0 K,\quad L_0=\lambda_0 L,\quad M_0=\mu_0 M$$

ist, so ist nach 10) und 11):

13)

$$K_0{}'=\{\varkappa_0(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')+\lambda_0(\mu'\varkappa''-\varkappa'\mu'')+\mu_0(\varkappa'\lambda''-\lambda'\varkappa'')\}\,G',''KLM,$$

$$L_0{}'=\{\varkappa_0(\lambda''\mu'''-\mu''\lambda''')+\lambda_0(\mu''\varkappa'''-\varkappa''\mu''')+\mu_0(\varkappa''\lambda'''-\lambda''\varkappa''')\}\,G'',''' KLM,$$

$$M_0{}'=\{\varkappa_0(\lambda'''\mu'-\mu'''\lambda')+\lambda_0(\mu'''\varkappa'-\varkappa'''\mu')+\mu_0(\varkappa'''\lambda'-\lambda'''\varkappa')\}\,G''','KLM.$$

Weil nun

$$\varkappa_0(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')+\lambda_0(\mu'\varkappa''-\varkappa'\mu'')+\mu_0(\varkappa'\lambda''-\lambda'\varkappa''),$$

$$\varkappa_0(\lambda''\mu'''-\mu''\lambda''')+\lambda_0(\mu''\varkappa'''-\varkappa''\mu''')+\mu_0(\varkappa''\lambda'''-\lambda''\varkappa'''),$$

$$\varkappa_0(\lambda'''\mu'-\mu'''\lambda')+\lambda_0(\mu'''\varkappa'-\varkappa'''\mu')+\mu_0(\varkappa'''\lambda'-\lambda'''\varkappa')$$

rationale Zahlen sind, weil ferner

$$G','',\quad G'',''',\quad G''','$$

von der Lage der durch die Gleichung

$$K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0$$

charakterisirten Ebene gar nicht abhängen, also für alle Ebenen des Krystalls dieselben sind, und weil es endlich nach dem Obigen auch offenbar verstattet ist, diese Grössen als positiv anzunehmen; so sieht man, dass man für alle Ebenen des Krystalls setzen kann:

$$K_0{}'=\varkappa_0{}'.G','' KLM,\quad L_0{}'=\lambda_0{}'.G'',''' KLM,\quad M_0{}'=\mu_0{}'.G''','KLM;$$

$$K_1{}'=\varkappa_1{}'.G','' KLM,\quad L_1{}'=\lambda_1{}'.G'',''' KLM,\quad M_1{}'=\mu_1{}'.G''','KLM;$$

$$K_2{}'=\varkappa_2{}'.G','' KLM,\quad L_2{}'=\lambda_2{}'.G'',''' KLM,\quad M_2{}'=\mu_2{}'.G''','KLM;$$

$$K_3{}'=\varkappa_3{}'.G','' KLM,\quad L_3{}'=\lambda_3{}'.G'',''' KLM,\quad M_3{}'=\mu_3{}'.G''','KLM;$$

u. s. w.,

wo

$$\varkappa_0{}',\quad \varkappa_1{}',\quad \varkappa_2{}',\quad \varkappa_3{}',\quad \varkappa_4{}',\ldots.;$$

$$\lambda_0{}',\quad \lambda_1{}',\quad \lambda_2{}',\quad \lambda_3{}',\quad \lambda_4{}',\ldots.;$$

$$\mu_0{}',\quad \mu_1{}',\quad \mu_2{}',\quad \mu_3{}',\quad \mu_4{}',\ldots.$$

positive oder negative rationale Zahlen sind. Dies führt unmittelbar auf den folgenden

Satz.

Jeder beliebige Punkt kann als Mittelpunkt des Krystalls angenommen werden, und die drei Durchschnittslinien jeder drei durch denselben gelegter, drei beliebigen sich schneidenden Ebenen des Krystalls paralleler Ebenen sind Krystall-Axen.

Weil nach 7) und 10) allgemein, nämlich für jede drei durch die Gleichungen 5) charakterisirte Ebenen:

14)

$$K_0' = G',''\{K_0(L'M''-M'L'')+L_0(M'K''-K'M'')+M_0(K'L''-L'K'')\},$$

$$L_0' = G'','''\{K_0(L''M'''-M''L''')+L_0(M''K'''-K''M''') \\ +M_0(K''L'''-L''K''')\},$$

$$M_0' = G''','\{K_0(L'''M'-M'''L')+L_0(M'''K'-K'''M')+M_0(K'''L'-L'''K')\}$$

ist, und, wie schon erinnert, die Grössen

$$G','',\quad G'',''',\quad G''','$$

von der Lage der durch die Gleichung

$$K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0$$

charakterisirten Ebene ganz unabhängig sind, so würde man, um zu prüfen, ob die Durchschnittslinien der drei durch die Gleichungen 5) charakterisirten Ebenen Krystall-Axen sind, nur zu untersuchen haben, ob es drei positive rationale oder irrationale Grössen

$$\mathrm{K},\quad \mathrm{L},\quad \mathrm{M}$$

und solche positive oder negative rationale Zahlen

$$\varkappa_0',\quad \varkappa_1',\quad \varkappa_2',\quad \varkappa_3',\quad \varkappa_4',\ldots.;$$

$$\lambda_0',\quad \lambda_1',\quad \lambda_2',\quad \lambda_3',\quad \lambda_4',\ldots.;$$

$$\mu_0',\quad \mu_1',\quad \mu_2',\quad \mu_3',\quad \mu_4',\ldots.$$

giebt, dass

$$K_0(L'M''-M'L'')+L_0(M'K''-K'M'')+M_0(K'L''-L'K'')=\varkappa_0'\mathrm{K},$$

$$K_1(L'M''-M'L'')+L_1(M'K''-K'M'')+M_1(K'L''-L'K'')=\varkappa_1'\mathrm{K},$$

$$K_2(L'M''-M'L'')+L_2(M'K''-K'M'')+M_2(K'L''-L'K'')=\varkappa_2'\mathrm{K},$$

$$K_3(L'M''-M'L'')+L_3(M'K''-K'M'')+M_3(K'L''-L'K'')=\varkappa_3'\mathrm{K},$$

u. s. w.

ferner

$$K_0(L''M'''-M''L''')+L_0(M''K'''-K''M''')+M_0(K''L'''-L''K''')=\lambda_0'L,$$
$$K_1(L''M'''-M''L''')+L_1(M''K'''-K''M''')+M_1(K''L'''-L''K''')=\lambda_1'L,$$
$$K_2(L''M'''-M''L''')+L_2(M''K'''-K''M''')+M_2(K''L'''-L''K''')=\lambda_2'L,$$
$$K_3(L''M'''-M''L''')+L_3(M''K'''-K''M''')+M_3(K''L'''-L''K''')=\lambda_3'L,$$

u. s. w.

endlich

$$K_0(L'''M'-M'''L')+L_0(M'''K'-K'''M')+M_0(K'''L'-L'''K')=\mu_0'M,$$
$$K_1(L'''M'-M'''L')+L_1(M'''K'-K'''M')+M_1(K'''L'-L'''K')=\mu_1'M,$$
$$K_2(L'''M'-M'''L')+L_2(M'''K'-K'''M')+M_2(K'''L'-L'''K')=\mu_2'M,$$
$$K_3(L'''M'-M'''L')+L_3(M'''K'-K'''M')+M_3(K'''L'-L'''K')=\mu_3'M,$$

u. s. w.

ist.

§. 26.

Unter einer **Zone** versteht man einen Inbegriff von Ebenen eines Krystalls, welche sich sämmtlich in lauter parallelen Geraden schneiden, und also einer und derselben Geraden im Raume, welche die **Zonenlinie** genannt wird, parallel sind. Alle einer und derselben Zone angehörende Ebenen werden **tautozonale Ebenen** genannt.

Zuerst und vor allen Dingen müssen wir untersuchen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn drei Ebenen, deren Gleichungen

$$15)\ldots\begin{cases} K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0,\\ K_1(x-a_1)+L_1(y-b_1)+M_1(z-c_1)=0,\\ K_2(x-a_2)+L_2(y-b_2)+M_2(z-c_2)=0\end{cases}$$

sein mögen, einer Zone angehören sollen.

Nach II. 38) sind die Gleichungen der Durchschnittslinien dieser Ebenen:

$$16)\begin{cases} \dfrac{x-a_{0,1}}{L_0M_1-M_0L_1}=\dfrac{y-b_{0,1}}{M_0K_1-K_0M_1}=\dfrac{z-c_{0,1}}{K_0L_1-L_0K_1},\\[2ex] \dfrac{x-a_{1,2}}{L_1M_2-M_1L_2}=\dfrac{y-b_{1,2}}{M_1K_2-K_1M_2}=\dfrac{z-c_{1,2}}{K_1L_2-L_1K_2},\\[2ex] \dfrac{x-a_{2,0}}{L_2M_0-M_2L_0}=\dfrac{y-b_{2,0}}{M_2K_0-K_2M_0}=\dfrac{z-c_{2,0}}{K_2L_0-L_2K_0};\end{cases}$$

und die Bedingungen der Parallellität dieser drei Linien sind nach I. 58):

$$17)\begin{cases}\dfrac{L_0M_1-M_0L_1}{L_1M_2-M_1L_2}=\dfrac{M_0K_1-K_0M_1}{M_1K_2-K_1M_2}=\dfrac{K_0L_1-L_0K_1}{K_1L_2-L_1K_2},\\[2ex]\dfrac{L_1M_2-M_1L_2}{L_2M_0-M_2L_0}=\dfrac{M_1K_2-K_1M_2}{M_2K_0-K_2M_0}=\dfrac{K_1L_2-L_1K_2}{K_2L_0-L_2K_0},\\[2ex]\dfrac{L_2M_0-M_2L_0}{L_0M_1-M_0L_1}=\dfrac{M_2K_0-K_2M_0}{M_0K_1-K_0M_1}=\dfrac{K_2L_0-L_2K_0}{K_0L_1-L_0K_1}.\end{cases}$$

Dass das dritte System aus den beiden ersten, überhaupt jedes System aus den beiden anderen, durch blosse Multiplication folgt, übersieht man auf der Stelle. Aber leicht lässt sich zeigen, dass das dritte System schon eine Folge bloss aus dem ersten Systeme ist. Denn wegen des ersten Systems ist, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

$$L_1M_2-M_1L_2=G(L_0M_1-M_0L_1),$$
$$M_1K_2-K_1M_2=G(M_0K_1-K_0M_1),$$
$$K_1L_2-L_1K_2=G(K_0L_1-L_0K_1);$$

also, wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$K_0,\quad L_0,\quad M_0$$

multiplicirt:

$$K_0L_1M_2-K_0M_1L_2=G(K_0L_0M_1-K_0M_0L_1),$$
$$L_0M_1K_2-L_0K_1M_2=G(L_0M_0K_1-L_0K_0M_1),$$
$$M_0K_1L_2-M_0L_1K_2=G(M_0K_0L_1-M_0L_0K_1);$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen je zwei durch Addition mit einander verbindet:

$$(K_0L_1-L_0K_1)M_2+(K_2L_0-L_2K_0)M_1=-GM_0(K_0L_1-L_0K_1),$$
$$(L_0M_1-M_0L_1)K_2+(L_2M_0-M_2L_0)K_1=-GK_0(L_0M_1-M_0L_1),$$
$$(M_0K_1-K_0M_1)L_2+(M_2K_0-K_2M_0)L_1=-GL_0(M_0K_1-K_0M_1);$$

also:

$$L_2M_0-M_2L_0=-\frac{K_2+GK_0}{K_1}(L_0M_1-M_0L_1),$$
$$M_2K_0-K_2M_0=-\frac{L_2+GL_0}{L_1}(M_0K_1-K_0M_1),$$
$$K_2L_0-L_2K_0=-\frac{M_2+GM_0}{M_1}(K_0L_1-L_0K_1).$$

Aus den Gleichungen

$$L_1M_2 - M_1L_2 = G(L_0M_1 - M_0L_1),$$
$$M_1K_2 - K_1M_2 = G(M_0K_1 - K_0M_1),$$
$$K_1L_2 - L_1K_2 = G(K_0L_1 - L_0K_1)$$

folgt aber:

$$(M_2 + GM_0)L_1 = (L_2 + GL_0)M_1,$$
$$(K_2 + GK_0)M_1 = (M_2 + GM_0)K_1,$$
$$(L_2 + GL_0)K_1 = (K_2 + GK_0)L_1;$$

also:

$$\frac{K_2 + GK_0}{K_1} = \frac{L_2 + GL_0}{L_1} = \frac{M_2 + GM_0}{M_1};$$

folglich nach dem Obigen:

$$\frac{L_2M_0 - M_2L_0}{L_0M_1 - M_0L_1} = \frac{M_2K_0 - K_2M_0}{M_0K_1 - K_0M_1} = \frac{K_2L_0 - L_2K_0}{K_0L_1 - L_0K_1},$$

wie bewiesen werden sollte. Man sieht also, dass aus jedem der drei Systeme 17) die beiden anderen folgen, wovon die Nothwendigkeit auch aus ganz einfachen geometrischen Gründen auf der Stelle erhellet.

Man kann die Gleichungen 17) in der Form von Proportionen auch auf folgende Art ausdrücken:

18)

$$L_0M_1 - M_0L_1 : M_0K_1 - K_0M_1 : K_0L_1 - L_0K_1$$
$$= L_1M_2 - M_1L_2 : M_1K_2 - K_1M_2 : K_1L_2 - L_1K_2$$
$$= L_2M_0 - M_2L_0 : M_2K_0 - K_2M_0 : K_2L_0 : L_2K_0.$$

Sind die drei Ebenen dem Systeme der Ebenen eines Krystalls angehörig, so ist

$$K_0 = \varkappa_0 K, \quad L_0 = \lambda_0 L, \quad M_0 = \mu_0 M;$$
$$K_1 = \varkappa_1 K, \quad L_1 = \lambda_1 L, \quad M_1 = \mu_1 M;$$
$$K_2 = \varkappa_2 K, \quad L_2 = \lambda_2 L, \quad M_2 = \mu_2 M;$$

also nach 17):

$$19) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1}{\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2} = \dfrac{\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1}{\mu_1\varkappa_2 - \varkappa_1\mu_2} = \dfrac{\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1}{\varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2}, \\ \dfrac{\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2}{\lambda_2\mu_0 - \mu_2\lambda_0} = \dfrac{\mu_1\varkappa_2 - \varkappa_1\mu_2}{\mu_2\varkappa_0 - \varkappa_2\mu_0} = \dfrac{\varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2}{\varkappa_2\lambda_0 - \lambda_2\varkappa_0}, \\ \dfrac{\lambda_2\mu_0 - \mu_2\lambda_0}{\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1} = \dfrac{\mu_2\varkappa_0 - \varkappa_2\mu_0}{\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1} = \dfrac{\varkappa_2\lambda_0 - \lambda_2\varkappa_0}{\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1} \end{array} \right.$$

oder:

$$20) \quad \lambda_0\mu_1-\mu_0\lambda_1:\mu_0\varkappa_1-\varkappa_0\mu_1:\varkappa_0\lambda_1-\lambda_0\varkappa_1$$
$$=\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2:\mu_1\varkappa_2-\varkappa_1\mu_2:\varkappa_1\lambda_2-\lambda_1\varkappa_2$$
$$=\lambda_2\mu_0-\mu_2\lambda_0:\mu_2\varkappa_0-\varkappa_2\mu_0:\varkappa_2\lambda_0-\lambda_2\varkappa_0.$$

Unter der Voraussetzung, dass die vorstehenden Bedingungen erfüllt sind, sind die Gleichungen der Zonenlinie die Gleichungen 16), oder, unter Voraussetzung eines Systems von Ebenen eines Krystalls:

$$21) \quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{K(x-a_{0,1})}{\lambda_0\mu_1-\mu_0\lambda_1}=\dfrac{L(y-b_{0,1})}{\mu_0\varkappa_1-\varkappa_0\mu_1}=\dfrac{M(z-c_{0,1})}{\varkappa_0\lambda_1-\lambda_0\varkappa_1},\\[2ex]
\dfrac{K(x-a_{1,2})}{\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2}=\dfrac{L(y-b_{1,2})}{\mu_1\varkappa_2-\varkappa_1\mu_2}=\dfrac{M(z-c_{1,2})}{\varkappa_1\lambda_2-\lambda_1\varkappa_2},\\[2ex]
\dfrac{K(x-a_{2,0})}{\lambda_2\mu_0-\mu_2\lambda_0}=\dfrac{L(y-b_{2,0})}{\mu_2\varkappa_0-\varkappa_2\mu_0}=\dfrac{M(z-c_{2,0})}{\varkappa_2\lambda_0-\lambda_2\varkappa_0};
\end{array}\right.$$

oder:

$$21^*) \quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{x-a_{0,1}}{\left(\dfrac{\lambda_0\mu_1-\mu_0\lambda_1}{K}\right)}=\dfrac{y-b_{0,1}}{\left(\dfrac{\mu_0\varkappa_1-\varkappa_0\mu_1}{L}\right)}=\dfrac{z-c_{0,1}}{\left(\dfrac{\varkappa_0\lambda_1-\lambda_0\varkappa_1}{M}\right)},\\[3ex]
\dfrac{x-a_{1,2}}{\left(\dfrac{\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2}{K}\right)}=\dfrac{y-b_{1,2}}{\left(\dfrac{\mu_1\varkappa_2-\varkappa_1\mu_2}{L}\right)}=\dfrac{z-c_{1,2}}{\left(\dfrac{\varkappa_1\lambda_2-\lambda_1\varkappa_2}{M}\right)},\\[3ex]
\dfrac{x-a_{2,0}}{\left(\dfrac{\lambda_2\mu_0-\mu_2\lambda_0}{K}\right)}=\dfrac{y-b_{2,0}}{\left(\dfrac{\mu_2\varkappa_0-\varkappa_2\mu_0}{L}\right)}=\dfrac{z-c_{2,0}}{\left(\dfrac{\varkappa_2\lambda_0-\lambda_2\varkappa_0}{M}\right)}.
\end{array}\right.$$

Die Coordinaten

$$a_{0,1},\ b_{0,1},\ c_{0,1};\quad a_{1,2},\ b_{1,2},\ c_{1,2};\quad a_{2,0},\ b_{2,0},\ c_{2,0}$$

bleiben natürlich willkührlich, da man sich die Zonenlinie durch jeden beliebigen Punkt im Raume gelegt denken kann.

Wenn die Gleichungen einer beliebigen Geraden

$$22) \quad \frac{x-\mathfrak{a}}{\mathfrak{K}}=\frac{y-\mathfrak{b}}{\mathfrak{L}}=\frac{z-\mathfrak{c}}{\mathfrak{M}}$$

sind, und die Gleichung einer Ebene

$$23) \quad K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z_0-c_0)=0$$

ist; so kann die Frage entstehen, ob diese Ebene einer Zone angehört, welcher die durch die Gleichungen 22) charakterisirte Gerade als Zonenlinie entspricht. Dies wird offenbar der Fall sein, wenn die in Rede stehende Gerade und die in Rede stehende Ebene einander parallel sind, oder wenn eine durch den Punkt $(a_0 b_0 c_0)$ der durch die Gleichungen 22) charakterisirten Geraden parallel gelegte Gerade ganz in die durch die Gleichung 23) charakterisirte Ebene fällt. Nach I. 58) sind aber die Gleichungen der durch den Punkt $(a_0 b_0 c_0)$ parallel mit der durch die Gleichungen 22) charakterisirten Geraden gelegten Geraden offenbar

$$\frac{x-a_0}{\mathfrak{K}}=\frac{y-b_0}{\mathfrak{L}}=\frac{z-c_0}{\mathfrak{M}},$$

und die Bedingungsgleichung, dass diese Gerade ganz in die durch die Gleichung 23) charakterisirte Ebene fällt, ist folglich:

$$24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{K}K_0+\mathfrak{L}L_0+\mathfrak{M}M_0=0,$$

welche Gleichung also erfüllt sein muss, wenn die durch die Gleichung 23) charakterisirte Ebene einer Zone angehören soll, der die durch die Gleichungen 22) charakterisirte Gerade als Zonenlinie entspricht.

Die Gleichung 24) pflegt man die Zonengleichung zu nennen *).

---

*) Gewöhnlich betrachtet man die Gerade 22) als Durchschnittslinie zweier Ebenen des Krystalls. Sind die Gleichungen dieser beiden Ebenen

$$K_1(x-a_1)+L_1(y-b_1)+M_1(z-c_1)=0,$$
$$K_2(x-a_2)+L_2(y-b_2)+M_2(z-c_2)=0;$$

so ist zu setzen:

$$\mathfrak{K}=L_1M_2-M_1L_2,\quad \mathfrak{L}=M_1K_2-K_1M_2,\quad \mathfrak{M}=K_1L_2-L_1K_2;$$

und die Zonengleichung wird dann:

$$K_0(L_1M_2-M_1L_2)+L_0(M_1K_2-K_1M_2)+M_0(K_1L_2-L_2K_2)=0,$$

also, weil, insofern die Gleichung 23) die Gleichung einer Ebene des Krystalls ist,

$$K_0=\varkappa_0K,\quad L_0=\lambda_0L,\quad M_0=\mu_0M;$$
$$K_1=\varkappa_1K,\quad L_1=\lambda_1L,\quad M_1=\mu_1M;$$
$$K_2=\varkappa_2K,\quad L_2=\lambda_2L,\quad M_2=\mu_2M$$

ist:

$$\varkappa_0(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)+\lambda_0(\mu_1\varkappa_2-\varkappa_1\mu_2)+\mu_0(\varkappa_1\lambda_2-\lambda_1\varkappa_2)=0.$$

In diesem Sinne ist es richtig, wenn Naumann (Elemente der theoretischen Krystallographie. S. 48.) sagt, die Zonengleichung sei von den Grund-Coefficienten (Grund-Parametern) unabhängig.

Sollen die drei durch die Gleichungen 15) charakterisirten Ebenen einer und derselben Zone angehören können, so muss nach 24)

$$\mathfrak{K}K_0 + \mathfrak{L}L_0 + \mathfrak{M}M_0 = 0,$$
$$\mathfrak{K}K_1 + \mathfrak{L}L_1 + \mathfrak{M}M_1 = 0,$$
$$\mathfrak{K}K_2 + \mathfrak{L}L_2 + \mathfrak{M}M_2 = 0$$

sein. Aus diesen Gleichungen folgt aber, wenn man dieselben nach der Reihe mit

$$L_1M_2 - M_1L_2, \quad L_2M_0 - M_2L_0, \quad L_0M_1 - M_0L_1$$

multiplicirt und dann zu einander addirt, die Gleichung:

25)

$$K_0(L_1M_2 - M_1L_2) + K_1(L_2M_0 - M_2L_0) + K_2(L_0M_1 - M_0L_1) = 0,$$

oder:

26)

$$L_0(M_1K_2 - K_1M_2) + L_1(M_2K_0 - K_2M_0) + L_2(M_0K_1 - K_0M_1) = 0,$$

oder:

27)

$$M_0(K_1L_2 - L_1K_2) + M_1(K_2L_0 - L_2K_0) + M_2(K_0L_1 - L_0K_1) = 0;$$

und jede dieser Gleichungen, die natürlich nur verschiedene Ausdrücke einer und derselben Gleichung sind, muss also erfüllt sein, wenn die drei durch die Gleichungen 15) charakterisirten Ebenen einer und derselben Zone sollen angehören können.

Für Ebenen eines Krystalls werden die vorstehenden Gleichungen:

$$28)\quad \begin{cases} \varkappa_0(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) + \varkappa_1(\lambda_2\mu_0 - \mu_2\lambda_0) + \varkappa_2(\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1) = 0, \\ \lambda_0(\mu_1\varkappa_2 - \varkappa_1\mu_2) + \lambda_1(\mu_2\varkappa_0 - \varkappa_2\mu_0) + \lambda_2(\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1) = 0, \\ \mu_0(\varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2) + \mu_1(\varkappa_2\lambda_0 - \lambda_2\varkappa_0) + \mu_2(\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1) = 0. \end{cases}$$

§. 27.

Wenn wir den von den beiden durch die Gleichungen

$$29)\ldots \begin{cases} K_0(x - a_0) + L_0(y - b_0) + M_0(z - c_0) = 0, \\ K_1(x - a_1) + L_1(y - b_1) + M_1(z - c_1) = 0 \end{cases}$$

charakterisirten Ebenen eingeschlossenen Winkel durch $V_{0,1}$ bezeichnen, und der Kürze wegen

30)

$$F_{0,1}=(K_0L_1-L_0K_1)^2+(L_0M_1-M_0L_1)^2+(M_0K_1-K_0M_1)^2$$
$$+2(L_0M_1-M_0L_1)(M_0K_1-K_0M_1)\cos(xy)$$
$$+2(M_0K_1-K_0M_1)(K_0L_1-L_0K_1)\cos(yz)$$
$$+2(K_0L_1-L_0K_1)(L_0M_1-M_0L_1)\cos(zx),$$

31) . . . $H_{0,1}=\mathfrak{A}K_0K_1+\mathfrak{B}L_0L_1+\mathfrak{C}M_0M_1$

$$+A(L_0M_1+M_0L_1)+B(M_0K_1+K_0M_1)+C(K_0L_1+L_0K_1)$$

setzen, so ist nach II. 25):

32) . . . . $\operatorname{tang} V_{0,1}{}^2=\frac{NF_{0,1}}{H_{0,1}{}^2};$

und ganz eben so ist, wenn $V_{0,1}'$ den von den beiden durch die Gleichungen

33) . . . $\begin{cases} K_0'(x-a_0')+L_0'(y-b_0')+M_0'(z-c_0')=0, \\ K_1'(x-a_1')+L_1'(y-b_1')+M_1'(z-c_1')=0 \end{cases}$

charakterisirten Ebenen eingeschlossenen Winkel bezeichnet, und der Kürze wegen

34)

$$F_{0,1}'=(K_0'L_1'-L_0'K_1')^2+(L_0'M_1'-M_0'L_1')^2+(M_0'K_1'-K_0'M_1')^2$$
$$+2(L_0'M_1'-M_0'L_1')(M_0'K_1'-K_0'M_1')\cos(xy)$$
$$+2(M_0'K_1'-K_0'M_1')(K_0'L_1'-L_0'K_1')\cos(yz)$$
$$+2(K_0'L_1'-L_0'K_1')(L_0'M_1'-M_0'L_1')\cos(zx),$$

35) . . . $H_{0,1}'=\mathfrak{A}K_0'K_1'+\mathfrak{B}L_0'L_1'+\mathfrak{C}M_0'M_1'$

$$+A(L_0'M_1'+M_0'L_1')+B(M_0'K_1'+K_0'M_1')+C(K_0'L_1'+L_0'K_1')$$

gesetzt wird:

36) . . . . $\operatorname{tang} V_{0,1}'^2=\frac{NF_{0,1}'}{H_{0,1}'^2}.$

Also ist:

37) . . . $\operatorname{tang} V_{0,1}{}^2:\operatorname{tang} V_{0,1}'^2=\frac{F_{0,1}}{H_{0,1}{}^2}:\frac{F_{0,1}'}{H_{0,1}'^2}$

oder:

38) . . . $\tang V_{0,1}{}^2 : \tang V_{0,1}'^2 = \frac{F_{0,1}}{F_{0,1}'} : \left(\frac{H_{0,1}}{H_{0,1}'}\right)^2$.

Sind nun die vier, durch die Gleichungen 29) und 33) charakterisirten Ebenen tautozonal, so ist nach 17):

$$\frac{K_0L_1-L_0K_1}{K_1L_0'-L_1K_0'}=\frac{L_0M_1-M_0L_1}{L_1M_0'-M_1L_0'}=\frac{M_0K_1-K_0M_1}{M_1K_0'-K_1M_0'},$$

$$\frac{K_1L_0'-L_1K_0'}{K_0'L_1'-L_0'K_1'}=\frac{L_1M_0'-M_1L_0'}{L_0'M_1'-M_0'L_1'}=\frac{M_1K_0'-K_1M_0'}{M_0'K_1'-K_0'M_1'};$$

also durch Multiplication:

$$\frac{K_0L_1-L_0K_1}{K_0'L_1'-L_0'K_1'}=\frac{L_0M_1-M_0L_1}{L_0'M_1'-M_0'L_1'}=\frac{M_0K_1-K_0M_1}{M_0'K_1'-K_0'M_1'}.$$

Folglich können wir offenbar

39) . . . . . . $\begin{cases} K_0L_1-L_0K_1=mG_{0,1}, \\ L_0M_1-M_0L_1=kG_{0,1}, \\ M_0K_1-K_0M_1=lG_{0,1} \end{cases}$

und

40) . . . . . . $\begin{cases} K_0'L_1'-L_0'K_1'=mG_{0,1}', \\ L_0'M_1'-M_0'L_1'=kG_{0,1}', \\ M_0'K_1'-K_0'M_1'=lG_{0,1}' \end{cases}$

setzen, woraus sich ferner nach 30) und 34):

41)

$$F_{0,1}=\{m^2+k^2+l^2+2kl\cos(xy)+2lm\cos(yz)+2mk\cos(zx)\}G_{0,1}{}^2,$$
$$F_{0,1}'=\{m^2+k^2+l^2+2kl\cos(xy)+2lm\cos(yz)+2mk\cos(zx)\}G_{0,1}'^2;$$

also:

42) . . . . $\frac{F_{0,1}}{F_{0,1}'}=\left(\frac{G_{0,1}}{G_{0,1}'}\right)^2,$

und folglich nach 38):

43) . . . $\tang V_{0,1}{}^2 : \tang V_{0,1}'^2 = \left(\frac{G_{0,1}}{G_{0,1}'}\right)^2 : \left(\frac{H_{0,1}}{H_{0,1}'}\right)^2$

ergiebt. Also ist:

44)

$$\text{val. abs. } \tang V_{0,1} : \text{val. abs. } \tang V_{0,1}' = \text{val. abs. } \frac{G_{0,1}}{G_{0,1}'} : \text{val. abs. } \frac{H_{0,1}}{H_{0,1}'}.$$

Gehören nun alle vier Ebenen dem Ebenen-Systeme eines Krystalls an, so ist:

$$45) \ldots \begin{cases} K_0 = \varkappa_0 K, & L_0 = \lambda_0 L, & M_0 = \mu_0 M; \\ K_1 = \varkappa_1 K, & L_1 = \lambda_1 L, & M_1 = \mu_1 M \end{cases}$$

und

$$46) \ldots \begin{cases} K_0' = \varkappa_0' K, & L_0' = \lambda_0' L, & M_0' = \mu_0' M; \\ K_1' = \varkappa_1' K, & L_1' = \lambda_1' L, & M_1' = \mu_1' M; \end{cases}$$

wo

$$\varkappa_0,\ \lambda_0,\ \mu_0;\quad \varkappa_1,\ \lambda_1,\ \mu_1;\quad \varkappa_0',\ \lambda_0',\ \mu_0';\quad \varkappa_1',\ \lambda_1',\ \mu_1'$$

rationale Zahlen sind; also ist

$$K_0L_1 - L_0K_1 = (\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1)KL = mG_{0,1},$$

$$L_0M_1 - M_0L_1 = (\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1)LM = kG_{0,1},$$

$$M_0K_1 - K_0M_1 = (\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1)MK = lG_{0,1}$$

und

$$K_0'L_1' - L_0'K_1' = (\varkappa_0'\lambda_1' - \lambda_0'\varkappa_1')KL = mG_{0,1}',$$

$$L_0'M_1' - M_0'L_1' = (\lambda_0'\mu_1' - \mu_0'\lambda_1')LM = kG_{0,1}',$$

$$M_0'K_1' - K_0'M_1' = (\mu_0'\varkappa_1' - \varkappa_0'\mu_1')MK = lG_{0,1}';$$

folglich:

$$47)\ \frac{G_{0,1}}{G_{0,1}'} = \frac{\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1}{\varkappa_0'\lambda_1' - \lambda_0'\varkappa_1'} = \frac{\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1}{\lambda_0'\mu_1' - \mu_0'\lambda_1'} = \frac{\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1}{\mu_0'\varkappa_1' - \varkappa_0'\mu_1'},$$

und daher $\frac{G_{0,1}}{G_{0,1}'}$ ein rationaler Bruch.

Für $H_{0,1}$ und $H_{0,1}'$ erhält man nach 31), 35) und 45), 46) die folgenden Ausdrücke:

$$48) \ldots H_{0,1} = \varkappa_0\varkappa_1\mathfrak{A}K^2 + \lambda_0\lambda_1\mathfrak{B}L^2 + \mu_0\mu_1\mathfrak{C}M^2 \\ + (\lambda_0\mu_1 + \mu_0\lambda_1)ALM \\ + (\mu_0\varkappa_1 + \varkappa_0\mu_1)BMK \\ + (\varkappa_0\lambda_1 + \lambda_0\varkappa_1)CKL$$

und

$$49) \ldots H_{0,1}' = \varkappa_0'\varkappa_1'\mathfrak{A}K^2 + \lambda_0'\lambda_1'\mathfrak{B}L^2 + \mu_0'\mu_1'\mathfrak{C}M^2 \\ + (\lambda_0'\mu_1' + \mu_0'\lambda_1')ALM \\ + (\mu_0'\varkappa_1' + \varkappa_0'\mu_1')BMK \\ + (\varkappa_0'\lambda_1' + \lambda_0'\varkappa_1')CKL.$$

Nach dem Obigen ist aber:

$$LM = \frac{kG_{0,1}}{\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1} = \frac{kG_{0,1}'}{\lambda_0'\mu_1' - \mu_0'\lambda_1'},$$

$$MK = \frac{lG_{0,1}}{\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1} = \frac{lG_{0,1}'}{\mu_0'\varkappa_1' - \varkappa_0'\mu_1'},$$

$$KL = \frac{mG_{0,1}}{\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1} = \frac{mG_{0,1}'}{\varkappa_0'\lambda_1' - \lambda_0'\varkappa_1'};$$

also:

$$H_{0,1} = \varkappa_0\varkappa_1\mathfrak{A}K^2 + \lambda_0\lambda_1\mathfrak{B}L^2 + \mu_0\mu_1\mathfrak{C}M^2$$

$$+ (k\frac{\lambda_0\mu_1 + \mu_0\lambda_1}{\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1}A + l\frac{\mu_0\varkappa_1 + \varkappa_0\mu_1}{\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1}B + m\frac{\varkappa_0\lambda_1 + \lambda_0\varkappa_1}{\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1}C)\,G_{0,1}$$

und

$$H_{0,1}' = \varkappa_0'\varkappa_1'\mathfrak{A}K^2 + \lambda_0'\lambda_1'\mathfrak{B}L^2 + \mu_0'\mu_1'\mathfrak{C}M^2$$

$$+ (k\frac{\lambda_0'\mu_1' + \mu_0'\lambda_1'}{\lambda_0'\mu_1' - \mu_0'\lambda_1'}A + l\frac{\mu_0'\varkappa_1' + \varkappa_0'\mu_1'}{\mu_0'\varkappa_1' - \varkappa_0'\mu_1'}B + m\frac{\varkappa_0'\lambda_1' + \lambda_0'\varkappa_1'}{\varkappa_0'\lambda_1' - \lambda_0'\pi_1'}C)\,G_{0,1}'.$$

Ferner ist nach dem Obigen offenbar:

$$K = \frac{\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1}{k} \cdot \frac{KLM}{G_{0,1}},$$

$$L = \frac{\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1}{l} \cdot \frac{KLM}{G_{0,1}},$$

$$M = \frac{\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1}{m} \cdot \frac{KLM}{G_{0,1}}$$

und:

$$K = \frac{\lambda_0'\mu_1' - \mu_0'\lambda_1'}{k} \cdot \frac{KLM}{G_{0,1}'},$$

$$L = \frac{\mu_0'\varkappa_1' - \varkappa_0'\mu_1'}{l} \cdot \frac{KLM}{G_{0,1}'},$$

$$M = \frac{\varkappa_0'\lambda_1' - \lambda_0'\varkappa_1'}{m} \cdot \frac{KLM}{G_{0,1}'}.$$

Auch ist

$$(\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1)(\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1)(\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1)(KLM)^2 = klm\,G_{0,1}{}^3$$

und

$$(\varkappa_0'\lambda_1' - \lambda_0'\varkappa_1')(\lambda_0'\mu_1' - \mu_0'\lambda_1')(\mu_0'\varkappa_1' - \varkappa_0'\mu_1')(KLM)^2 = klm\,G_{0,1}'^3;$$

also:

$$G_{0,1}=\frac{(\varkappa_0\lambda_1-\lambda_0\varkappa_1)(\lambda_0\mu_1-\mu_0\lambda_1)(\mu_0\varkappa_1-\varkappa_0\mu_1)}{klm}\cdot\left(\frac{KLM}{G_{0,1}}\right)^2$$

und

$$G_{0,1}'=\frac{(\varkappa_0'\lambda_1'-\lambda_0'\varkappa_1')(\lambda_0'\mu_1'-\mu_0'\lambda_1')(\mu_0'\varkappa_1'-\varkappa_0'\mu_1')}{klm}\cdot\left(\frac{KLM}{G_{0,1}'}\right)^2.$$

Folglich ist nach dem Obigen, wenn wir der Kürze wegen:

$$50)\quad . \; . \quad \Pi_{0,1}=\frac{(\varkappa_0\lambda_1-\lambda_0\varkappa_1)(\lambda_0\mu_1-\mu_2\lambda_1)(\mu_0\varkappa_1-\varkappa_0\mu_1)}{klm}$$

und

$$51)\quad \Pi_{0,1}'=\frac{(\varkappa_0'\lambda_1'-\lambda_0'\varkappa_1')(\lambda_0'\mu_1'-\mu_0'\lambda_1')(\mu_0'\varkappa_1'-\varkappa_0'\mu_1')}{klm},$$

so wie:

$$52)\quad \Gamma_{0,1}=\varkappa_0\varkappa_1\left(\frac{\lambda_0\mu_1-\mu_0\lambda_1}{k}\right)^2\mathfrak{A}$$
$$+\lambda_0\lambda_1\left(\frac{\mu_0\varkappa_1-\varkappa_0\mu_1}{l}\right)^2\mathfrak{B}+\mu_0\mu_1\left(\frac{\varkappa_0\lambda_1-\lambda_0\varkappa_1}{m}\right)^2\mathfrak{C}$$
$$+(k\frac{\lambda_0\mu_1+\mu_0\lambda_1}{\lambda_0\mu_1-\mu_0\lambda_1}A+l\frac{\mu_0\varkappa_1+\varkappa_0\mu_1}{\mu_0\varkappa_1-\varkappa_0\mu_1}B+m\frac{\varkappa_0\lambda_1+\lambda_0\varkappa_1}{\varkappa_0\lambda_1-\lambda_0\varkappa_1}C)\Pi_{0,1}$$

und

$$53)\quad \Gamma_{0,1}'=\varkappa_0'\varkappa_1'\left(\frac{\lambda_0'\mu_1'-\mu_0'\lambda_1'}{k}\right)^2\mathfrak{A}$$
$$+\lambda'_0\lambda_1'\left(\frac{\mu_0'\varkappa_1'-\varkappa_0'\mu_1'}{l}\right)^2\mathfrak{B}+\mu_0'\mu_1'\left(\frac{\varkappa_0'\lambda_1'-\lambda_0'\varkappa_1'}{m}\right)^2\mathfrak{C}$$
$$+(k\frac{\lambda_0'\mu_1'+\mu_0'\lambda_1'}{\lambda_0'\mu_1'-\mu_0'\lambda_1'}A+l\frac{\mu_0'\varkappa_1'+\varkappa_0'\mu_1'}{\mu_0'\varkappa_1'-\varkappa_0'\mu_1'}B+m\frac{\varkappa_0'\lambda_1'+\lambda_0'\varkappa_1'}{\varkappa_0'\lambda_1'-\lambda_0'\varkappa_1'}C)\Pi_{0,1}'$$

setzen:

$$54)\quad . \; . \; . \; . \; . \quad H_{0,1}=\Gamma_{0,1}\cdot\left(\frac{KLM}{G_{0,1}}\right)^2$$

und

$$55)\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad H_{0,1}'=\Gamma_{0,1}'\cdot\left(\frac{KLM}{G_{0,1}'}\right)^2;$$

also:

$$56)\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{H_{0,1}}{H_{0,1}'}=\frac{\Gamma_{0,1}}{\Gamma_{0,1}'}\cdot\left(\frac{G_{0,1}'}{G_{0,1}}\right)^2.$$

Folglich ist nach 43):

$$\operatorname{tang} V_{0,1}{}^2 : \operatorname{tang} V_{0,1}{}'^2 = \left(\frac{G_{0,1}}{G_{0,1}{}'}\right)^2 : \left(\frac{\Gamma_{0,1}}{\Gamma_{0,1}{}'}\right)^2 \cdot \left(\frac{G_{0,1}{}'}{G_{0,1}}\right)^4$$

oder:

$$57) \quad \ldots \quad \operatorname{tang} V_{0,1}{}^2 : \operatorname{tang} V_{0,1}{}'^2 = \left(\frac{G_{0,1}}{G_{0,1}{}'}\right)^6 : \left(\frac{\Gamma_{0,1}}{\Gamma_{0,1}{}'}\right)^2,$$

also:

$$58) \quad \ldots \quad \text{val. abs. tang } V_{0,1} : \text{val. abs. tang } V_{0,1}{}'$$

$$= \text{val. abs.} \left(\frac{G_{0,1}}{G_{0,1}{}'}\right)^3 : \text{val. abs.} \frac{\Gamma_{0,1}}{\Gamma_{0,1}{}'},$$

und es wird folglich, da nach dem Obigen $\frac{G_{0,1}}{G_{0,1}{}'}$ ein rationaler Bruch ist, das Verhältniss

$$\text{val. abs. tang } V_{0,1} : \text{val. abs. tang } V_{0,1}{}'$$

rational sein, wenn $\frac{\Gamma_{0,1}}{\Gamma_{0,1}{}'}$ ein rationaler Bruch ist.

Wenn das Axen-System rechtwinklig ist, so ist bekanntlich:

$$\mathfrak{A}=1, \quad \mathfrak{B}=1, \quad \mathfrak{C}=1; \quad A=0, \quad B=0, \quad C=0;$$

also:

$$59) \quad \Gamma_{0,1} = \varkappa_0\varkappa_1 \left(\frac{\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1}{k}\right)^2 + \lambda_0\lambda_1\left(\frac{\mu_0\varkappa_1 - \varkappa_0\mu_1}{l}\right)^2 + \mu_0\mu_1\left(\frac{\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1}{m}\right)^2$$

und

$$60) \quad \Gamma_{0,1}{}' = \varkappa_0{}'\varkappa_1{}' \left(\frac{\lambda_0{}'\mu_1{}' - \mu_0{}'\lambda_1{}'}{k}\right)^2 + \lambda'_0\lambda_1{}'\left(\frac{\mu_0{}'\varkappa_1{}' - \varkappa_0{}'\mu_1{}'}{l}\right)^2 + \mu_0{}'\mu_1{}'\left(\frac{\varkappa_0{}'\lambda_1{}' - \lambda_0{}'\varkappa_1{}'}{m}\right)^2.$$

Im Allgemeinen ist bekanntlich:

$$\mathfrak{A} = \sin(yz)^2, \quad \mathfrak{B} = \sin(zx)^2, \quad \mathfrak{C} = \sin(xy)^2$$

und:

$$A = \cos(zx)\cos(xy) - \cos(yz),$$

$$B = \cos(xy)\cos(yz) - \cos(zx),$$

$$C = \cos(yz)\cos(zx) - \cos(xy).$$

Bezeichnet man aber die an den positiven Theilen der **Axen** der x, y, z liegenden Winkel der von diesen Theilen der **Axen** gebildeten dreiseitigen körperlichen Ecke durch (X), (Y), (Z); so ist nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos(X)=\frac{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)}{\sin(zx)\sin(xy)}=-\frac{A}{\sin(zx)\sin(xy)},$$

$$\cos(Y)=\frac{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)}{\sin(xy)\sin(yz)}=-\frac{B}{\sin(xy)\sin(yz)},$$

$$\cos(Z)=\frac{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)}{\sin(yz)\sin(zx)}=-\frac{C}{\sin(yz)\sin(zx)};$$

also:

$$61)\quad\ldots\ldots\quad\begin{cases}A=-\sin(zx)\sin(xy)\cos(X),\\ B=-\sin(xy)\sin(yz)\cos(Y),\\ C=-\sin(yz)\sin(zx)\cos(Z).\end{cases}$$

Man vergleiche bei diesem Paragraphen: **Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen von Naumann**, in den **Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Zweiter Band. Leipzig 1855. S. 506.**

§. 28.

Ein anderes sehr bemerkenswerthes allgemeines Gesetz, welchem die Winkel tautozonaler Ebenen unterworfen sind, hat neuerlich W. H. **Miller** in der schon oben angeführten Abhandlung: **On the anharmonic ratio of radii normal to four faces of a crystal in one zone; and on the change of the axes of a crystal. (Philosophical Magazine for February 1857.)** bewiesen, welches wir in diesem Paragraphen in anderer Weise als sein Erfinder beweisen und aus unserer im Obigen entwickelten allgemeinen Theorie ableiten wollen *).

Es seien vier Ebenen gegeben, deren Gleichungen wir durch

*) Die mit Sternchen im Folgenden versehenen Nummern der Formeln beziehen sich nur auf diesen Paragraphen. In den übrigen Paragraphen ist der Fortgang der Nummern nicht unterbrochen.

$$1^*) \ldots \begin{cases} K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0, \\ K_1(x-a_1)+L_1(y-b_1)+M_1(z-c_1)=0, \\ K_2(x-a_2)+L_2(y-b_2)+M_2(z-c_2)=0, \\ K_3(x-a_3)+L_3(y-b_3)+M_3(z-c_3)=0 \end{cases}$$

bezeichnen, und die wir nach der Ordnung dieser Gleichungen die

1ste, 2te, 3te, 4te

Ebene nennen wollen. Die von der

1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 4ten, 4ten und 1sten

Ebene eingeschlossenen Winkel mögen der Reihe nach durch

$$V_{0,1},\quad V_{1,2},\quad V_{2,3},\quad V_{3,0}$$

bezeichnet werden.

Setzen wir dann der Kürze wegen:

2*)

$$\begin{aligned} \Omega_{0,1} = & (K_0L_1-L_0K_1)^2+(L_0M_1-M_0L_1)^2+(M_0K_1-K_0M_1)^2 \\ & +2(L_0M_1-M_0L_1)(M_0K_1-K_0M_1)\cos(xy) \\ & +2(M_0K_1-K_0M_1)(K_0L_1-L_0K_1)\cos(yz) \\ & +2(K_0L_1-L_0K_1)(L_0M_1-M_0L_1)\cos(zx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2} = & (K_1L_2-L_1K_2)^2+(L_1M_2-M_1L_2)^2+(M_1K_2-K_1M_2)^2 \\ & +2(L_1M_2-M_1L_2)(M_1K_2-K_1M_2)\cos(xy) \\ & +2(M_1K_2-K_1M_2)(K_1L_2-L_1K_2)\cos(yz) \\ & +2(K_1L_2-L_1K_2)(L_1M_2-M_1L_2)\cos(zx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{2,3} = & (K_2L_3-L_2K_3)^2+(L_2M_3-M_2L_3)^2+(M_2K_3-K_2M_3)^2 \\ & +2(L_2M_3-M_2L_3)(M_2K_3-K_2M_3)\cos(xy) \\ & +2(M_2K_3-K_2M_3)(K_2L_3-L_2K_3)\cos(yz) \\ & +2(K_2L_3-L_2K_3)(L_2M_3-M_2L_3)\cos(zx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{3,0} = & (K_3L_0-L_3K_0)^2+(L_3M_0-M_3L_0)^2+(M_3K_0-K_3M_0)^2 \\ & +2(L_3M_0-M_3L_0)(M_3K_0-K_3M_0)\cos(xy) \\ & +2(M_3K_0-K_3M_0)(K_3L_0-L_3K_0)\cos(yz) \\ & +2(K_3L_0-L_3K_0)(L_3M_0-M_3L_0)\cos(zx) \end{aligned}$$

und

$$3^*) \begin{cases} G_0=\mathfrak{A}K_0^2+\mathfrak{B}L_0^2+\mathfrak{C}M_0^2+2AL_0M_0+2BM_0K_0+2CK_0L_0, \\ G_1=\mathfrak{A}K_1^2+\mathfrak{B}L_1^2+\mathfrak{C}M_1^2+2AL_1M_1+2BM_1K_1+2CK_1L_1, \\ G_2=\mathfrak{A}K_2^2+\mathfrak{B}L_2^2+\mathfrak{C}M_2^2+2AL_2M_2+2BM_2K_2+2CK_2L_2, \\ G_3=\mathfrak{A}K_3^2+\mathfrak{B}L_3^2+\mathfrak{C}M_3^2+2AL_3M_3+2BM_3K_3+2CK_3L_3; \end{cases}$$

so ist nach II. 24), wenn N seine gewöhnliche Bedeutung hat:

$$\sin V_{0,1}{}^2 = \frac{N\Omega_{0,1}}{G_0 G_1}, \quad \sin V_{1,2}{}^2 = \frac{N\Omega_{1,2}}{G_1 G_2}, \quad \sin V_{2,3}{}^2 = \frac{N\Omega_{2,3}}{G_2 G_3},$$

$$\sin V_{3,0}{}^2 = \frac{N\Omega_{3,0}}{G_3 G_0};$$

also:

$$\sin V_{0,1}{}^2 . \sin V_{2,3}{}^2 = \frac{N^2 \Omega_{0,1}\, \Omega_{2,3}}{G_0 G_1 G_2 G_3},$$

$$\sin V_{1,2}{}^2 . \sin V_{3,0}{}^2 = \frac{N^2 \Omega_{1,2}\, \Omega_{3,0}}{G_0 G_1 G_2 G_3};$$

folglich, wenn man dividirt:

$$4^*) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\sin V_{0,1}{}^2 . \sin V_{2,3}{}^2}{\sin V_{1,2}{}^2 . \sin V_{3,0}{}^2} = \frac{\Omega_{0,1}\, \Omega_{2,3}}{\Omega_{1,2}\, \Omega_{3,0}}.$$

Sind nun unsere vier Ebenen tautozonal, so können wir, wenn $C_{1,2}$, $C_{2,3}$, $C_{3,0}$ gewisse Constanten bezeichnen, nach 17) offenbar:

$$K_1 L_2 - L_1 K_2 = C_{1,2}(K_0 L_1 - L_0 K_1),$$
$$L_1 M_2 - M_1 L_2 = C_{1,2}(L_0 M_1 - M_0 L_1),$$
$$M_1 K_2 - K_1 M_2 = C_{1,2}(M_0 K_1 - K_0 M_1);$$

$$K_2 L_3 - L_2 K_3 = C_{2,3}(K_0 L_1 - L_0 K_1),$$
$$L_2 M_3 - M_2 L_3 = C_{2,3}(L_0 M_1 - M_0 L_1),$$
$$M_2 K_3 - K_2 M_3 = C_{2,3}(M_0 K_1 - K_0 M_1);$$

$$K_3 L_0 - L_3 K_0 = C_{3,0}(K_0 L_1 - L_0 K_1),$$
$$L_3 M_0 - M_3 L_0 = C_{3,0}(L_0 M_1 - M_0 L_1),$$
$$M_3 K_0 - K_3 M_0 = C_{3,0}(M_0 K_1 - K_0 M_1)$$

setzen, und nach 2*) ist dann augenscheinlich:

5*)

$$\Omega_{1,2} = C_{1,2}{}^2 \Omega_{0,1}, \quad \Omega_{2,3} = C_{2,3}{}^2 \Omega_{0,1}, \quad \Omega_{3,0} = C_{3,0}{}^2 \Omega_{0,1};$$

also nach 4*):

$$\frac{\sin V_{0,1}{}^2 . \sin V_{2,3}{}^2}{\sin V_{1,2}{}^2 . \sin V_{3,0}{}^2} = \frac{C_{2,3}{}^2}{C_{1,2}{}^2 . C_{3,0}{}^2},$$

woraus:

$$6^*) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\sin V_{0,1} \sin V_{2,3}}{\sin V_{1,2} \sin V_{3,0}} = \pm \frac{C_{2,3}}{C_{1,2}\, C_{3,0}}$$

folgt, wenn man das Zeichen immer so nimmt, dass die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens positiv ausfällt.

Gehören nun die vier Ebenen einem Krystall an, so ist:

$$K_0 = \varkappa_0 K, \quad L_0 = \lambda_0 L, \quad M_0 = \mu_0 M;$$
$$K_1 = \varkappa_1 K, \quad L_1 = \lambda_1 L, \quad M_1 = \mu_1 M;$$
$$K_2 = \varkappa_2 K, \quad L_2 = \lambda_2 L, \quad M_2 = \mu_2 M;$$
$$K_3 = \varkappa_3 K, \quad L_3 = \lambda_3 L, \quad M_3 = \mu_3 M;$$

also:

$$K_0 L_1 - L_0 K_1 = (\varkappa_0 \lambda_1 - \lambda_0 \varkappa_1) KL,$$
$$K_1 L_2 - L_1 K_2 = (\varkappa_1 \lambda_2 - \lambda_1 \varkappa_2) KL,$$
$$K_2 L_3 - L_2 K_3 = (\varkappa_2 \lambda_3 - \lambda_2 \varkappa_3) KL,$$
$$K_3 L_0 - L_3 K_0 = (\varkappa_3 \lambda_0 - \lambda_3 \varkappa_0) KL;$$

$$L_0 M_1 - M_0 L_1 = (\lambda_0 \mu_1 - \mu_0 \lambda_1) LM,$$
$$L_1 M_2 - M_1 L_2 = (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) LM,$$
$$L_2 M_3 - M_2 L_3 = (\lambda_2 \mu_3 - \mu_2 \lambda_3) LM,$$
$$L_3 M_0 - M_3 L_0 = (\lambda_3 \mu_0 - \mu_3 \lambda_0) LM;$$

$$M_0 K_1 - K_0 M_1 = (\mu_0 \varkappa_1 - \varkappa_0 \mu_1) MK,$$
$$M_1 K_2 - K_1 M_2 = (\mu_1 \varkappa_2 - \varkappa_1 \mu_2) MK,$$
$$M_2 K_3 - K_2 M_3 = (\mu_2 \varkappa_3 - \varkappa_2 \mu_3) MK,$$
$$M_3 K_0 - K_3 M_0 = (\mu_3 \varkappa_0 - \varkappa_3 \mu_0) MK;$$

folglich nach dem Obigen offenbar:

$$C_{1,2} = \frac{\varkappa_1 \lambda_2 - \lambda_1 \varkappa_2}{\varkappa_0 \lambda_1 - \lambda_0 \varkappa_1} = \frac{\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2}{\lambda_0 \mu_1 - \mu_0 \lambda_1} = \frac{\mu_1 \varkappa_2 - \varkappa_1 \mu_2}{\mu_0 \varkappa_1 - \varkappa_0 \mu_1},$$

$$C_{2,3} = \frac{\varkappa_2 \lambda_3 - \lambda_2 \varkappa_3}{\varkappa_0 \lambda_1 - \lambda_0 \varkappa_1} = \frac{\lambda_2 \mu_3 - \mu_2 \lambda_3}{\lambda_0 \mu_1 - \mu_0 \lambda_1} = \frac{\mu_2 \varkappa_3 - \varkappa_2 \mu_3}{\mu_0 \varkappa_1 - \varkappa_0 \mu_1},$$

$$C_{3,0} = \frac{\varkappa_3 \lambda_0 - \lambda_3 \varkappa_0}{\varkappa_0 \lambda_1 - \lambda_0 \varkappa_1} = \frac{\lambda_3 \mu_0 - \mu_3 \lambda_0}{\lambda_0 \mu_1 - \mu_0 \lambda_1} = \frac{\mu_3 \varkappa_0 - \varkappa_3 \mu_0}{\mu_0 \varkappa_1 - \varkappa_0 \mu_1}.$$

Also ist nach 6*):

$$7^*) \quad \frac{\sin V_{0,1} \sin V_{2,3}}{\sin V_{1,2} \sin V_{3,0}} = \pm \frac{(\varkappa_0 \lambda_1 - \lambda_0 \varkappa_1)(\varkappa_2 \lambda_3 - \lambda_2 \varkappa_3)}{(\varkappa_1 \lambda_2 - \lambda_1 \varkappa_2)(\varkappa_3 \lambda_0 - \lambda_3 \varkappa_0)}$$

$$= \pm \frac{(\lambda_0 \mu_1 - \mu_0 \lambda_1)(\lambda_2 \mu_3 - \mu_2 \lambda_3)}{(\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2)(\lambda_3 \mu_0 - \mu_3 \lambda_0)}$$

$$= \pm \frac{(\mu_0 \varkappa_1 - \varkappa_0 \mu_1)(\mu_2 \varkappa_3 - \varkappa_2 \mu_3)}{(\mu_1 \varkappa_2 - \varkappa_1 \mu_2)(\mu_3 \varkappa_0 - \varkappa_3 \mu_0)}.$$

Bestimmt man die Grössen

$$\varkappa_0', \quad \lambda_0', \quad \mu_0'$$

aus den Gleichungen:

$$\varkappa_0 = \lambda_0'(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3) - \mu_0'(\mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3),$$
$$\lambda_0 = \mu_0'(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3) - \varkappa_0'(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3),$$
$$\mu_0 = \varkappa_0'(\mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3) - \lambda_0'(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3);$$

so ist, wie man leicht findet:

$$\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1 = \quad (\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3)(\varkappa_0'\varkappa_1 + \lambda_0'\lambda_1 + \mu_0'\mu_1),$$
$$\varkappa_3\lambda_0 - \lambda_3\varkappa_0 = -(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3)(\varkappa_0'\varkappa_3 + \lambda_0'\lambda_3 + \mu_0'\mu_3);$$

also:

$$\frac{\varkappa_0\lambda_1 - \lambda_0\varkappa_1}{\varkappa_3\lambda_0 - \lambda_3\varkappa_0} = -\frac{\varkappa_0'\varkappa_1 + \lambda_0'\lambda_1 + \mu_0'\mu_1}{\varkappa_0'\varkappa_3 + \lambda_0'\lambda_3 + \mu_0'\mu_3}.$$

Bestimmt man die Grössen

$$\varkappa_2', \quad \lambda_2', \quad \mu_2'$$

aus den Gleichungen:

$$\varkappa_2 = \lambda_2'(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3) - \mu_2'(\mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3),$$
$$\lambda_2 = \mu_2'(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3) - \varkappa_2'(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3),$$
$$\mu_2 = \varkappa_2'(\mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3) - \lambda_2'(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3);$$

so ist ganz eben so wie vorher:

$$\varkappa_2\lambda_3 - \lambda_2\varkappa_3 = \quad (\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3)(\varkappa_2'\varkappa_3 + \lambda_2'\lambda_3 + \mu_2'\mu_3),$$
$$\varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2 = -(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3)(\varkappa_2'\varkappa_1 + \lambda_2'\lambda_1 + \mu_2'\mu_1);$$

also:

$$\frac{\varkappa_2\lambda_3 - \lambda_2\varkappa_3}{\varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2} = -\frac{\varkappa_2'\varkappa_3 + \lambda_2'\lambda_3 + \mu_2'\mu_3}{\varkappa_2'\varkappa_1 + \lambda_2'\lambda_1 + \mu_2'\mu_1}.$$

Folglich ist nach 7*):

8*)

$$\frac{\sin V_{0,1}\sin V_{2,3}}{\sin V_{1,2}\sin V_{3,0}} = \pm\frac{\varkappa_0'\varkappa_1 + \lambda_0'\lambda_1 + \mu_0'\mu_1}{\varkappa_0'\varkappa_3 + \lambda_0'\lambda_3 + \mu_0'\mu_3}\cdot\frac{\varkappa_2'\varkappa_3 + \lambda_2'\lambda_3 + \mu_2'\mu_3}{\varkappa_2'\varkappa_1 + \lambda_2'\lambda_1 + \mu_2'\mu_1}$$

oder

9*)

$$\frac{\sin V_{0,1}\sin V_{2,3}}{\sin V_{1,2}\sin V_{3,0}} = \pm\frac{\varkappa_0'\varkappa_1 + \lambda_0'\lambda_1 + \mu_0'\mu_1}{\varkappa_2'\varkappa_1 + \lambda_2'\lambda_1 + \mu_2'\mu_1} : \frac{\varkappa_0'\varkappa_3 + \lambda_0'\lambda_3 + \mu_0'\mu_3}{\varkappa_2'\varkappa_3 + \lambda_2'\lambda_3 + \mu_2'\mu_3}.$$

Was nun die Bestimmung der Grössen

$$\varkappa_0',\ \lambda_0',\ \mu_0' \quad \text{und} \quad \varkappa_2',\ \lambda_2',\ \mu_2'$$

aus den obigen Gleichungen betrifft, so ist darüber Folgendes zu bemerken.

Wenn man die drei Gleichungen

$$10^*)\ \ldots \begin{cases} \varkappa_0 = \lambda_0'(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3) - \mu_0'(\mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3), \\ \lambda_0 = \mu_0'(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3) - \varkappa_0'(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3), \\ \mu_0 = \varkappa_0'(\mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3) - \lambda_0'(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3), \end{cases}$$

welche zur Bestimmung von $\varkappa_0'$, λ_0', μ_0' dienen, nach der Reihe mit

$$\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3, \quad \mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3, \quad \varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3$$

multiplicirt und dann zu einander addirt, so erhält man:

$$\varkappa_0(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3) + \lambda_0(\mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3) + \mu_0(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3) = 0,$$

und die Bestimmung der Grössen $\varkappa_0'$, λ_0', μ_0' aus den drei obigen Gleichungen ist also nur dann möglich, wenn vorstehende Gleichung erfüllt ist. Dass dies aber der Fall ist, erhellet auf der Stelle. Denn weil die 1ste, 2te, 4te Ebene tautozonal sind, so können wir nach 17)

$$\begin{aligned} L_1M_3 - M_1L_3 &= C_{1,3}(L_0M_1 - M_0L_1), \\ M_1K_3 - K_1M_3 &= C_{1,3}(M_0K_1 - K_0M_1), \\ K_1L_3 - L_1K_3 &= C_{1,3}(K_0L_1 - L_0K_1) \end{aligned}$$

setzen, woraus unmittelbar

$$K_0(L_1M_3 - M_1L_3) + L_0(M_1K_3 - K_1M_3) + M_0(K_1L_3 - L_1K_3) = 0,$$

und also nach dem Obigen offenbar auch

$$\varkappa_0(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3) + \lambda_0(\mu_1\varkappa_3 - \varkappa_1\mu_3) + \mu_0(\varkappa_1\lambda_3 - \lambda_1\varkappa_3) = 0$$

folgt, wie es sein soll. Zugleich sieht man nun aber auch, dass sich eine der drei Grössen $\varkappa_0'$, λ_0', μ_0' immer willkührlich annehmen lässt, mittelst welches Werthes dann die beiden anderen Grössen so bestimmt werden, dass zweien der Gleichungen 10*) genügt wird, worauf dann die dritte dieser Gleichungen von selbst erfüllt sein wird.

Ganz ähnliche Bemerkungen sind über die drei Gleichungen

$$11^*) \ldots \left\{\begin{array}{l} \varkappa_2=\lambda_2'(\varkappa_1\lambda_3-\lambda_1\varkappa_3)-\mu_2'(\mu_1\varkappa_3-\varkappa_1\mu_3), \\ \lambda_2=\mu_2'(\lambda_1\mu_3-\mu_1\lambda_3)-\varkappa_2'(\varkappa_1\lambda_3-\lambda_1\varkappa_3), \\ \mu_2=\varkappa_2'(\mu_1\varkappa_3-\varkappa_1\mu_3)-\lambda_2'(\lambda_1\mu_3-\mu_1\lambda_3), \end{array}\right.$$

welche zur Bestimmung von $\varkappa_2'$, λ_2', μ_2' dienen, zu machen.

§. 29.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine der beiden Richtungen einer durch den Punkt (abc) gehenden Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, wollen wir durch α, β, γ bezeichnen. Setzen wir dann:

$$62) \ldots \left\{\begin{array}{l} X=\mathfrak{A}\cos\alpha+C\cos\beta+B\cos\gamma, \\ Y=C\cos\alpha+\mathfrak{B}\cos\beta+A\cos\gamma, \\ Z=B\cos\alpha+A\cos\beta+\mathfrak{C}\cos\gamma; \end{array}\right.$$

so sind nach I. 23) die Gleichungen dieser Geraden:

$$63) \ldots\ldots \frac{x-a}{X}=\frac{y-b}{Y}=\frac{z-c}{Z}.$$

Wenn nun ferner

$$64) \ldots K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0$$

die Gleichung einer durch den Punkt $(a_0b_0c_0)$ gehenden Ebene und $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ deren Durchschnittspunkt mit der obigen Geraden ist, so hat man zur Bestimmung der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{X}=\frac{\mathfrak{y}-b}{Y}=\frac{\mathfrak{z}-c}{Z},$$

$$K_0(\mathfrak{x}-a_0)+L_0(\mathfrak{y}-b_0)+M_0(\mathfrak{z}-c_0)=0;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$65) \ldots D_0=K_0(a_0-a)+L_0(b_0-b)+M_0(c_0-c)$$

setzen, die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{X}=\frac{\mathfrak{y}-b}{Y}=\frac{\mathfrak{z}-c}{Z},$$

$$K_0(\mathfrak{x}-a)+L_0(\mathfrak{y}-b)+M_0(\mathfrak{z}-c)=D_0;$$

aus denen man auf der Stelle:

$$66) \ldots \ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{x}-a=\dfrac{D_0X}{K_0X+L_0Y+M_0Z}, \\ \mathfrak{y}-b=\dfrac{D_0Y}{K_0X+L_0Y+M_0Z}, \\ \mathfrak{z}-c=\dfrac{D_0Z}{K_0X+L_0Y+M_0Z} \end{cases}$$

erhält.

Die Entfernung des Punktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ von dem Punkte (abc) betrachte man als positiv oder negativ, jenachdem der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ in Bezug auf den Punkt (abc) als Anfangspunkt oder als Ausgangspunkt in der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung unserer Geraden oder in der entgegengesetzten Richtung derselben liegt, und bezeichne mit Rücksicht hierauf diese Entfernung durch u; so ist nach I. 18):

$$u^2=(\mathfrak{x}-a)^2+(\mathfrak{y}-b)^2+(\mathfrak{z}-c)^2$$

$$+2(\mathfrak{x}-a)(\mathfrak{y}-b)\cos(xy)+2(\mathfrak{y}-b)(\mathfrak{z}-c)\cos(yz)+2(\mathfrak{z}-c)(\mathfrak{x}-a)\cos(zx),$$

oder, wenn wir

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{X}=\frac{\mathfrak{y}-b}{Y}=\frac{\mathfrak{z}-c}{Z}=G$$

setzen:

$$u^2=G^2\{X^2+Y^2+Z^2+2XY\cos(xy)+2YZ\cos(yz)+2ZX\cos(zx)\},$$

also nach I. 29):

$$67) \ldots \ldots \quad u^2=G^2N^2, \quad u=\pm GN;$$

wo sich nun frägt, wie das Zeichen zu nehmen ist, was man auf folgende Art entscheiden kann. Man nehme zwei durch den Punkt (abc) gehende Axen der v und w an, welche auf der durch den Punkt (abc) gehenden Geraden, die wir als Axe der u betrachten, senkrecht stehen; so ist, wenn wir uns durch den Punkt (abc) ein dem Systeme der (xyz) paralleles System der $(x'y'z')$ gelegt denken, und die Coordinaten des Punktes $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, auf den sich überhaupt alle Coordinaten beziehen sollen, in diesem Systeme durch $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$ bezeichnen, nach I. 7) offenbar:

$$u+v\cos(uv)+w\cos(wu)=\mathfrak{x}'\cos(ux')+\mathfrak{y}'\cos(uy')+\mathfrak{z}'\cos(uz'),$$

also, weil

$$(uv)=90^0, \quad (wu)=90^0$$

und

Also kann man nach 72) auch $X_{1,2}$, $Y_{1,2}$, $Z_{1,2}$ finden, und zur Bestimmung von $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ hat man nach I. 32) die folgenden Formeln:

$$76) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha_{1,2} = \dfrac{X_{1,2} + Y_{1,2}\cos(xy) + Z_{1,2}\cos(zx)}{N}, \\[2ex] \cos\beta_{1,2} = \dfrac{X_{1,2}\cos(xy) + Y_{1,2} + Z_{1,2}\cos(yz)}{N}, \\[2ex] \cos\gamma_{1,2} = \dfrac{X_{1,2}\cos(zx) + Y_{1,2}\cos(yz) + Z_{1,2}}{N}. \end{array} \right.$$

§. 30.

Von vorzüglicher Wichtigkeit ist die Theorie der Zwillings-Systeme. Wir wollen uns eine beliebige, durch den Anfang der xyz gehende Gerade denken, welche die Zwillings-Axe genannt wird, und uns dann vorstellen, dass das Axen-System der xyz sich um die Zwillings-Axe als eine feste Axe gedreht habe, bis der positive Theil jeder der drei Axen der x, y, z eine halbe Kegelfläche beschrieben hat, und also in seiner neuen Lage mit der Zwillings-Axe und seiner ersten Lage in einer und derselben Ebene liegt; nimmt man nun die positiven Theile der Axen der x, y, z in ihren neuen Lagen als die positiven Theile der Axen der x', y', z' eines neuen Axen-Systems der $x'y'z'$ an, so heissen die beiden Systeme der xyz und $x'y'z'$ Zwillings-Axen-Systeme mit einerlei Anfang*). Legt man aber durch einen beliebigen Punkt, dessen Coordinaten in dem Systeme der xyz durch a, b, c bezeichnet werden mögen, ein dem Systeme der $x'y'z'$ paralleles Axen-System der $x''y''z''$; so heissen die Systeme der xyz und $x''y''z''$ Zwillings-Axen-Systeme mit verschiedenem Anfang. Solche Axen-Systeme wollen wir nun einer genaueren Betrachtung unterwerfen.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine der beiden Richtungen der Zwillings-Axe mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, bezeichnen wir durch α, β, γ, und setzen:

$$77) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} X = \mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma, \\ Y = C\cos\alpha + \mathfrak{B}\cos\beta + A\cos\gamma, \\ Z = B\cos\alpha + A\cos\beta + \mathfrak{C}\cos\gamma. \end{array} \right.$$

*) Man vergl. Naumann: Elemente der theoretischen Krystallographie. S. 62.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die positiven Theile der Axen der x', y', z' mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliessen, bezeichnen wir durch

$$(xx'),\ (yx'),\ (zx');\quad (xy'),\ (yy'),\ (zy');\quad (xz'),\ (yz'),\ (zz')$$

und setzen:

$$78)\ldots \begin{cases} X_x = \mathfrak{A}\cos(xx') + C\cos(yx') + B\cos(zx'), \\ Y_x = C\cos(xx') + \mathfrak{B}\cos(yx') + A\cos(zx'), \\ Z_x = B\cos(xx') + A\cos(yx') + \mathfrak{C}\cos(zx'); \end{cases}$$

ferner:

$$79)\ldots \begin{cases} X_y = \mathfrak{A}\cos(xy') + C\cos(yy') + B\cos(zy'), \\ Y_y = C\cos(xy') + \mathfrak{B}\cos(yy') + A\cos(zy'), \\ Z_y = B\cos(xy') + A\cos(yy') + \mathfrak{C}\cos(zy'); \end{cases}$$

und

$$80)\ldots \begin{cases} X_z = \mathfrak{A}\cos(xz') + C\cos(yz') + B\cos(zz'), \\ Y_z = C\cos(xz') + \mathfrak{B}\cos(yz') + A\cos(zz'), \\ Z_z = B\cos(xz') + A\cos(yz') + \mathfrak{C}\cos(zz'). \end{cases}$$

Nach I. 36) haben wir zuförderst offenbar die folgende Gleichung:

$$81)\ldots\quad N\cos\alpha = X_x\cos\alpha + Y_x\cos\beta + Z_x\cos\gamma.$$

Ferner sind die Gleichungen der Zwillings-Axe und der Axe der x' nach I. 23):

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} \quad \text{und} \quad \frac{x}{X_x} = \frac{y}{Y_x} = \frac{z}{Z_x};$$

bezeichnen wir also die Gleichung der Ebene dieser beiden Geraden durch

$$\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z = 0,$$

so ist

$$\mathfrak{a}X + \mathfrak{b}Y + \mathfrak{c}Z = 0,$$

$$\mathfrak{a}X_x + \mathfrak{b}Y_x + \mathfrak{c}Z_x = 0;$$

da aber in dieser Ebene auch die Axe der x liegen soll, deren Gleichungen $y=0$, $z=0$ sind, so muss für jedes x offenbar $\mathfrak{a}x=0$ sein, woraus sich $\mathfrak{a}=0$, und daher

$$\mathfrak{b}Y + \mathfrak{c}Z = 0,$$

$$\mathfrak{b}Y_x + \mathfrak{c}Z_x = 0$$

ergiebt, welche zwei Gleichungen sogleich auf die Gleichung

$$82) \quad \ldots\ldots\ldots \quad ZY_x - YZ_x = 0$$

führen. Aus den beiden Gleichungen 81) und 82) erhält man leicht:

$$(N - X_x)\,Y\cos\alpha = (Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,Y_x,$$

$$(N - X_x)\,Z\cos\alpha = (Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,Z_x;$$

also, weil nach I. 33)

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = N$$

ist:

$$83) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} (N - X\cos\alpha)\,Y_x = (N - X_x)\,Y\cos\alpha, \\ (N - X\cos\alpha)\,Z_x = (N - X_x)\,Z\cos\alpha. \end{cases}$$

Nun hat man aber nach I. 32) die Gleichung

$$N\cos(xx') = X_x + Y_x\cos(xy) + Z_x\cos(zx)$$

oder

$$N\{1 - \cos(xx')\} = (N - X_x) - Y_x\cos(xy) - Z_x\cos(zx);$$

folglich nach 83):

$$N(N - X\cos\alpha)\{1 - \cos(xx')\}$$

$$= (N - X_x)\{N - [X + Y\cos(xy) + Z\cos(zx)]\cos\alpha\},$$

also nach I. 32):

$$(N - X\cos\alpha)\{1 - \cos(xx')\} = (N - X_x)\sin\alpha^2,$$

woraus:

$$N - X_x = \frac{2(N - X\cos\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(xx')^2}{\sin\alpha^2}.$$

Verbindet man hiermit die Gleichungen 83), so erhält man:

$$84) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} N - X_x = \dfrac{2(N - X\cos\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(xx')^2}{\sin\alpha^2}, \\[2ex] Y_x = \dfrac{2Y\sin\tfrac{1}{2}(xx')^2\cos\alpha}{\sin\alpha^2}, \\[2ex] Z_x = \dfrac{2Z\sin\tfrac{1}{2}(xx')^2\cos\alpha}{\sin\alpha^2}; \end{cases}$$

also, weil offenbar

$$(xx') = 2\alpha, \quad \tfrac{1}{2}(xx') = \alpha$$

ist:

$$85)\quad X_x = 2X\cos\alpha - N, \quad Y_x = 2Y\cos\alpha, \quad Z_x = 2Z\cos\alpha.$$

Nach I. 32) ist:

$$N\cos(yx') = X_x\cos(xy) + Y_x + Z_x\cos(yz),$$

$$N\cos(zx') = X_x\cos(zx) + Y_x\cos(yz) + Z_x;$$

also nach 85):

$$N\cos(yx') = 2\{X\cos(xy) + Y + Z\cos(yz)\}\cos\alpha - N\cos(xy),$$

$$N\cos(zx') = 2\{X\cos(zx) + Y\cos(yz) + Z\}\cos\alpha - N\cos(zx);$$

und folglich nach I. 32):

$$\cos(yx') = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(xy),$$

$$\cos(zx') = 2\cos\gamma\cos\alpha - \cos(zx).$$

Daher ist:

$$86)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \cos(xx') = \cos 2\alpha, \\ \cos(yx') = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(xy), \\ \cos(zx') = 2\cos\gamma\cos\alpha - \cos(zx). \end{array}\right.$$

Ganz eben so ist:

$$87)\quad X_y = 2X\cos\beta, \quad Y_y = 2Y\cos\beta - N, \quad Z_y = 2Z\cos\beta$$

und

$$88)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \cos(xy') = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(xy), \\ \cos(yy') = \cos 2\beta, \\ \cos(zy') = 2\cos\beta\cos\gamma - \cos(yz); \end{array}\right.$$

ferner:

$$89)\quad X_z = 2X\cos\gamma, \quad Y_z = 2Y\cos\gamma, \quad Z_z = 2Z\cos\gamma - N$$

und:

$$90)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} \cos(xz') = 2\cos\gamma\cos\alpha - \cos(zx), \\ \cos(yz') = 2\cos\beta\cos\gamma - \cos(yz), \\ \cos(zz') = \cos 2\gamma. \end{array}\right.$$

Also ist:

$$91)\qquad (xy') = (yx'),\quad (yz') = (zy'),\quad (zx') = (xz').$$

Die Gleichungen der Axen der x', y', z' sind:

$$92)\;\ldots\ldots\;\begin{cases} \dfrac{x}{2X\cos\alpha - N} = \dfrac{y}{2Y\cos\alpha} = \dfrac{z}{2Z\cos\alpha}, \\[2ex] \dfrac{x}{2X\cos\beta} = \dfrac{y}{2Y\cos\beta - N} = \dfrac{z}{2Z\cos\beta}, \\[2ex] \dfrac{x}{2X\cos\gamma} = \dfrac{y}{2Y\cos\gamma} = \dfrac{z}{2Z\cos\gamma - N}. \end{cases}$$

Wenn man

$$\cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1,\quad \cos 2\beta = 2\cos\beta^2 - 1,\quad \cos 2\gamma = 2\cos\gamma^2 - 1$$

setzt, so findet man sehr leicht:

$$\mathfrak{A}\cos(xx') + C\cos(yx') + B\cos(zx')$$
$$= 2(\mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma)\cos\alpha - \{\mathfrak{A} + C\cos(xy) + B\cos(zx)\},$$

$$\mathfrak{A}\cos(xy') + C\cos(yy') + B\cos(zy')$$
$$= 2(\mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma)\cos\beta - \{\mathfrak{A}\cos(xy) + C + B\cos(yz)\},$$

$$\mathfrak{A}\cos(xz') + C\cos(yz') + B\cos(zz')$$
$$= 2(\mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma)\cos\gamma - \{\mathfrak{A}\cos(zx) + C\cos(yz) + B\};$$

also nach 77) und II. 1):

$$\mathfrak{A}\cos(xx') + C\cos(yx') + B\cos(zx') = 2X\cos\alpha - N,$$
$$\mathfrak{A}\cos(xy') + C\cos(yy') + B\cos(zy') = 2X\cos\beta,$$
$$\mathfrak{A}\cos(xz') + C\cos(yz') + B\cos(zz') = 2X\cos\gamma;$$

und ganz eben so:

$$C\cos(xx') + \mathfrak{B}\cos(yx') + A\cos(zx') = 2Y\cos\alpha,$$
$$C\cos(xy') + \mathfrak{B}\cos(yy') + A\cos(zy') = 2Y\cos\beta - N,$$
$$C\cos(xz') + \mathfrak{B}\cos(yz') + A\cos(zz') = 2Y\cos\gamma;$$

so wie:

$$B\cos(xx') + A\cos(yx') + \mathfrak{C}\cos(zx') = 2Z\cos\alpha,$$
$$B\cos(xy') + A\cos(yy') + \mathfrak{C}\cos(zy') = 2Z\cos\beta,$$
$$B\cos(xz') + A\cos(yz') + \mathfrak{C}\cos(zz') = 2Z\cos\gamma - N.$$

also ist offenbar nach 2):

93)

$$N(x-a)=(2X\cos\alpha-N)x''+2Xy''\cos\beta+2Xz''\cos\gamma,$$
$$N(y-b)=2Yx''\cos\alpha+(2Y\cos\beta-N)y''+2Yz''\cos\gamma,$$
$$N(z-c)=2Zx''\cos\alpha+2Zy''\cos\beta+(2Z\cos\gamma-N)z'';$$

und

94)

$$Nx=(2X\cos\alpha-N)x'+2Xy'\cos\beta+2Xz'\cos\gamma,$$
$$Ny=2Yx'\cos\alpha+(2Y\cos\beta-N)y'+2Yz'\cos\gamma,$$
$$Nz=2Zx'\cos\alpha+2Zy'\cos\beta+(2Z\cos\gamma-N)z'.$$

Mittelst 77) und I. 32) kann man aus diesen Formeln entweder X, Y, Z oder α, β, γ ganz eliminiren. Dieselben dienen, um unmittelbar von dem Systeme der xyz zu dem Systeme der x'', y'', z'' oder x', y', z' überzugehen, und sind ganz allgemein für alle Coordinatensysteme gültig. Dieselben können jedoch noch auf eine andere Art ausgedrückt werden, wie wir jetzt zeigen wollen.

Die auf der Zwillings-Axe senkrecht stehenden Ebenen, von denen man die durch den Anfang der xyz gehende besonders hervorheben und durch eine Gleichung von der Form

$$95) \quad \mathfrak{K}x+\mathfrak{L}y+\mathfrak{M}z=0$$

charakterisiren kann, nennt man Zwillings-Ebenen. Wir wollen der Kürze wegen

$$96) \quad \mathfrak{G}=\pm\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{A}\mathfrak{K}^2+\mathfrak{B}\mathfrak{L}^2+\mathfrak{C}\mathfrak{M}^2+2C\mathfrak{K}\mathfrak{L}+2A\mathfrak{L}\mathfrak{M}+2B\mathfrak{M}\mathfrak{K}}}$$

setzen, so ist nach §. 19.:

$$97) \quad \cos\alpha=\mathfrak{G}\mathfrak{K},\quad \cos\beta=\mathfrak{G}\mathfrak{L},\quad \cos\gamma=\mathfrak{G}\mathfrak{M}$$

und

$$98) \quad \left\{\begin{array}{l} X=\mathfrak{G}(\mathfrak{A}\mathfrak{K}+C\mathfrak{L}+B\mathfrak{M}),\\ Y=\mathfrak{G}(C\mathfrak{K}+\mathfrak{B}\mathfrak{L}+A\mathfrak{M}),\\ Z=\mathfrak{G}(B\mathfrak{K}+A\mathfrak{L}+\mathfrak{C}\mathfrak{M}).\end{array}\right.$$

Setzen wir nun aber der Kürze wegen:

$$99) \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{A}\mathfrak{K}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{M}^2 + 2C\mathfrak{K}\mathfrak{L} + 2A\mathfrak{L}\mathfrak{M} + 2B\mathfrak{M}\mathfrak{K},$$

so ist nach 93) offenbar:

100)

$$x-a = \left\{2\frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M})}{\mathfrak{S}} - 1\right\}x''$$
$$+ 2\frac{\mathfrak{L}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M})}{\mathfrak{S}}y''$$
$$+ 2\frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M})}{\mathfrak{S}}z'',$$

$$y-b = 2\frac{\mathfrak{K}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M})}{\mathfrak{S}}x''$$
$$+ \left\{2\frac{\mathfrak{L}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + AM)}{\mathfrak{S}} - 1\right\}y''$$
$$+ 2\frac{\mathfrak{M}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M})}{\mathfrak{S}}z'',$$

$$z-c = 2\frac{\mathfrak{K}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{S}}x''$$
$$+ 2\frac{\mathfrak{L}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{S}}y''$$
$$+ \left\{2\frac{\mathfrak{M}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{S}} - 1\right\}z''.$$

Auf diese Weise sind

$$x-a, \quad y-b, \quad z-c$$

bloss durch die Coefficienten der Zwillings-Ebenen ausgedrückt.

§. 31.

Sei jetzt

$$101) \ldots K_0(x-a_0) + L_0(y-b_0) + M_0(z-c_0) = 0$$

die Gleichung einer beliebigen durch den Punkt $(a_0 b_0 c_0)$ gehenden Ebene im Systeme der xyz, welche wir nun auf das System der $x''y''z''$ übertragen wollen.

Zu dem Ende seien a_0'', b_0'', c_0'' die Coordinaten des Punktes $(a_0 b_0 c_0)$ im Systeme der $x''y''z''$; dann haben wir nach 100) die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a_0 - a = \ & \Big\{ 2\frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} - 1 \Big\} a_0'' \\
& + 2\frac{\mathfrak{L}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} b_0'' \\
& + 2\frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} c_0'',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_0 - b = \ & 2\frac{\mathfrak{K}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} a_0'' \\
& + \Big\{ 2\frac{\mathfrak{L}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} - 1 \Big\} b_0'' \\
& + 2\frac{\mathfrak{M}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} c_0'',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_0 - c = \ & 2\frac{\mathfrak{K}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} a_0'' \\
& + 2\frac{\mathfrak{L}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} b_0'' \\
& + \Big\{ 2\frac{\mathfrak{M}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} - 1 \Big\} c_0'';
\end{aligned}$$

also nach 100) durch Subtraction:

$$\begin{aligned}
x - a_0 = \ & \Big\{ 2\frac{\mathfrak{K}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} - 1 \Big\} (x'' - a_0'') \\
& + 2\frac{\mathfrak{L}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + BM)}{\mathfrak{G}} (y'' - b_0'') \\
& + 2\frac{\mathfrak{M}(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} (z'' - c_0''),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y - b_0 = \ & 2\frac{\mathfrak{K}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} (x'' - a_0'') \\
& + \Big\{ 2\frac{\mathfrak{L}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} - 1 \Big\} (y'' - b_0'') \\
& + 2\frac{\mathfrak{M}(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} (z'' - c_0''),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z - c_0 = \ & 2\frac{\mathfrak{K}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} (x'' - a_0'') \\
& + 2\frac{\mathfrak{L}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} (y'' - b_0'') \\
& + \Big\{ 2\frac{\mathfrak{M}(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M})}{\mathfrak{G}} - 1 \Big\} (z'' - c_0'').
\end{aligned}$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$102) \ldots\ldots \quad \mathfrak{N} = K_0(\mathfrak{A}\mathfrak{K} + C\mathfrak{L} + B\mathfrak{M}) + L_0(C\mathfrak{K} + \mathfrak{B}\mathfrak{L} + A\mathfrak{M}) + M_0(B\mathfrak{K} + A\mathfrak{L} + \mathfrak{C}\mathfrak{M}),$$

so ist die Gleichung unserer Ebene im Systeme der $x''y''z''$, wie leicht erhellet:

$$103) \ldots\ldots \quad \left.\begin{aligned}&(2\mathfrak{K}\mathfrak{N} - K_0\mathfrak{G})(x'' - a_0'')\\ +&(2\mathfrak{L}\mathfrak{N} - L_0\mathfrak{G})(y'' - b_0'')\\ +&(2\mathfrak{M}\mathfrak{N} - M_0\mathfrak{G})(z'' - c_0'')\end{aligned}\right\} = 0.$$

Wenn die durch die Gleichungen 95) und 101) charakterisirten Ebenen Ebenen des Krystalls oder wenigstens solchen Ebenen parallel sind, so ist:

$$\mathfrak{K} = \varkappa K, \quad \mathfrak{L} = \lambda L, \quad \mathfrak{M} = \mu M;$$

$$K_0 = \varkappa_0 K, \quad L_0 = \lambda_0 L, \quad M_0 = \mu_0 M;$$

also:

$$104) \ldots\ldots \quad \mathfrak{N} = \varkappa_0(\varkappa\mathfrak{A}K + \lambda CL + \mu BM)K + \lambda_0(\varkappa CK + \lambda\mathfrak{B}L + \mu AM)L + \mu_0(\varkappa BK + \lambda AL + \mu\mathfrak{C}M)M$$

und

$$105) \ldots \quad \mathfrak{G} = \varkappa^2\mathfrak{A}K^2 + \lambda^2\mathfrak{B}L^2 + \mu^2\mathfrak{C}M^2 + 2\varkappa\lambda CKL + 2\lambda\mu ALM + 2\mu\varkappa BMK;$$

die Gleichung 103) nimmt aber die folgende Form an:

$$106) \ldots \quad \left.\begin{aligned}&(2\varkappa\mathfrak{N} - \varkappa_0\mathfrak{G})\,K(x'' - a_0'')\\ +&(2\lambda\mathfrak{N} - \lambda_0\mathfrak{G})\,L(y'' - b_0'')\\ +&(2\mu\mathfrak{N} - \mu_0\mathfrak{G})\,M(z'' - c_0'')\end{aligned}\right\} = 0.$$

Wenn das System der (xyz) rechtwinklig ist, so ist nach dem Obigen, weil in diesem Falle

$$\mathfrak{A} = 1, \quad \mathfrak{B} = 1, \quad \mathfrak{C} = 1; \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

ist:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{K}K_0 + \mathfrak{L}L_0 + \mathfrak{M}M_0, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{K}^2 + \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2;$$

also, wie man leicht findet:

$$2\mathfrak{K}\mathfrak{N} - K_0\mathfrak{S} = (\mathfrak{K}^2 - \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2)\,K_0 + 2\mathfrak{K}\mathfrak{L}\,L_0 + 2\mathfrak{K}\mathfrak{M}\,M_0,$$

$$2\mathfrak{L}\mathfrak{N} - L_0\mathfrak{S} = 2\mathfrak{K}\mathfrak{L}\,K_0 + (\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{K}^2)\,L_0 + 2\mathfrak{L}\mathfrak{M}\,M_0,$$

$$2\mathfrak{M}\mathfrak{N} - M_0\mathfrak{S} = 2\mathfrak{K}\mathfrak{M}\,K_0 + 2\mathfrak{L}\mathfrak{M}\,L_0 + (\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{K}^2 - \mathfrak{L}^2)\,M_0;$$

folglich die Gleichung unserer Ebene im Systeme der $x''y''z''$:

107)

$$\left.\begin{array}{l} \{(\mathfrak{K}^2 - \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2)\,K_0 + 2\mathfrak{K}\mathfrak{L}\,L_0 + 2\mathfrak{K}\mathfrak{M}\,M_0\}(x'' - a_0'') \\ + \{2\mathfrak{K}\mathfrak{L}\,K_0 + (\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{K}^2)\,L_0 + 2\mathfrak{L}\mathfrak{M}\,M_0\}(y'' - b_0'') \\ + \{2\mathfrak{K}\mathfrak{M}\,K_0 + 2\mathfrak{L}\mathfrak{M}\,L_0 + (\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{K}^2 - \mathfrak{L}^2)\,M_0\}(z'' - c_0'') \end{array}\right\} = 0.$$

Nach 104) und 105) ist in diesem Falle:

$$\mathfrak{N} = \varkappa\varkappa_0 K^2 + \lambda\lambda_0 L^2 + \mu\mu_0 M^2, \quad \mathfrak{S} = \varkappa^2 K^2 + \lambda^2 L^2 + \mu^2 M^2;$$

also:

$$2\varkappa\mathfrak{N} - \varkappa_0\mathfrak{S} = \varkappa^2\varkappa_0 K^2 + \lambda(2\varkappa\lambda_0 - \lambda\varkappa_0)\,L^2 + \mu(2\varkappa\mu_0 - \mu\varkappa_0)M^2,$$

$$2\lambda\mathfrak{N} - \lambda_0\mathfrak{S} = \varkappa(2\lambda\varkappa_0 - \varkappa\lambda_0)\,K^2 + \lambda^2\lambda_0 L^2 + \mu(2\lambda\mu_0 - \mu\lambda_0)M^2,$$

$$2\mu\mathfrak{N} - \mu_0\mathfrak{S} = \varkappa(2\mu\varkappa_0 - \varkappa\mu_0)\,K^2 + \lambda(2\mu\lambda_0 - \lambda\mu_0)\,L^2 + \mu^2\mu_0 M^2;$$

und folglich nach 106) die Gleichung der Ebene:

108)

$$\left.\begin{array}{l} \{\varkappa^2\varkappa_0 K^2 + \lambda(2\varkappa\lambda_0 - \lambda\varkappa_0)L^2 + \mu(2\varkappa\mu_0 - \mu\varkappa_0)\,M^2\}\,K(x'' - a_0'') \\ + \{\varkappa(2\lambda\varkappa_0 - \varkappa\lambda_0)\,K^2 + \lambda^2\lambda_0 L^2 + \mu(2\lambda\mu_0 - \mu\lambda_0)\,M^2\}\,L(y'' - b_0'') \\ + \{\varkappa(2\mu\varkappa_0 - \varkappa\mu_0)\,K^2 + \lambda(2\mu\lambda_0 - \lambda\mu_0)\,L^2 + \mu^2\mu_0 M^2\}\,M(z'' - c_0'') \end{array}\right\} = 0.$$

§. 32.

Bezeichnen wir die mit den gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen der Durchschnittspunkte der durch die Gleichung

$$109) \quad \ldots \quad K_0(x - a_0) + L_0(y - b_0) + M_0(z - c_0) = 0$$

charakterisirten Ebene mit den Axen der x', y', z' von dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte der Systeme der xyz und $x'y'z'$ respective durch u_0', v_0', w_0'; so haben wir, wenn der Kürze wegen

$$110) \quad \ldots\ldots \quad D_0 = K_0 a_0 + L_0 b_0 + M_0 c_0$$

gesetzt wird, nach 69) und 78), 79), 80) die folgenden Formeln:

$$u_0' = \frac{D_0 N}{K_0 X_x + L_0 Y_x + M_0 Z_x},$$

$$v_0' = \frac{D_0 N}{K_0 X_y + L_0 Y_y + M_0 Z_y},$$

$$w_0' = \frac{D_0 N}{K_0 X_z + L_0 Y_z + M_0 Z_z};$$

also nach 85), 87), 89):

$$u_0' = \frac{D_0 N}{2(K_0 X + L_0 Y + M_0 Z)\cos\alpha - K_0 N},$$

$$v_0' = \frac{D_0 N}{2(K_0 X + L_0 Y + M_0 Z)\cos\beta - L_0 N},$$

$$w_0' = \frac{D_0 N}{2(K_0 X + L_0 Y + M_0 Z)\cos\gamma - M_0 N};$$

woraus

$$2(K_0 X + L_0 Y + M_0 Z)\cos\alpha = (K_0 + \frac{D_0}{u_0'})N,$$

$$2(K_0 X + L_0 Y + M_0 Z)\cos\beta = (L_0 + \frac{D_0}{v_0'})N,$$

$$2(K_0 X + L_0 Y + M_0 Z)\cos\gamma = (M_0 + \frac{D_0}{w_0'})N;$$

also:

$$111)\quad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = K_0 + \frac{D_0}{u_0'} : L_0 + \frac{D_0}{v_0'} : M_0 + \frac{D_0}{w_0'}$$

$$= \frac{K_0}{D_0} + \frac{1}{u_0'} : \frac{L_0}{D_0} + \frac{1}{v_0'} : \frac{M_0}{D_0} + \frac{1}{w_0'}$$

folgt.

Bezeichnen wir die Entfernungen der Durchschnittspunkte der durch die Gleichung 109) charakterisirten Ebene mit den Axen der x, y, z von dem Anfange der xyz und $x'y'z'$ respective durch u_0, v_0, w_0; so ist:

$$K_0(u_0 - a_0) - L_0 b_0 - M_0 c_0 = 0,$$

$$-K_0 a_0 + L_0(v_0 - b_0) - M_0 c_0 = 0,$$

$$-K_0 a_0 - L_0 b_0 + M_0(w_0 - c_0) = 0;$$

also:

$$u_0 = \frac{K_0a_0 + L_0b_0 + M_0c_0}{K_0} = \frac{D_0}{K_0},$$

$$v_0 = \frac{K_0a_0 + L_0b_0 + M_0c_0}{L_0} = \frac{D_0}{L_0},$$

$$w_0 = \frac{K_0a_0 + L_0b_0 + M_0c_0}{M_0} = \frac{D_0}{M_0};$$

folglich nach 111):

$$112) \quad \cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0'} : \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_0'} : \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_0'}.$$

Bezeichnen wir die mit den gehörigen Zeichen genommenen Entfernungen der Durchschnittspunkte der durch die Gleichung 109) charakterisirten Ebene mit den Axen der x'', y'', z'' von dem Punkte (abc) respective durch u_0'', v_0'', w_0''; so erhalten wir, wenn nur jetzt

$$113) \ldots D_0 = K_0(a_0 - a) + L_0(b_0 - b) + M_0(c_0 - c)$$

gesetzt wird, ganz eben so wie vorher:

$$2(K_0X + L_0Y + M_0Z)\cos\alpha = (K_0 + \frac{D_0}{u_0''})N,$$

$$2(K_0X + L_0Y + M_0Z)\cos\beta = (L_0 + \frac{D_0}{v_0''})N,$$

$$2(K_0X + L_0Y + M_0Z)\cos\gamma = (M_0 + \frac{D_0}{w_0''})N;$$

also:

$$114) \quad \cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma = K_0 + \frac{D_0}{u_0''} : L_0 + \frac{D_0}{v_0''} : M_0 + \frac{D_0}{w_0''}.$$

Wir sind folglich berechtigt,

$$\cos\alpha = G_0(K_0 + \frac{D_0}{u_0''}), \quad \cos\beta = G_0(L_0 + \frac{D_0}{v_0''}), \quad \cos\gamma = G_0(M_0 + \frac{D_0}{w_0''});$$

also nach 77):

115)

$$X = G_0\{\mathfrak{A}(K_0 + \frac{D_0}{u_0''}) + C(L_0 + \frac{D_0}{v_0''}) + B(M_0 + \frac{D_0}{w_0''})\},$$

$$Y = G_0\{C(K_0 + \frac{D_0}{u_0''}) + \mathfrak{B}(L_0 + \frac{D_0}{v_0''}) + A(M_0 + \frac{D_0}{w_0''})\},$$

$$Z = G_0\{B(K_0 + \frac{D_0}{u_0''}) + A(L_0 + \frac{D_0}{v_0''}) + \mathfrak{C}(M_0 + \frac{D_0}{w_0''})\}$$

zu setzen, so dass

$$116)\qquad \frac{x}{\mathfrak{A}(K_0+\frac{D_0}{u_0''})+C(L_0+\frac{D_0}{v_0''})+B(M_0+\frac{D_0}{w_0''})}$$

$$=\frac{y}{C(K_0+\frac{D_0}{u_0''})+\mathfrak{B}(L_0+\frac{D_0}{v_0''})+A(M_0+\frac{D_0}{w_0''})}$$

$$=\frac{z}{B(K_0+\frac{D_0}{u_0})+A(L_0+\frac{D_0}{v_0''})+\mathfrak{C}(M_0+\frac{D_0}{w_0''})}$$

die Gleichungen der Zwillings-Axe sind.

Zur Bestimmung von G_0 hat man nach I. 34) die folgende Formel:

117)

$$N=G_0^2\left\{\begin{array}{c}\mathfrak{A}(K_0+\frac{D_0}{u_0''})^2+\mathfrak{B}(L_0+\frac{D_0}{v_0''})^2+\mathfrak{C}(M_0+\frac{D_0}{w_0''})^2\\ +2C(K_0+\frac{D_0}{u_0''})(L_0+\frac{D_0}{v_0''})\\ +2A(L_0+\frac{D_0}{v_0''})(M_0+\frac{D_0}{w_0''})\\ +2B(M_0+\frac{D_0}{w_0''})(K_0+\frac{D_0}{u_0''})\end{array}\right\}.$$

Weil nach dem Obigen:

$$\frac{1}{u_0''}=\frac{2(K_0X+L_0Y+M_0Z)\cos\alpha-K_0N}{D_0N},$$

$$\frac{1}{v_0''}=\frac{2(K_0X+L_0Y+M_0Z)\cos\beta-L_0N}{D_0N},$$

$$\frac{1}{w_0''}=\frac{2(K_0X+L_0Y+M_0Z)\cos\gamma-M_0N}{D_0N}$$

ist; so ist

$$\frac{X}{u_0''}+\frac{Y}{v_0''}+\frac{Z}{w_0''}$$

$$=\frac{(K_0X+L_0Y+M_0Z)\{2(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)-N\}}{D_0N},$$

woraus sich nach I. 33) die bemerkenswerthe Relation:

$$118) \quad \ldots \quad \frac{X}{u_0''} + \frac{Y}{v_0''} + \frac{Z}{w_0''} = \frac{K_0 X + L_0 Y + M_0 Z}{D_0}$$

ergiebt.

§. 33.

Wir kommen nun mit wenigen Worten zurück auf den in §. 24. aufgestellten Begriff eines Krystalls. Ob dieser Begriff mit dem übereinkommt und im Einklange steht, was man gewöhnlich in der Naturlehre einen Krystall nennt, kann nur durch an den Krystallen angestellte sorgfältige Messungen entschieden werden, welche jederzeit den Zweck haben müssen, die Coefficienten der Krystall-Flächen oder wenigstens deren Verhältnisse zu einander zu bestimmen. Messen kann man aber bekanntlich an den Krystallen mit erforderlicher Genauigkeit nur die Neigungswinkel der sie begränzenden Ebenen gegen einander. Also wird sich die hier zur Sprache kommende Aufgabe dahin näher bestimmen lassen, dass man aus solchen an den Krystallen vorgenommenen Winkelmessungen die Coefficienten der sie begränzenden Ebenen oder wenigstens deren Verhältnisse zu einander abzuleiten suchen muss, eine Aufgabe, die natürlich nur eine Auflösung in besonderen Fällen und unter besonderen Bedingungen gestattet, also eigentlich nicht in den Kreis der von uns hier beabsichtigten Betrachtungen gehört. Jedoch wollen wir in den beiden folgenden Paragraphen ein Paar solche Fälle einer etwas genaueren Untersuchung unterwerfen.

§. 34.

Zuerst wollen wir annehmen, dass es möglich gewesen sei, die von einer durch die Gleichung

$$119) \quad \ldots \quad K_0(x-a_0) + L_0(y-b_0) + M_0(z-c_0) = 0$$

charakterisirten Ebene mit den Ebenen der xy, yz, zx eingeschlossenen Winkel, welche wir durch $V_{0,xy}$, $V_{0,yz}$, $V_{0,zx}$ bezeichnen wollen, zu messen.

Schliessen wir nun alle unsere jetzigen Betrachtungen unmittelbar an §. 20. an, setzen demzufolge wie dort:

$$G_0 = \pm\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{A}K_0^2 + \mathfrak{B}L_0^2 + \mathfrak{C}M_0^2 + 2CK_0L_0 + 2AL_0M_0 + 2BM_0K_0}},$$

und nehmen nach und nach an, dass die zweite in §. 20. betrachtete Ebene, welche dort durch die Gleichung

$$K_1(x-a_1)+L_1(y-b_1)+M_1(z-c_1)=0$$

charakterisirt wurde, die Ebene der yz, zx, xy; dass also nach und nach

$$K_1=1,\ L_1=0,\ M_1=0;\ K_1=0,\ L_1=1,\ M_1=0;$$
$$K_1=0,\ L_1=0,\ M_1=1$$

sei; so ist nach §. 20., wenn ohne irgend welche Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$G_{yz}=\pm\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{A}}},\quad G_{zx}=\pm\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{B}}},\quad G_{xy}=\pm\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{C}}}$$

gesetzt wird:

$$\cos V_{0,yz}=\frac{G_0 G_{yz}(\mathfrak{A}K_0+CL_0+BM_0)}{N},$$

$$\cos V_{0,zx}=\frac{G_0 G_{zx}(CK_0+\mathfrak{B}L_0+AM_0)}{N},$$

$$\cos V_{0,xy}=\frac{G_0 G_{xy}(BK_0+AL_0+\mathfrak{C}M_0)}{N};$$

oder kürzer, wie aus §. 20. unmittelbar hervorgeht:

$$\cos V_{0,yz}=\frac{G_{yz}X_0}{N},\quad \cos V_{0,zx}=\frac{G_{zx}Y_0}{N},\quad \cos V_{0,xy}=\frac{G_{xy}Z_0}{N};$$

also:

$$X_0=N\frac{\cos V_{0,yz}}{G_{yz}},\quad Y_0=N\frac{\cos V_{0,zx}}{G_{zx}},\quad Z_0=N\frac{\cos V_{0,xy}}{G_{xy}}.$$

Nun ist aber nach I. 32), wenn α_0, β_0, γ_0 dieselbe Bedeutung haben wie in §. 20.:

$$\cos\alpha_0=\frac{X_0+Y_0\cos(xy)+Z_0\cos(zx)}{N},$$

$$\cos\beta_0=\frac{X_0\cos(xy)+Y_0+Z_0\cos(yz)}{N},$$

$$\cos\gamma_0=\frac{X_0\cos(zx)+Y_0\cos(yz)+Z_0}{N};$$

und nach §. 20.:

$$K_0:L_0:M_0=\cos\alpha_0:\cos\beta_0:\cos\gamma_0,$$

also nach dem Vorstehenden:

$$K_0:L_0:M_0=\begin{cases} X_0+Y_0\cos(xy)+Z_0\cos(zx) \\ :X_0\cos(xy)+Y_0+Z_0\cos(yz) \\ :X_0\cos(zx)+Y_0\cos(yz)+Z_0, \end{cases}$$

folglich nach dem Obigen:

$$K_0:L_0:M_0=\begin{cases} \frac{\cos V_{0,yz}}{G_{yz}}+\frac{\cos V_{0,zx}}{G_{zx}}\cos(xy)+\frac{\cos V_{0,xy}}{G_{xy}}\cos(zx) \\ :\frac{\cos V_{0,yz}}{G_{yz}}\cos(xy)+\frac{\cos V_{0,zx}}{G_{zx}}+\frac{\cos V_{0,xy}}{G_{xy}}\cos(yz) \\ :\frac{\cos V_{0,yz}}{G_{yz}}\cos(zx)+\frac{\cos V_{0,zx}}{G_{zx}}\cos(yz)+\frac{\cos V_{0,xy}}{G_{xy}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen des von dem Anfange der Coordinaten auf die gegebene, durch die Gleichung

$$K_0(x-a_0)+L_0(y-b_0)+M_0(z-c_0)=0$$

charakterisirte Ebene gefällten Perpendikels sind bekanntlich

$$\frac{x}{X_0}=\frac{y}{Y_0}=\frac{z}{Z_0},$$

so dass also, wenn $(x_0y_0z_0)$ ein beliebiger Punkt in diesem Perpendikel ist, jederzeit

$$x_0:y_0:z_0=X_0:Y_0:Z_0,$$

also nach dem Obigen

$$x_0:y_0:z_0=\frac{\cos V_{0,yz}}{G_{yz}}:\frac{\cos V_{0,zx}}{G_{zx}}:\frac{\cos V_{0,xy}}{G_{xy}}$$

ist; und da man nun gewiss immer leicht wird beurtheilen können, was für Zeichen die Coordinaten des Punktes $(x_0y_0z_0)$ in dem in Rede stehenden Perpendikel haben, so wird man mittelst vorstehender Proportionen immer auch die Combination der Zeichen beurtheilen können, mit denen man die Grössen

$$G_{yz},\quad G_{zx},\quad G_{xy}$$

zu nehmen hat. Bezeichnen wir aber diese Zeichen-Combination durch

$$(-1)^a,\quad (-1)^b,\quad (-1)^c;$$

so können wir, da es hier bloss auf Verhältnisse ankommt, nach dem Obigen für

$$G_{yz},\quad G_{zx},\quad G_{xy}$$

offenbar respective

$$\frac{1}{(-1)^a . \sin(yz)}, \quad \frac{1}{(-1)^b . \sin(zx)}, \quad \frac{1}{(-1)^c . \sin(xy)}$$

setzen, und erhalten dann nach dem Obigen für die Verhältnisse

$$K_0 : L_0 : M_0$$

den folgenden Ausdruck:

$$120) \quad \ldots\ldots \quad K_0 : L_0 : M_0 =$$

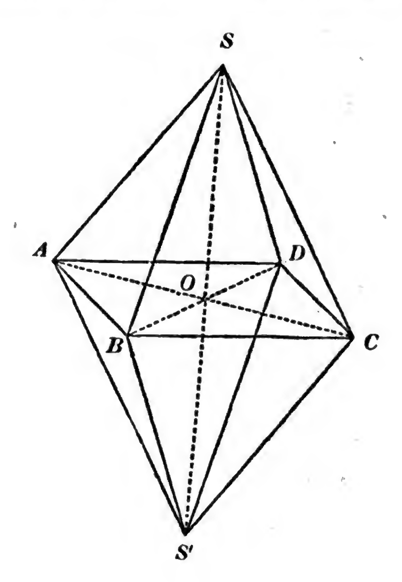
$$(-1)^a . \cos V_{0,yz} \sin(yz) + (-1)^b . \cos V_{0,zx} \sin(zx) \cos(xy) + (-1)^c . \cos V_{0,xy} \sin(xy) \cos(zx)$$

$$:(-1)^a . \cos V_{0,yz} \sin(yz) \cos(xy) + (-1)^b . \cos V_{0,zx} \sin(zx) + (-1)^c . \cos V_{0,xy} \sin(xy) \cos(yz)$$

$$:(-1)^a . \cos V_{0,yz} \sin(yz) \cos(zx) + (-1)^b . \cos V_{0,zx} \sin(zx) \cos(yz) + (-1)^c . \cos V_{0,xy} \sin(xy).$$

§. 35.

Wir wollen jetzt noch kurz das in nachstehender Figur dargestellte Octaeder betrachten, welches von acht Ebenen begränzt wird, von denen je zwei gegenüberstehende einander parallel sind:



Die Flächenwinkel, welche sich allein messen lassen und im folgenden als gemessene Stücke betrachtet werden, bezeichnen wir durch die Kanten, an denen sie liegen, indem wir über die Bezeichnung der betreffenden Kante das Zeichen $\wedge$ setzen.

Fassen wir nun etwa die Ecke A und die drei in derselben zusammenstossenden Ebenen SAB, SAD, $S'AB$ in's Auge, so überzeugt man sich leicht von Folgendem. Der Winkel zwischen SAB und SAD ist:

$$\widehat{SA} = \widehat{S'C}.$$

Der Winkel zwischen $S'AB$ und SAB ist:

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}.$$

Der Winkel zwischen SAD und $S'AB$ ist:

$$180^\circ - \widehat{SD} = 180^\circ - \widehat{S'B}.$$

In der von den drei oben genannten Ebenen an A gebildeten dreiseitigen körperlichen Ecke liegt dem Winkel SAB als Seite der Winkel zwischen den Ebenen SAD und $S'AB$ gegenüber; also ist nach der sphärischen Trigonometrie und dem Obigen:

$$\cos SAB = \frac{\cos(180^\circ - \widehat{SD}) + \cos\widehat{AB}.\cos\widehat{SA}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SA}}$$

oder

$$\cos SAB = \frac{\cos\widehat{AB}.\cos\widehat{SA} - \cos\widehat{SD}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SA}},$$

woraus sogleich

$$\sin SAB = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{AB}}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SA}}$$

folgt, in welcher Formel man die Grösse unter dem Wurzelzeichen, um dieselbe zur logarithmischen Rechnung bequem einzurichten, bekanntlich in vier Factoren zerlegen kann, was wir, als allgemein bekannt, hier füglich dem Leser überlassen dürfen. Ganz auf ähnliche Weise ist

$$\sin ASB = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{AD}}}{\sin\widehat{SA}.\sin\widehat{SB}}.$$

Ueberhaupt hat man nun aber auf diese Weise die folgenden Formeln:

$$\sin SAB = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{AB}}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SA}},$$

$$\sin SBA = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{SC}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{SC}.\cos\widehat{AB}}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SB}};$$

$$\sin SBC = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{AD}}}{\sin\widehat{AD}.\sin\widehat{SB}},$$

$$\sin SCB = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SC}^2-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SC}.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{AD}}}{\sin\widehat{AD}.\sin\widehat{SC}};$$

$$\sin SCD = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{SC}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{SC}.\cos\widehat{AB}}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SC}},$$

$$\sin SDC = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{AB}}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SD}};$$

$$\sin SDA = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SC}^2-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SC}.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{AD}}}{\sin\widehat{AD}.\sin\widehat{SD}},$$

$$\sin SAD = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{AD}}}{\sin\widehat{AD}.\sin\widehat{SA}}$$

und:

$$\sin ASB = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{AD}}}{\sin\widehat{SA}.\sin\widehat{SB}},$$

$$\sin BSC = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{SC}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{SC}.\cos\widehat{AB}}}{\sin\widehat{SB}.\sin\widehat{SC}},$$

$$\cos CSD = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SC}^2-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SC}.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{AD}}}{\sin\widehat{SC}.\sin\widehat{SD}},$$

$$\cos DSA = \frac{\sqrt{1-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{AB}}}{\sin\widehat{SD}.\sin\widehat{SA}}.$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen:

$$W_{ab} = \sqrt{1-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{AD}},$$

$$W_{bc} = \sqrt{1-\cos\widehat{SB}^2-\cos\widehat{SC}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SB}.\cos\widehat{SC}.\cos\widehat{AB}},$$

$$W_{cd} = \sqrt{1-\cos\widehat{SC}^2-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{AD}^2+2.\cos\widehat{SC}.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{AD}},$$

$$W_{da} = \sqrt{1-\cos\widehat{SD}^2-\cos\widehat{SA}^2-\cos\widehat{AB}^2+2.\cos\widehat{SD}.\cos\widehat{SA}.\cos\widehat{AB}};$$

so ist:

$$\sin SAB = \frac{W_{da}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SA}}, \quad \sin SBA = \frac{W_{bc}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SB}};$$

$$\sin SBC = \frac{W_{ab}}{\sin\widehat{AD}.\sin\widehat{SB}}, \quad \sin SCB = \frac{W_{cd}}{\sin\widehat{AD}.\sin\widehat{SC}};$$

$$\sin SCD = \frac{W_{bc}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SC}}, \quad \sin SDC = \frac{W_{da}}{\sin\widehat{AB}.\sin\widehat{SD}};$$

$$\sin SDA = \frac{W_{cd}}{\sin\widehat{AD}.\sin\widehat{SD}}, \quad \sin SAD = \frac{W_{ab}}{\sin\widehat{AD}.\sin\widehat{SA}}$$

und:

$$\sin ASB = \frac{W_{ab}}{\sin\widehat{SA}.\sin\widehat{SB}}, \quad \sin BSC = \frac{W_{bc}}{\sin\widehat{SB}.\sin\widehat{SC}},$$

$$\sin CSD = \frac{W_{cd}}{\sin\widehat{SC}.\sin\widehat{SD}}, \quad \sin DSA = \frac{W_{da}}{\sin\widehat{SD}.\sin\widehat{SA}}.$$

Hiernach und nach der ebenen Trigonometrie ist nun:

$$SB = \frac{W_{da}}{W_{bc}} \cdot \frac{\sin \widehat{SB}}{\sin \widehat{SA}} . SA,$$

$$SC = \frac{W_{ab}}{W_{cd}} \cdot \frac{\sin \widehat{SC}}{\sin \widehat{SB}} . SB = \frac{W_{ab} . W_{da}}{W_{bc} . W_{cd}} \cdot \frac{\sin \widehat{SC}}{\sin \widehat{SA}} . SA,$$

$$SD = \frac{W_{ab}}{W_{cd}} \cdot \frac{\sin \widehat{SD}}{\sin \widehat{SA}} . SA;$$

und

$$AB = \frac{W_{ab}}{W_{bc}} \cdot \frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{SA}} . SA, \quad AD = \frac{W_{da}}{W_{cd}} \cdot \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{SA}} . SA;$$

folglich offenbar:

$$SA : SB : SC : SD : AB : AD$$

$$= W_{bc} . W_{cd} . \sin \widehat{SA} : W_{cd} . W_{da} . \sin \widehat{SB} : W_{da} . W_{ab} . \sin \widehat{SC}$$

$$: W_{ab} . W_{bc} . \sin \widehat{SD} : W_{ab} . W_{cd} . \sin \widehat{AB} : W_{bc} . W_{da} . \sin \widehat{AD}.$$

Auf diese Weise kann man also die Verhältnisse der Linien SA, SB, SC, SD, AB, AD berechnen, und findet dann auch leicht die Verhältnisse der Halbaxen AO, BO, SO, weil nach einem bekannten Satze:

$$4.\overline{AO}^2 + 4.\overline{BO}^2 = 2.\overline{AB}^2 + 2.\overline{AD}^2,$$
$$4.\overline{AO}^2 + 4.\overline{SO}^2 = 2.\overline{SA}^2 + 2.\overline{SC}^2,$$
$$4.\overline{BO}^2 + 4.\overline{SO}^2 = 2.\overline{SB}^2 + 2.\overline{SD}^2$$

ist, woraus sich ferner leicht ergiebt:

$$4.\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{SA}^2 - \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 - \overline{SD}^2,$$
$$4.\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 - \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2,$$
$$4.\overline{SO}^2 = -\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2.$$

Die von den Axen eingeschlossenen Winkel kann man nun aber offenbar auch leicht berechnen.

Berichtigung. S. 188. Z. 13. und 14. v. u. statt „Gleichung" s. m. „Gleichungen."

XII.

Privatleistungen auf astronomischem Gebiete. Ein Vortrag gehalten bei der feierlichen Sitzung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien am 30. Mai 1859.

Von

Herrn *Karl v. Littrow,*

wirklichem Mitgliede der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.

Wenn eines unserer ausgezeichnetsten Mitglieder im Auslande einmal mit vollem Rechte hervorhob, dass die Astronomie mehr als irgend eine Wissenschaft der Unterstützung von Seite der Mächtigen der Erde bedarf, dass glänzende Epochen in der Geschichte der Sternkunde sich grossentheils auf den besonderen Schutz zurückführen lassen, den Fürsten ihr geschenkt, so kann man andererseits auch behaupten, dass solcher Schutz keinem andern Fache in gleichem Maasse wirklich zu Theil wurde und dass die Regenten, deren ausnehmender Gunst die Astronomie dankbar zu gedenken hat, den regsten Antheil nahmen an den von ihnen hervorgerufenen Fortschritten. Fragt man nach der Ursache dieser Erscheinung, so findet man, dass dieselbe eben nur die einzelne Aeusserung eines überhaupt weit über die Männer des Berufes hinaus verbreiteten Interesses ist, welches unsere Wissenschaft von jeher kennzeichnete und eines ihrer wirksamsten Förderungsmittel war. Gestatten Sie mir heute diese Ansicht zu begründen, und den wohlthätigen Einfluss nachzuweisen, den völlig freiwillige und unabhängige Pfleger der Astronomie, die in dem Fache eben nur eine Lieblingsbeschäftigung suchten, durch ihre eigenen und die Arbeiten ihrer Gehülfen auf die Entwickelung dieser Wissenschaft genommen haben.

Die socialen Verhältnisse der älteren Vorzeit sind so verschieden von den unseren, dass es oft grosser Schwierigkeit unterliegen würde zu entscheiden, ob ein Gelehrter Privatmann in der heutigen Bedeutung des Wortes war. Die Biographien berühmter Männer jener Epochen geben überdies selten auf ihre

Lebensumstände näher ein und enthalten gewöhnlich eben nur die Geschichte ihrer Leistungen. Endlich bilden diese Leistungen nur zu häufig Glieder aus der Kette menschlicher Forschung, die zum Ganzen erforderlich waren, aber längst ihren Werth an sich beinahe verloren haben. So wollen wir denn unsere Blicke zunächst der neueren Zeit zuwenden und auf frühere Jahrhunderte nur gelegentlich oder insoferne Rücksicht nehmen, als es der Zusammenhang unserer Betrachtungen erfordert.

Zu den Hauptstützen unserer heutigen Annahmen über die Dichte des Erdkörpers gehören die Experimente von Henry Cavendish, dem Sprössling eines der edelsten und begütertsten Geschlechter Englands, der sein ganzes Leben der Wissenschaft gewidmet, ohne je eine öffentliche Stellung anzunehmen, „der reichste unter allen Gelehrten, und wahrscheinlich auch der gelehrteste unter allen Reichen", wie Biot ihn bezeichnet. Die Apparate und Methoden aber, welche Cavendish in Anwendung brachte, waren ebenfalls von einem Volontär der Wissenschaft Rev. John Michell erdacht. Was Cavendish noch allenfalls zu wünschen übrig gelassen hatte, lieferte Francis Baily, seines Zeichens ein Geldmäkler, durch eine wahre Musterreihe von Versuchen, die mit bewunderungswürdiger Ausdauer und Umsicht Jahre lang fortgesetzt wurden bis sie die nöthige Genauigkeit erreichten. Einige Jahre früher hatte gleichfalls F. Baily auf äusserst mühsamem, aber allein untrüglichem, experimentellem Wege die richtige Methode, durch Pendelbeobachtungen die Schwere zu bestimmen, festgestellt, und durch Berechnung der Messungen, die der unglückliche Capt. Foster nach Baily's Vorschriften am Bord des Chanticleer im Jahre 1831 angestellt hatte, einen wichtigen Beitrag zu diesem Zweige der Astronomie geliefert. — Die ersten gelungenen Fallversuche rühren von einem wohlhabenden Dilettanten — ich nehme diesen Ausdruck im ursprünglichen, etymologischen Sinne — von J. F. Benzenberg, der zwar später durch wenige Jahre eine Professur versah, bald aber seine Freiheit dem Berufsleben wieder vorzog.

Die an sich nicht glückliche, aber immerhin sinnreiche und als Anregung zu wichtigen Arbeiten folgenschwere Idee, den Dimensionen des Erdkörpers das Grundmaass der Längen zu entnehmen, ging zu Ende des siebzehnten Jahrhunderts von Gabriel Mouton, Chormeister in Lyon, aus. Rev. Richard Sheepshanks, ein Liebhaber der Astronomie, stellte nach Bessel's berichtigenden Ansichten über diesen Gegenstand 89500 mikrometrische Messungen an, um die englische Längeneinheit

zu bestimmen. Das Standard-Yard, welches unsere Akademie vor Kurzem von der englischen Regierung zum Geschenke erhielt, ist eine Frucht dieser viele Jahre langen Arbeit.

An Beobachtungen von Verfinsterungen der Sonne, des Mondes und der Jupitersatelliten, von Sternbedeckungen, Berechnungen geographischer Längen und Breiten verdanken wir Laien so vieles, dass wir hier nur einiger hervorstechenden Leistungen Erwähnung thun können. Rev. Thomas Catton in Cambridge überwachte blos aus Liebe zur Sache den Himmel in Bezug auf die eben genannten Phänomene durch einen Zeitraum von vierzig Jahren so sorgfältig, dass der k. Astronom G. B. Airy die grosse Arbeit, diese Beobachtungen zu sammeln und der Rechnung zugänglich zu machen, unternahm, und die k. astronomische Gesellschaft in London die Kosten der Publication bestritt. In ähnlicher Weise wirkten Hofgerichtsrath von Heiligenstein in Mannheim, Colonel Beaufoy in Bushey Heath, Consistorialrath Hülsmann in Elberfeld, Amtmann Bayer zu Hradisch, Ferd. Freiherr von Ende zu Celle, Erblandmarschall Graf von Hahn in Remplin, Professor Hallaschka in Prag und unzählige andere Liebhaber der Astronomie. — William Galbraith, Privatlehrer der Mathematik zu Edinburg, gab im Jahre 1837 den Anstoss zur Wiederaufnahme der Vermessung von Schottland durch genaue geographische Bestimmungen, die er an seinen Feiertagen vornahm, und durch die er bewies, dass die bis dahin existirenden Karten Fehler von 1 bis $1^1/_2$ Meilen hatten — ein Verdienst, das durch die R. Society of Sciences ehrenvoll anerkannt wurde.

Die Topographie des Mondes beruht in ihren Grundlagen fast ausschliesslich auf Leistungen von Privaten. Die ersten genaueren Mondkarten mit einer für solche Anfänge bewunderungswürdigen Naturtreue lieferte Johann Hevel, der gelehrte Rathsherr von Danzig, auf seiner prächtigen Sternwarte im Jahre 1640. Die ersten bedeutenden Detailzeichnungen einzelner Mondgegenden erhielten wir um den Anfang des neunzehnten Jahrhunderts von Oberamtmann Schröter zu Lilienthal. Den Schlussstein dieses Zweiges unserer astronomischen Kenntnisse bilden bisher die grossen Arbeiten von Mädler und Beer an des letzteren Sternwarte in Berlin. Ihnen schlossen mit besonderen Beiträgen sich rühmlich an: der Mechaniker James Nasmyth in Patricroft bei Manchester durch sehr gelungene Studien einzelner Theile der Mondoberfläche; Hofräthin Witte u. a. durch plastische Darstellungen dieses Himmelskörpers; Warren de la Rue in Cranford durch stereoskopische Bilder des Mondes vermöge einer sinnrei-

chen Benützung der Librationen. — Die räthselhafte Erscheinung, dass Sterne, vor welche der Mond tritt, kurz bevor sie von ihm bedeckt werden, zuweilen mehrere Secunden lang auf ihm sich projiciren, ist am gründlichsten von einem Liebhaber der Astronomie, Sir James South, behandelt; alle Erfahrungen, die wir bisher darüber besitzen, darunter viele Beobachtungen von Dilettanten, sind durch ihn sorgfältig gesammelt und discutirt. — Ein genialer Liebhaber der Wissenschaft, Jeremias Horrox, wendete 1638 zuerst die Kepler'schen Gesetze auf die Mondbewegung an, und machte die ersten fortgesetzten Beobachtungen über Ebbe und Fluth.

Auf eine, wie das eben erwähnte Phänomen bei Sternbedeckungen bisher unerklärte, bei Vorübergängen des Mondes oder der unteren Planeten vor der Sonne stattfindende Erscheinung, die aus einem eigenthümlichen Zerbrechen des ersten und letzten Lichtfadens der Sonnenscheibe in einzelne Perlen besteht und desshalb unter der Bezeichnung der „beads“ bekannt ist, hat uns zuerst der schon genannte astronomische Freiwillige F. Baily aufmerksam gemacht und mit einer classischen Arbeit darüber beschenkt. — Zur Kenntniss der Sonnenflecken und Fackeln haben bei weitem das bedeutendste Material Dilettanten geliefert. Nicht nur verdanken wir dem astronomischen Volontär Joh. Fabricius die erste Entdeckung der Flecken (1611), sondern auch den Nachweis der Rotation des Sonnenkörpers an diesen merkwürdigen Erscheinungen. Die längste überhaupt bekannte Reihe solcher Aufzeichnungen aus den Jahren 1749 bis 1799 rührt von einem Liebhaber Joh. Staudache in Nürnberg. Von einem anderen Volontär der Astronomie, Rev. J. T. Hussey, wurden nicht weniger als 1100 Zeichnungen gesammelt, die eine vollständige Geschichte dieser Erscheinungen aus den Jahren 1826 bis 1837 darstellen. Hofrath Schwabe in Dessau hat durch mehr als zwanzig Jahre durchschnittlich an 300 Tagen des Jahres, die Sonnenscheibe untersucht, von 1826 bis 1857 an etwa 4700 Gruppen von Flecken und Fackeln beiläufig 9000 Beobachtungen gemacht, die an Genauigkeit und Umsicht alles in diesem Gegenstande bis dahin Geleistete übertreffen und uns zuerst die grosse Wahrscheinlichkeit einer Periodicität dieses Phänomens kennen lehrten. Von Domherr Stark in Augsburg besitzen wir ähnliche Beobachtungen von 1813 bis 1836; in der neuesten Zeit hat ein ausgezeichneter Volontär der Astronomie, R. Ch. Carrington, der mehrere Jahre an der Durhamer Sternwarte Dienste leistete, blos um mit dem Fache genau bekannt zu werden, auf seinem Observatorium Redhill eine fortlaufende Reihe von ähnlichen sehr

genauen Bestimmungen unternommen. Aber nicht nur solche getreue und reichhaltige Aufzeichnungen über den Zustand der Sonnenoberfläche, sondern auch tief blickende Untersuchungen der Natur jener Erscheinungen verdanken wir freiwilligen Pflegern des Faches, und hier habe ich einen Namen zu nennen, der, von doppelter Glorie umstrahlt, mit der Geschichte der Wissenschaft für alle Zukunft eng verflochten ist. Sie errathen, dass ich von den beiden Herschel spreche. Sir William, der Vater, zählt als Organist zu Bath in seinen astronomischen Anfängen entschieden zu den Liebhabern der Astronomie, aber auch die spätere, beinahe vierzigjährige staunenswürdige Thätigkeit, welche er, in die Nähe seines Königs nach Slough bei Windsor berufen, ganz der Sternkunde zuwenden konnte, gehört auf das Gebiet von Privatleistungen, wenngleich so Sir William aus der Reihe der Freiwilligen in die der Verpflichteten übertrat; denn Georg III. von England versah Herschel mit den nöthigen Mitteln nicht als Monarch, sondern aus persönlichem Interesse für die Astronomie, das wir durch des Königs wohl ausgerüstete eigene Sternwarte zu Richmond und von ihm angestellte Beobactungen bewiesen finden; Sir William war des Königs Privatastronom. Sein Sohn, Sir John, hat immer nur aus ganz freiem Antriebe der Wissenschaft gedient, und entschloss sich überhaupt erst am Abende seines Lebens für einige Zeit eine öffentliche Stellung mit dem Amte eines „Master of the mint" anzunehmen, womit auch Newton belohnt ward. Von den eben so zahlreichen als grossen Verdiensten dieser beiden trefflichen Männer um die Kenntniss des Himmels haben wir vorerst anzuführen, dass man ihnen eingehende Begründungen und Ausführungen unserer heutigen Ansichten über das Wesen der Sonnenflecken verdankt. — Der erste und bis zum Jahre 1842 einzige vollständige Bericht über die merkwürdigen Erscheinungen, welche sich bei totalen Sonnenfinsternissen unseren Blicken bieten, gründet sich auf die Bereitwilligkeit, mit welcher schwedische Landgeistliche der Aufforderung entsprachen, die von der R. Society of Sciences für die Finsterniss von 1733 erlassen war; in unseren Tagen aber haben bei solchen Gelegenheiten eine grosse Zahl von Privaten aus allen Ständen sorgfältige Beobachtungen, zum Theile auf entfernten, erst nach langen Reisen zu erreichenden Stationen geliefert. — Die erste Beobachtung eines Venusdurchganges im Jahre 1639 verdanken wir Horrox und seinem Freunde Crabtree, einem vermögenden Privatmanne bei Manchester. — Die grosse Entdeckung der Bewegung des ganzen Sonnensystems in der Richtung auf λ Herculis ist Sir William Herschel's Werk, und die entscheidendste Bestätigung derselben, nämlich durch die Eigenbewegungen der Sterne des

südlichen Himmels, verschaffte uns der Actuar einer Lebensversicherungs-Gesellschaft, Thomas Galloway in London.

Nachdem man Jahrhunderte lang nicht mehr Planeten gekannt, als deren eben jeder Schäfer am Himmel sich ergrübelt, zeigte Sir William Herschel uns an Uranus im Jahre 1781 den ersten teleskopischen Planeten, dessen Bahn zuerst Justizpräsident Jean B. de Saron, eine wahre Stütze der Pariser Astronomen, richtig erkannte. Wenn der nächste Fund dieser Art im Jahre 1801 einem Astronomen von Profession, Piazzi in Palermo, an der Ceres gelang, so war dieses ein blosser Zufall, und die Folge sollte lehren, dass die Liebhaber der Wissenschaft dieses Dominium sich vorzugsweise ausersehen haben. Olbers, der berühmte Arzt in Bremen und nebenher astronomischer Volontär, bei dem aber die Meister vom Berufe sich Raths erholten, der durch einen seltenen Reichthum an herrlichen Gedanken wie keiner seiner Zeitgenossen auf astronomischem Gebiete anregend wirkte, eröffnete im Jahre 1802 mit der Pallas die Bahn zu den zahlreichen planetarischen Entdeckungen unserer Tage; denn damit war die seither so glänzend bestätigte Vermuthung einer Multiplicität von Planeten an dieser Stelle des Weltalls gegeben. Der nächste Fund gelang an Schröter's Sternwarte in Lilienthal durch Harding, der vierte neuerdings durch Olbers. Beinahe vierzig Jahre verflossen ohne weitere Bereicherung unserer Kenntnisse in dieser Hinsicht, bis wieder ein Dilettant, der k. preussische Postbeamte K. L. Hencke in Driesen, nach fünfzehnjähriger Bemühung sich Detailkarten von einzelnen Theilen des Himmels zu verschaffen, wie sie damals niemand besass, durch Auffindung von zwei neuen Planeten den Anstoss gab zu den vielseitigen ähnlichen Bestrebungen der neuesten Zeit. Von dem halben Hundert seitdem bekannt gewordener Asteroiden verdanken wir eilf dem Observatorium des Herrn Bishop in London, die gleiche Zahl dem Maler Goldschmidt in Paris, je einen dem Observatorium des Herrn E. Cooper in Markree, das an reicher Ausstattung viele Staatsanstalten übertrifft, und der Privatsternwarte von Valz in Nismes. Im Ganzen also sind von den sechsundfünfzig bis heute gelungenen Entdeckungen dieser Art mehr als die Hälfte dem Liebhaberthume entsprossen, wobei der mittelbare Antheil der Dilettanten auch an den übrigen Funden durch ihre an anderer Stelle zu erwähnende Hilfe bei Anfertigung der Berliner Sternkarten wohl zu beachten kommt, so wie dass jene unerwarteten Erfolge nicht etwa blos emsigem Suchen zu verdanken, sondern dass dazu der an Bishop's Observatorium von Hind zuerst ausgeführte leitende Gedanke, die Nachforschungen auf die

Gegend der Ekliptik zu beschränken, wesentlich beitrug. — Zwei Satelliten des Saturn wurden von Sir William Herschel, ein anderer Saturnsatellit, zwei Trabanten des Uranus und der Neptunsmond von W. Lassell auf seinem Observatorium zu Starfield bei Liverpool entdeckt.

Was wir von der physischen Beschaffenheit der Planeten wissen, haben wir grossentheils von Schröter, Beer, Hussey, Justizrath Kunowsky in Berlin oder von ihren Gehülfen. Insbesondere ist das in seiner Art einzige Aeussere Saturn's durch solche freiwillige Astronomen durchforscht worden, wie denn der Dilettant W. Ball in Mainhead (1665) zuerst erkannte, dass der Ring aus zwei concentrischen Reifen bestehe, der Liebhaber Short gegen Ende des vorigen Jahrhunderts eine mehrfache Theilung des Ringes zuerst wahrnahm, die Captain Kater und Lassell später bestätigten; Schwabe die schon von Propst J. C. Gallet in Avignon (1684), später von W. Herschel und South erwähnte merkwürdige Excentricität des Ringes zuerst constatirte, der räthselhafte dunkle Ring durch den seit fünfundzwanzig Jahren ununterbrochen auf astronomischem Gebiete thätigen Rev. W. R. Dawes unabhängig von anderen Entdeckern zu unserer Kenntniss kam. Dawes bemerkte auch in Europa zuerst die Durchsichtigkeit dieses dunklen Ringes. — Olbers erklärte die beim Verschwinden des Ringes und an dessen Stelle sich zeigenden hellen Punkte, über deren Bedeutung man lange im Zweifel war, aus optischen Gründen. — Warren de la Rue ist bei seinen photographischen Untersuchungen auf eine merkwürdige chemische Verschiedenheit des Lichtes der einzelnen Planeten, so wie einzelner Gegenden der Mondscheibe gekommen.

Es sind jetzt eben hundert Jahre, dass Joh. Georg Palitzsch, ein Landmann in der Gegend von Dresden, der sich auch in anderen Naturwissenschaften hervorgethan, den Halley'schen Kometen zuerst auffand, obschon die Astronomen aller Länder nach diesem ersten in seiner Wiederkehr vorausgesagten Himmelskörper solcher Art seit länger als einem Jahre umsonst, weil wahrscheinlich zu sehr nach vorgefassten Meinungen über seinen Ort gespäht hatten. Von den anderthalbhundert nicht erwarteten Kometen, die seit jener Zeit zu unserer Kenntniss kamen, verdanken wir nicht weniger als etwa ein Viertel Liebhabern der Astronomie, ungerechnet etwa zwanzig Fälle, wo spätere, aber unabhängige Entdeckungen, demselben Boden entsprossen, wenn auch nicht die neuen Gestirne uns zuerst kennen lehrten, so doch diese Kenntniss sicherten und häufig den grossen Vortheil allgemeinerer früher Beobachtung verschafften. Unter jenen ursprüng-

lichen Funden aber haben viele hohen kometographischen Werth. Der Komet von 1772, entdeckt von Montagne in Limoges, dessen Hilfsmittel in einem 18 Zoll langen Fernrohre von Ramsden bestanden, erwies sich im Jahre 1826, wo ein anderer Dilettant, Hauptmann Biela, den berühmten nach ihm benannten Kometen auffand, als die älteste uns bekannte Erscheinung dieses letzten, und zeigte uns zu grossem Vortheil der Rechnung diesen Himmelskörper, der später durch seine Spaltung in zwei Gestirne uns in Erstaunen setzte, als einen fünfzigjährigen Bekannten. Ja wir könnten hier noch einen dritten Liebhaber der Wissenschaft nennen, der in Bezug auf diesen Kometen sich zu Biela ganz in gleicher Weise verhält wie in Bezug auf Neptun Le Verrier zu Galle, wenn es eben jenem Liebhaber, den wir hier noch an anderer Stelle anzuführen haben, gefallen wollte, aus seinem bescheidenen Dunkel zu treten. — Als Encke den ersten Kometen von 1819, der in gerechter Anerkennung seiner unvergänglichen Arbeiten über denselben seinen Namen führt, als periodisch erkannt hatte, wusste man den Dienst erst zu schätzen, den Miss Caroline Herschel, die unermüdliche Gehülfin ihres Bruders Sir William, durch Entdeckung des im Jahre 1795 sichtbaren Kometen der Wissenschaft geleistet hatte, der sich eben auch als eine frühere Erscheinung des Encke'schen Kometen erwies. — Der grosse Komet von 1807, dem eine für alle Folgezeit lehrreiche Musterarbeit Bessel's gewidmet ist, wurde von dem Augustiner Parisi zu Castro Giovanni in Sicilien zuerst aufgefunden. — Der berühmte Komet von 1811, der bisher für Europa und in unserem Jahrhunderte nur an dem glänzenden Gestirne des eben abgelaufenen Jahres einen ebenbürtigen Rivalen fand, wurde, und zwar teleskopisch, von Honoré Flaugergues, einem eifrigen Liebhaber der Astronomie in Viviers entdeckt, der über vierzig Jahre im Fache thätig war und uns noch in seinem 71. Lebensjahre (1826) mit einem zweiten, nur von ihm beobachteten Kometen beschenkte. — Den merkwürdigen Kometen von 1815, den wir 1887 wieder zu erwarten haben, verdanken wir Olbers. — Der VI. Komet von 1847 wurde von vier verschiedenen Beobachtern unabhängig entdeckt, darunter zweimal von astronomischen Freiwilligen (Rev. Dawes in Cranbrook, Mad. Rümker in Hamburg); den II. Kometen von 1850 fand man an fünf Orten ursprünglich auf, darunter zwei Privat-Sternwarten (Senftenberg, Markree); unter den vier Entdeckern des grossen vorjährigen Kometen kommt ebenfalls ein Dilettant (Parkhurst in Perth Amboy, New-Jersey) vor, was gewiss rühmliches Zeugniss gibt für eine Wachsamkeit, um nicht zu sagen Eifersucht, die man sonst nur bei Liebhabern anderer Gattung zu vermuthen geneigt ist.

Vielleicht vermissen Sie einen bei solcher Gelegenheit oft und gerade als Dilettant genannten Mann: den glücklichen Kometenjäger Pons, der trotz seiner, wie er selbst sagte, „paralytischen" statt „parallactischen" Instrumente über dreissig Kometen entdeckte: aber Pons war von allem Anfange seiner astronomischen Laufbahn an bei Staats-Sternwarten, wenn auch durch viele Jahre nur als Concierge beschäftigt. Wollte man den Umstand, dass er seine ganze Thätigkeit auf das Durchspüren des Himmels nach neuen Gegenständen beschränkte, geltend machen, um ihn den Dilettanten einzureihen, so müsste dasselbe z. B. mit seinem Rivalen, dem Director des Pariser Observatoriums, Messier, geschehen, den Ludwig XV das „Kometenfrettchen" nannte, und der sich nach der Schwierigkeit seiner Leistungen keinem irgend namhaften Liebhaber gegenüber überheben durfte, wenn er gleich mit Ehren überhäuft wurde, ja einige Jahrzehende hindurch als Sternbild am Himmel glänzte.

Aber nicht blos auf die Existenz vieler dieser Gestirne überhaupt wurden wir durch Dilettanten geführt, sondern auch in der Kenntniss ihrer Bahnen verdanken wir den astronomischen Volontären einen grossen Theil des Fortschrittes, dessen wir uns heute rühmen. G. P. Dörfel, Pastor in Plauen, führte im Widerspruche mit gewiegten Fachmännern der damaligen Zeit an dem grossen Kometen von 1680 zuerst die richtige Ansicht durch, dass die Erscheinungen dieser Himmelskörper durch ihre Vorübergänge an der Sonne häufig in zwei Abschnitte zerfallen, die man bis dahin gewöhnlich als verschiedenen Gestirnen angehörig auffasste, und stellte zuerst mit der Sicherheit inniger Ueberzeugung die kurz vor ihm schon von Borelli gemuthmasste, der Wahrheit sehr nahe liegende Hypothese auf, dass die Kometen sich in Parabeln bewegen. Olbers gab uns unter dieser bei den meisten Kometen unvermeidlichen Voraussetzung, eine Methode der Bahnbestimmung, die, so oft man auch versucht hat, an ihr zu bessern, heute noch in ihrer ursprünglichen Gestalt die Grundlage beinahe aller kometarischen Rechnungen bildet. Es muss ferner die Liebhaber der Wissenschaft immerhin mit gerechtem Stolze erfüllen, wenn sie in unseren Kometenverzeichnissen als beste Berechnungen der Kometen des eben abgelaufenen Jahrhunderts nicht weniger als etwa ein Sechstel ihrer Mitte entnommen sehen. — Die Kenntniss der physischen Beschaffenheit der Kometen hatte von jeher in den Arbeiten von Dilettanten eine Hauptstütze. Von Hevel, dem Vater der heutigen Kometographie, bis zu den wahrhaft unzähligen Beobachtungen der grossen Kometen von 1843 und 1858 müssen wir in dieser Beziehung uns allenthalben auf Zeugnisse astronomischer Liebhaber oder ihrer Anstalten berufen.

Von den beiläufig 300,000 Fixsternen, deren Existenz constatirt ist, verdanken wir reichlich ein Drittel Volontären der Wissenschaft. Wir wollen wieder nur einige der Hauptleistungen namhaft machen. Lord John Wrottesley lieferte an seinen Sternwarten Blackheath und Wrottesley-Hall mit John Hartnup, Richard Philpott und Frederic Morton als Gehülfen 17,000 Bestimmungen der geraden Aufsteigung von 2327 Sternen. Ebenfalls zu Blackheath hatte 1806 Stephen Groombridge, von Berufswegen ein Tuchhändler, in einem Alter von zweiundfünfzig Jahren sich die eben so nützliche als schwierige Aufgabe gestellt, die bis dahin wenig explorirte Gegend um den Nordpol zu beobachten. Während eilf Jahren angestrengter Arbeit bestimmte er an Instrumenten, wie sie von gleicher Vorzüglichkeit damals keine Sternwarte besass, den Ort von mehr als 4000 Sternen in etwa 25,000 Beobachtungen, deren hohen Werth man daraus ersehen mag, dass das Board of Longitude nicht nur sofort die Kosten der Reduction und des Druckes zu bestreiten beschloss, sondern, als sich zeigte, dass bei dieser Bearbeitung sich Fehler eingeschlichen, die erste Publication verwarf, um das Ganze in völlig geänderter, des Inhalts würdiger Form erscheinen zu lassen. Dieselbe besonders mühsame, weil nur mit ungewöhnlichen Vorsichten ausführbare, daher auch von Fachmännern gern vermiedene Aufgabe löste in noch rühmlicherer Weise, sowohl was die Genauigkeit der Bestimmungen, als die Nähe der beobachteten Sterne am Pole betrifft, in der neuesten Zeit Richard C. Carrington mit seinem Gehülfen G. H. Simmonds und lieferte in mehr als 13,000 Beobachtungen gegen 4000 Positionen der trefflichsten Art. Endlich hat Edward J. Cooper mit seinem Gehülfen A. Graham den Ort von zwar nur 50 Sternen gegeben, von denen aber keiner über 2 Grade vom Pole absteht, und deren Bestimmung immerhin eine zweijährige Arbeit forderte. Unter den eben Genannten führte Carrington die ganze Arbeit am vollständigsten durch, indem er nicht blos selbst einen wohlgeordneten Katalog aus seinen Messungen ableitete, sondern überdies auf Grundlage desselben zehn Sternkarten herausgab, die alles, was wir bis dahin dieser Art von der Umgebung des Poles kannten, weit hinter sich zurück lassen. Speciell zu diesem Zwecke reichhaltiger Sternkarten, aber für eine andere, nicht weniger wichtige Zone, nämlich die der Ekliptik, und mit einer Genauigkeit, die weit über jenes Ziel hinausreicht, hat Mr. E. J. Cooper zu Markree in den Jahren 1848—1856 mit seinen Gehülfen Graham und Robertson uns über 60,000 Sternpositionen geliefert, von denen zum wenigsten acht Neuntel völlig neu sind, und die auf Kosten der englischen Regierung seither in vier Bän-

den veröffentlicht wurden. Eine ähnliche Bearbeitung des Zodiakus in Karten, die alle Sterne bis einschliesslich 10. Grösse begreifen, ging von Mr. Bishop's Observatorium durch Hind aus. An der grossen Unternehmung der Berliner Akademie, einen Gürtel von 30 Grad Breite um den Aequator zu mappiren, nahmen mehrere Liebhaber (Regierungs-Beamter J. J. Morstadt in Prag, Thomas J. Hussey in Chislehurst, Hencke in Driesen u. a.) Theil und lehrten uns so viele Tausende von Sternen kennen. Sir Thomas Brisbane, der als Gouverneur von New-South-Wales aus eigenen Mitteln eine der ersten Stätten für beobachtende Astronomie auf der südlichen Hemisphäre in Paramatta gründete, brachte mit seinen Gehülfen Rümker und Dunlop einen Katalog von 7385 Sternen jener Himmelsgegenden zu Stande, der Halley's spärliche Bestimmungen in St. Helena, sowie La Caille's unvollkommene Messungen am Cap der guten Hoffnung und auf Isle de France völlig verdrängte. — Aber nicht blos durch eigene Beobachtungen, sondern auch durch Ordnung und Sichtung des von Anderen gesammelten Materiales erwarben sich Private grosse Verdienste um unsere Kenntniss des Fixsternhimmels. Wie einerseits zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts der Pastor Joh. Bayer die seitdem allgemein angenommene Bezeichnung der helleren Sterne (ein früherer ähnlicher Versuch von Alex. Piccolomini war unbeachtet geblieben) auf seinem Atlas einführte, und Sir John Herschel der bis dahin herrschenden Verwirrung auf den südlichen Sternkarten durch eine eben so scharfsinnige, als mühevolle Sichtung ein Ziel setzte, so rührt andererseits der erste brauchbare Katalog von Hevel, und lieferte Francis Baily das erste allgemeinere Verzeichniss genauer Positionen von 2881 Sternen in neuer und so zweckmässiger Form, dass spätere ähnliche Arbeiten auch von Fachmännern sich diesem Muster anschlossen. Von Baily besitzen wir überdies sorgfältig redigirte Ausgaben der älteren Kataloge von Flamsteed, Ptolomaeus, Ulugh Beigh, Tycho Brahe, Halley, Hevel, La Caille und Tob. Mayer, eine riesige Leistung, die allein hingereicht hätte, Baily's Namen zu verewigen. Haben die eben genannten Quellen nur für seltenere Untersuchungen Werth, so ist die Katalogisirung der gegen 50,000 Sterne enthaltenden Lalande'schen Histoire Céleste ein Werk, dessen immerwährender Gebrauch den praktischen Astronomen täglich an den Dank erinnert, den er Baily dafür schuldet. Aber auch dabei liess es dieser unermüdliche Freund unserer Wissenschaft nicht bewenden, und bewog die British Association den von ihm ausgearbeiteten grossen Katalog von etwa 10,000 Sternen herauszugeben, der ein Grundwerk der heutigen Astronomie bildet.

Neben solchen bewunderungswürdigen Leistungen wäre es überflüssig, unserer Thesis zu Liebe kleinere Arbeiten, so verdienstlich dieselben an sich auch sind, wie die Ergänzungen von Flamsteed's Katalog durch Miss Caroline Herschel, das Verzeichniss von Zodiakalsternen, die Pearson an seinem Observatorium in South Kilworth beobachtete etc., hier weiter anzuführen.

Die merkwürdige Erscheinung der Veränderlichkeit des Lichtes von Fixsternen ist in ihren ersten Spuren zu Ende des sechzehnten Jahrhunderts an o des Walfisches von David Fabricius, einem Pastor in Ostfriesland, aufgefunden. Von den etwa fünfzig Veränderlichen, die wir heute kennen, ist ein grosser Theil von Dilettanten oder an ihren Sternwarten erkannt, darunter an Bishop's Observatorium von Hind etwa das Viertel der Gesammtzahl. Die erste genauere Bestimmung der Periodicität des Lichtwechsels wurde an Mira Ceti von Ismael Boulliau, einem privatisirenden Gelehrten, die zweite an Algol von John Goodrike, einem englischen Edelmanne in York, und dem schon erwähnten astronomischen Bauer Palitzsch vorgenommen. Die eben genannten Veränderlichen gehören wohl mit η Argus zu den merkwürdigsten, und dieser letztere wurde von Sir John Herschel zuerst näher erforscht. Joseph Baxendell, ein Privatmann in Manchester, hat neuerlich sich einer regelmässigen Beobachtung dieser interessanten Erscheinungen unterzogen.

Als vor etwa achtzig Jahren der ältere Herschel sich mit den Doppelsternen zu beschäftigen anfing, fand er vier notorisch vielfache Sterne und die allgemeine Meinung vor, solche gegenseitige Nähe von Fixsternen rühre nur daher, dass sie beiläufig in derselben Richtung, wenngleich durch ungemessene Räume von einander getrennt sich befänden. Bis zum Jahre 1804 hatte Sir William nicht nur über 800 solche Gruppen einander sehr naher Sterne entdeckt, sondern auch die Zusammengehörigkeit der Componenten in vielen Fällen nachgewiesen und so eines der herrlichsten Wunder der Schöpfung uns kennen gelehrt: Sonnensysteme höherer Ordnung, in denen leuchtende Centralkörper, jeder vielleicht von zahllosen Kometen, von Planeten und Satelliten begleitet, um einander kreisen. Diese Arbeiten Sir William's nahm zuerst um das Jahr 1820 Sir James South anfangs allein und mit sehr mässigen Werkzeugen wieder auf; später standen ihm „fürstliche“ Mittel zu Gebote, die er in Gemeinschaft mit Sir John Herschel zu gleichem Zwecke benutzte. Im Ganzen erfuhren so nahezu alle von Sir William entdeckten Vielfachen eine wiederholte Untersuchung, die eine Menge der merkwürdig-

sten Resultate zu Tage förderte. Sir John setzte einige Jahre später diese Messungen in noch grösserem Maassstabe fort und vermehrte die Zahl der bekannten Doppelsterne unserer Hemisphäre um nahe dreitausend. Eine andere grosse Leistung in dieser Beziehung rührt von seinen vierjährigen Beobachtungen in Feldhausen am Cap, deren Gedächtniss von seinen dortigen Mitbürgern durch ein Denkmal geehrt wurde und durch die er nicht weniger als 2095 völlig neue Gestirne dieser Art entdeckte. Sir John fand dabei eben nur die Arbeiten von Dunlop vor, der zuerst an Brisbane's Observatorium und später mit eigenen Hilfsmitteln in Paramatta sich mit diesem Gegenstande beschäftigt hatte. Eine besonders werthvolle Reihe von ähnlichen Bestimmungen führte Dawes, den Sir John Herschel für den besten heutigen Beobachter auf diesem Gebiete hält, zuerst mit sehr dürftigen Hilfsmitteln von 1834 bis 1844 an seiner Sternwarte zu Ormskirk, dann an Bishop's Observatorium aus, von welchem letzteren wir, so wie von seinem anderen Assistenten Hind ebenfalls zahlreiche Messungen dieser Art besitzen. Admiral W. H. Smyth, der berühmte Hydrograph des Mittelmeeres, lieferte an seiner Sternwarte in Bedford von 1830 bis 1843 Messungen von 680 Vielfachen und begleitete dieselben wie Bishop mit sehr interessanten Erläuterungen, die uns gleichsam die Geschichte jedes dieser merkwürdigen Gestirne erzählen. W. S. Jacob, später Director der Sternwarte in Madras, beobachtete als Captain der Bombay Engineers 244 Doppelsterne in Poona; Isaac Fletcher, dessen Ausrüstung in einem einzigen Fernrohre von nur 4″ Oeffnung bestand, lieferte zu Tarnbank (Cumberland) Messungen von 282, John Miller in ähnlicher Weise zu Whitehaven Beobachtungen von einer nur wenig geringeren Anzahl Doppelsterne. Beer und Mädler, Dembowski in Cremano bei Neapel, der mit grosser Beharrlichkeit in etwa vier Jahren gegen 200 dieser Gestirne mass, Alvan Clark in Boston, der uns zwar nur zwölf neue Doppelsterne, aber der schwierigsten Art, kennen lehrte und so viele Volontäre wären hier noch zu nennen, wie denn in der That nur W. Struve auf diesem Felde die Ehre der Berufsmänner glänzend rettete, das sonst in seinem praktischen Theile allein von Privaten bebaut wäre. Diese haben es übrigens auch in der Theorie nicht an sich fehlen lassen: wir besitzen von Sir John Herschel eine sinnreiche Methode der Bahnbestimmung physischer Doppelsterne. Sir James South zeigte bei 61 Cygni, dass die umliegenden Sterne an der Eigenbewegung dieses Sternes nicht Theil nehmen, somit ferner von uns stehen als dieser; ebenso wiesen Sir James und der jüngere Herschel nach, dass der kleine Begleiter von α Lyrae nur

optisch mit diesem verbunden sei und trugen so wesentlich bei zu dem grossen Schritte, der uns auch ausser den Grenzen unseres Sonnensystems Entfernungen bestimmen half.

Von Nebelflecken und Sternhaufen waren vor Sir William Herschel etwa anderthalbhundert bekannt. Sir William führte wunderbar genug während derselben Jahre, in denen er uns die Doppelsterne nach Tausenden zählen lehrte, uns beiläufig 1800 auch solcher Objecte vor, deren Positionen von seiner Schwester gerechnet sind und denen sein Sohn später noch etwa 500 beifügte. Auf der südlichen Hemisphäre begründete Dunlop in Paramatta nach Brisbane's Abgang von New-South-Wales mit sehr geringen, zum Theil von ihm selbst verfertigten Mitteln diesen Theil der Astrognosie durch Entdeckung von beiläufig 600 solcher Gestirne, deren nur etwa 50 bereits von Lacaille beobachtet waren. Sir John Herschels Capreise steigerte diese Zahl auf 1708 und verbreitete über eine Menge wichtiger, früher sehr unvollständig bekannter Gegenstände wie die Capwolken, den Kohlensack, den grossen Nebel bei η Argus, den Lauf der Milchstrasse, die Sternhaufen ω Centauri und $\varkappa$ Crucis etc. klares Licht. Den beiden Herschel reihen sich neuester Zeit würdig an: W. H. Smyth mit einer ebenso gediegenen als anziehenden Beschreibung von 170 Nebeln und Haufen, W. Lassell bei seinem Aufenthalte auf Malta mit Untersuchungen des Orionnebels und ähnlicher Gegenstände. Eine neue Epoche aber durch Aufschliessung höchst überraschender Details, die in Hinsicht auf den Bau dieser Himmelskörper alles Vorangehende eben nur als Anfänge erscheinen lassen, begründete Lord Rosse mit seinen riesigen Instrumenten in Parsonstown. Dass unsere heutigen Vorstellungen von den Fixsternen, diesen eigentlichen Bürgern des Weltalls, einigermassen hinanreichen an die für uns nie ganz zu ergründende Herrlichkeit der Schöpfung, verdanken wir in erster Reihe den beiden Herschel und Lord Rosse; denn wenn jene uns von ihren Himmelsaichungen berichteten, dass sie durch das kaum eine halbe Vollmondsbreite messende Feld ihres Fernrohres während einer Viertelstunde 116.000 Sonnen ziehen sahen, ja dass sie mit ihren Teleskopen*) auf dem ganzen Himmel zum wenigsten gegen sechs Millionen Sterne ausnehmen konnten, so zerfällte hinwieder Lord Rosse in tausend und aber tausend Mittelpunkte von Planetensystemen Nebelflecke, denen gegenüber jene Werkzeuge der beiden Herschel eben so unzureichend sind wie das freie Auge für die Milchstrasse. Lord Rosse lehrte uns die auffallend

*) Von 20 Fuss Brennweite.

symmetrischen Bildungen, die wir bisher an diesen Körpern annahmen, als Täuschungen kennen, die von nun an weniger regelmässigen, aber darum nur um so staunenswertheren Gestaltungen weichen müssen und sich zu diesen verhalten wie die gerundete Sage zur verbürgten Geschichte.

Ich könnte Ihnen noch Proben die Hülle und Fülle bringen von dem Antheile, den Liebhaber der Astronomie an deren Förderung hatten, könnte daran erinnern, dass die gesammte heutige Naturforschung auf den lichtvollen Ideen eines Lord Kanzlers von England beruht, dass von den 52 wohlverdienten Auszeichnungen, die von der R. Astronomical Society seit 1823 bis heute verliehen wurden, nicht weniger als 19 auf Private fielen; könnte Ihnen in's Gedächtniss rufen, dass zwei der wichtigsten Entdeckungen, die der Aberration des Lichtes und der Nutation von Bradley mit Hilfsmitteln gemacht wurden, die Dilettanten: Molyneux in Kew und Earl Macclesfield in Shirburn-Castle, ihm zu Gebote stellten; könnte anführen, dass wir die merkwürdige Erscheinung der Sternschnuppen näher zu erforschen, durch astronomische Liebhaber: Benzenberg, den nomadisirenden Akustiker Chladni etc., zuerst veranlasst wurden, dass ein Dilettant, George Lynn in Southwick, uns schon im Anfange des vorigen Jahrhunderts lehrte, diese flüchtigsten aller Himmelsphänomene zur Fixirung der gegenseitigen Lage von Punkten der Erdoberfläche zu benutzen; könnte erwähnen, dass Josuah Childrey, Pfarrer zu Upway, uns 1661 der Erste mit dem Zodiakallichte bekannt machte etc.; aber ich will Ihre Geduld nicht über Gebühr in Anspruch nehmen, und mich begnügen, Ihr Augenmerk nur noch auf ein Gebiet zu richten, das einerseits zu wichtig, auf dem andererseits die Leistungen von Volontären der Wissenschaft zu bedeutend sind, als dass ich es hier mit Stillschweigen übergeben dürfte.

Wir sprachen bisher nur von eigentlichen Forschungen und liessen die dazu nöthigen Hilfsmittel: Instrumente und Sternwarten an sich ausser Acht, und doch ist die Thätigkeit, welche solche Hilfsmittel schafft, noch wichtiger als ihre unmittelbare Anwendung, denn sie setzt nicht den Einzelnen, sondern die Menschheit im Grossen und Ganzen in den Stand, an dem gemeinsamen Werke der Bildung sich zu betheilen.

Was zuerst die Instrumente betrifft, so haben wir an einem Privatmanne Jacob Metius in Alkmaar einen der unabhängigen Erfinder des Fernrohres zu verehren, der sich aus Liebhaberei mit Construction von Spiegeln und Brenngläsern beschäftigte, und so dahin gelangte, unser Auge in das eines Seraphs zu verwan-

deln. Es war ein junger Mann ohne Amt und Würden, William Gascoigne in Middleton, der das Teleskop zuerst als Messwerkzeug verwendete, der in dieser Beziehung zuerst den grossen Vorzug des Kepler'schen Oculares vor dem Galilei'schen erkannte, der das Mikrometer erfand und schon um die Mitte des sechzehnten Jahrhunderts Resultate damit erzielte, die sich selbst mit heutigen Bestimmungen vergleichen lassen. Wir danken einem Manne, der als armer Bauernknabe am Pfluge seine mathematischen Studien begann, später in der Uhrmacherkunst seinen Erwerb suchte, David Rittenhouse in Philadelphia, die lichtvolle, in ihrem seitherigen Nutzen kaum hoch genug zu schätzende Idee, durch zwei mit den Objectiven einander gegenüber gestellte Fernröhre eine fixe optische Linie zu bezeichnen, so wie auch Rittenhouse uns (gleichzeitig mit Abbate F. Fontana) die wichtigen Vortheile zeigte, die der Spinnenfaden vor allen künstlichen Erzeugnissen voraus hat, wenn es gilt, gewisse Punkte des Sehfeldes festzuhalten. Thomas Godfrey, ein Glaser in Philadelphia, erdachte unabhängig von J. Newton den Spiegelsextanten, und brachte durch Hadley dieses Instrument zu allgemeiner Anwendung, das für die nautische Astronomie eben so wichtig ist wie die Bussole. Die eigentliche Einführung einer der nützlichsten Vorrichtungen, des Kreismikrometers, verdanken wir Olbers. Die Uhrmacher Dent und Bloxam ersannen eine höchst einfache Vorrichtung zu der wichtigen Bestimmung der Durchgangszeit eines Gestirnes durch einen bestimmten Vertical. Captain Kater brachte das durch ihn unabhängig von dem früheren Erfinder Bohnenberger erdachte Reversionspendel in die Praxis und leistete dadurch den Pendelbeobachtungen wesentlich Vorschub. Ein Liebhaber der Wissenschaft, der erst in späten Jahren in öffentliche Stellungen trat, Abbé Rochon, lehrte uns doppelt brechende Krystalle zu Mikrometern benützen. Pearson, dem wir das vollständigste Werk über astronomische Instrumente verdanken, erfand ein astronomisches Ocular von veränderlicher Stärke, das für gewisse Fälle von grossem Nutzen ist. Dawes gab uns eine Vorrichtung, mit der eine tiefere Einsicht in die Sonnenflecken, wie Airy sagt, im geometrischen, nicht im metaphorischen Sinne des Wortes gewonnen wurde. Von F. Baily erhielten wir eine gründliche Behandlung des Mercurialpendels. Das Spiegelteleskop gelangte in den Händen der beiden Herschel, von Oberamtmann Schröter, W. Lassel und Lord Rosse zu einer Mächtigkeit, die das dioptrische Fernrohr bisher nicht erreichen konnte. Lassel und Dawes fanden zuerst die Mittel, katoptrische Instrumente parallaktisch zu montiren, und erhöhten dadurch sehr die Anwendbarkeit dieser Werkzeuge.

Sheepshanks brachte eine wichtige Verbesserung an den Bewegungsuhren der Aequatoriale an, etc.

Von Privatsternwarten haben wir, durch besondere von solchen Anstalten ausgegangene Leistungen veranlasst, bereits viele genannt; die Bedeutung derselben aber liegt nicht allein in hervorragenden, der Wissenschaft erwiesenen Diensten, sondern ist eine selbstständige: sie bilden an sich mehr oder weniger dauernde Stätten der unmittelbaren Förderung unseres Faches, die durch fortlaufende Beobachtungen der verschiedensten Art überall in die astronomischen Bestrebungen ihrer Zeit eintreten, und bieten überdies Talenten, die auf diesem Wege oft ganz der Astronomie erhalten werden, Gelegenheit sich zu entfalten, gehen endlich häufig zu bleibendem Gewinne der Wissenschaft in Landesinstitute über. Erlauben Sie mir den Belegen hiefür, die sich aus dem eben Gesprochenen von selbst ergeben, noch einige Thatsachen anzureihen, die bisher keine Erwähnung fanden.

Die Ausrüstung der Lilienthaler Sternwarte kam durch Kauf von Seite der englischen Regierung an das k. Observatorium zu Göttingen.

In gleicher Weise bildeten die Instrumente des Grafen von Hahn zu Remplin die erste Ausstattung der Königsberger Sternwarte.

Graf Moritz von Brühl, chursächsischer Gesandter am englischen Hofe, hatte zu Ende des vorigen Jahrhunderts zwei trefflich ausgerüstete und mannigfaltig thätige Sternwarten, die eine zu London, die andere zu Harfield. Bibliothek sowohl als Instrumente legten später durch Schenkung an die Universität Leipzig den Grund zum dortigen Observatorium.

Die Bilker Sternwarte wurde 1846 von ihrem Erbauer Benzenberg der Stadt Düsseldorf vermacht, welche sie fortan unterhielt. Brünnow und Luther leisteten an dieser Anstalt der Wissenschaft wichtige Dienste.

Karl Nagy sammelte in einem von ihm zu Bicske bei Pesth errichteten Gebäude einen prächtigen Instrumentenpark, der nun, durch Schenkung in öffentlichen Besitz übergegangen, grossen Nutzen zu stiften nicht verfehlen wird.

Die Observatorien des Herrn Prälaten von Unkrechtsberg zu Olmütz und von Baron Parish zu Senftenberg wetteiferten eine geraume Zeit hindurch mit öffentlichen Instituten in astromischen Arbeiten; an jener konnte Julius Schmidt, jetzt k. Astro-

nom zu Athen, an dieser Th. Brorsen sich dem Fache widmen. Die Ausrüstungen beider Anstalten kamen bei deren Auflösung grösstentheils ständigen Sternwarten zu.

Die Sternwarten des Kammerherrn v. Reedtz zu Palsgaard, des Prof. Habicht, zuerst zu Bernburg, dann zu Gotha, lieferten zu wiederholten Malen werthvolle Beobachtungen.

Colonel Mark Beaufoy's Instrumente gingen durch Legat an die k. astronomische Gesellschaft in London über und fanden dort treffliche Verwendung. Dieselbe Gesellschaft überkam durch Legat eine grosse Anzahl von kostbaren Instrumenten, die Sheepshanks mit seltenem Kennerblicke gesammelt hatte.

Die schöne Ausrüstung von Smyth's Sternwarte in Bedford ist jetzt im Besitze eines anderen ausgezeichneten Freundes der Astronomie, Doctor Lee in Hartwell, wo Epps, Pogson u. a. regelmässig Beobachtungen anstellten.

Aus Lord Brisbane's Sternwarte in Paramatta entstand das erste Staats-Observatorium auf neuholländischem Boden.

Rear-Admiral Shireff in Gibraltar, dessgleichen John Drew in Southampton, Rev. H. H. Jones in Manchester errichteten auf ihre Kosten in den genannten Häfen Sternwarten zur Regulirung der Schiffschronometer, und wirkten so höchst wohlthätig für die Nautik.

Anne Jean Duc-la-Chapelle gründete zu Montauban im Jahre 1792 mitten unter den Schrecken der Revolution eine Sternwarte, der wir eine Reihe schöner Bestimmungen verdanken, und an welcher Pierre Bernier, der Schiffsastronom bei Baudin's Weltumseglung, sich ausbildete.

Darquier de Pellepoix beobachtete nahe um dieselbe Zeit durch mehrere Decennien an einem von ihm in Toulouse erbauten Observatorium, aus dem später die jetzt dort bestehende Regierungsanstalt hervorging.

De la Nux, das gelehrte Mitglied des Conseil supérieur auf Isle de Bourbon, de Garipuy in Toulouse, J. P. Loys de Chéseaux auf seinem Gute gleichen Namens, entwickelten Jahrzehnde lang eine sehr erspriessliche Thätigkeit als Beobachter.

In den vereinigten Staaten von Nordamerika rief der Wunsch, auch in astronomischer Beziehung unabhängig von Europa zu werden, von 1836 bis 1854, also in achtzehn Jahren, nicht weniger als vierundzwanzig grösstentheils sehr bedeutende Sternwarten

in's Leben, unter denen wieder nicht weniger als sieben von Privaten (John Jackson in Sharon bei Darby, Lewis Gibbes in Charleston, van Arsdale in Newark, W. van Duzee in Buffalo, Campbell und L. M. Rutherford in New-York, Friend in Philadelphia) gegründet wurden. Wäre mir hier gestattet, das Mäcenatenthum, welches eben nur materiellen Vorschub leistet, ohne sich an der Arbeit selbst zu betheilen, in den Kreis meiner Bemerkungen zu ziehen, so müsste ich neun weiterer nordamerikanischer Observatorien erwähnen, die ihr Entstehen aus solcher Quelle herleiten.

Die Wärme aber, mit der gerade ich mich des astronomischen Liebhaberthumes im eigentlichen Sinne des Wortes annehme, mögen Sie mir zugute halten; denn die erste Sternwarte in Wien wurde zu Anfange des vorigen Jahrhunderts von einem Privatmanne, dem vielseitig gelehrten udinesischen Patricier J. J. Marinoni gegründet. Sie diente dem Observatorium zum Muster und zur Hilfe, das bald darauf in den Räumen, wo wir jetzt den grössten Theil unserer Collegien halten, errichtet wurde, und ihre reiche Ausrüstung ging nach dem Tode des Besitzers als Schenkung der um das Jahr 1753 erbauten Staatsanstalt zu.

Doch ich will zum Schlusse eilen.

So weit entfernt das, was ich eben sprach, von allem Anspruche auf Vollständigkeit ist, so mag es doch hier immerhin genügen, und Sie erlauben mir nur noch einige Betrachtungen daran zu knüpfen.

Wir verfuhren bisher ganz als getreue Baconianer inductiv, indem wir aus der Erfahrung nachwiesen, welche ausserordentlichen Dienste das Liebhaberthum unserer Wissenschaft erwiesen hat und eben daran waren den Schluss zu ziehen, dass man fort und fort von dieser Seite wichtige Förderungen der Astronomie erwarten darf. Man fängt nachgerade an, uns Naturforschern, was eben diese Induction betrifft, eine gewisse Einseitigkeit vorzuwerfen — vielleicht nicht mit Unrecht; denn es liegt in der menschlichen Natur, dem Pendel gleich keine Ruhe in der richtigen Mitte zu finden, und dann erst sich zu besinnen und an Umkehr zu denken, wenn man in dieser oder jener Richtung zu weit gegangen. Den Philosophen zu Gefallen also wollen wir jetzt auch noch in aller Kürze den deductiven Weg betreten und uns nach den inneren Gründen fragen, die dem Liebhaberthume in diesem Fache solches Gedeihen und solche Bedeutung verschafften.

Ich sage: in diesem Fache, denn ich bin der hoffentlich

nicht irrigen Meinung, dass keine andere Naturwissenschaft sich solcher ergiebigen Unterstützung von Seite der Laien erfreut. Fürchten Sie nicht, dass ich damit zu einer Schilderung der oft besprochenen Erhabenheit des Gegenstandes aushole, mit welchem die Himmelskunde sich befasst; denn diejenigen, die in astronomischen Beschäftigungen nur das Vergnügen suchen sich an der Schönheit einer sternhellen Nacht zu weiden, sind nicht die Männer, denen die Wissenschaft ein dankbares Andenken weiht; nur die mühevolle Vertiefung in Einzelnheiten nützt, bringt Ruhm und Ehre, im Detail aber ist die Natur nach jeder Richtung bewunderungswürdig und fesselt überall den sie Verstehenden. Ovid's schöne Worte:

> Os homini sublime dedit, coelumque tueri
> Jussit, et erectos ad sidera tollere vultus

haben ihren bildlichen Sinn nahezu verloren, seit das Mikroskop uns die Wunder der Schöpfung so gut erschliesst wie das Fernrohr. Ich finde vielmehr die Ursache der Erfolge des Liebhaberthumes der Astronomie zunächst in der Zugänglichkeit dieser Wissenschaft. Welche andere Doctrin kann sich einer gleichen Anzahl trefflicher populärer Schriften rühmen? von Fontenelle, Lambert und Laplace bis auf unsere Tage bilden dieselben nachgerade eine selbstständige Literatur, und es würde schwer halten, irgend einen bekannteren Namen unter den Astronomen des eben abgelaufenen Jahrhunderts anzuführen, der sich in dieser Richtung nicht auch versucht hat. Glauben Sie ja nicht, dass diese Häufigkeit solcher nichts weniger als leichten, gemeinfasslichen Darstellungen von einer besonderen Liebenswürdigkeit der Astronomen rührt; die Männer des Berufes sind überall geneigt, der innungsstolzen und bequemen Maxime: „arcere vulgus" zu huldigen und dieselbe so zu deuten, dass im Allgemeinen eben nur wer zur Gilde gehört, zu den übrigen zählt. Es ist hier die Wesenheit des Faches, welche den Gelehrten gestattet und eben desshalb sie zwingt, aus ihrer Studirstube herauszutreten und den Kern der Wahrheiten, die sie oder Andere gefunden, möglichst entkleidet vom Nimbus der Kunstsprache, dem Laien mitzutheilen; ihren Absperrungsgelüsten fröhnen hiesse sich eines der schönsten Vorrechte ihrer Wissenschaft begeben, das dieselbe zu einem Hebel höherer Bildung macht, das ihrer Förderung Hunderte von helfenden Händen gewinnt. Solchen jedem Gebildeten verständlichen Behandlungen fügen sich nämlich bloss jene Wissenschaften, die sich eines obersten Grundsatzes erfreuen, und daher in ihrem eigentlichen Gerippe eben nur eine ununterbrochene Kette von Schlüssen bilden. Die Astronomie rühmt sich dieser

Beschaffenheit seit Jahrhunderten; dadurch hat sie in jener Beziehung so grossen Vorsprung vor den anderen Naturwissenschaften gewonnen, die neuester Zeit in demselben Maasse ähnliches Streben nach gemeinfasslichen Darstellungen zu äussern beginnen, in welchem sie der Periode des Mystischen oder der blossen Anhäufung von Thatsachen sich entwinden. Derselben Richtung des Popularisirens begegnen wir in anderer Weise auf streng wissenschaftlichem Gebiete: der Astronom hat so viele mechanische Operationen im Rechnen wie im Beobachten auszuführen, bevor er zu Resultaten gelangt, dass er von jeher darauf bedacht war, durch Kunstgriffe aller Art jene Vorarbeiten abzukürzen; er hat überdies für Praktiker im eigentlichen Sinne des Wortes: für den Nautiker, den Feldmesser, den Geographen zu sorgen, die sich nicht damit begnügen, wenn man ihrer Wirksamkeit überhaupt neue Wege zeigt; dieselben müssen so bequem als möglich sein, sollen sie überhaupt beschritten werden. So kommt es, dass an sich sehr verwickelte Arbeiten in einer Weise vereinfacht werden, die nichts zu wünschen übrig lässt, dass Instrumente zum Gebrauche einladende Formen annehmen, auch den weniger Bemittelten erreichbar werden. Unsere Methoden, unsere Ephemeriden und Tafeln führen die meisten Aufgaben auf elementare arithmetische Verfahren zurück. Eine heitere Stunde gibt heute die geographische Lage eines Ortes mit grösserer Präcision als früher Monate lang fortgesetzte Beobachtungen. An die Stelle der unbehilflichen astronomischen Werkzeuge, die z. B. noch Karstens Niebuhr auf Kameelen fortschaffen musste, sind kleine, den Reisenden kaum beirrende Instrumente getreten, ohne der Genauigkeit irgend Eintrag zu thun, ja mit bedeutendem Gewinne für dieselbe. Die Errichtung einer Sternwarte fordert nicht mehr wie ehemals nothwendigerweise einen dem Einzelnen nur selten möglichen Aufwand, die Anstalt ist also auch nicht mehr an die Scholle gebunden, wo sie eben entstand: als Lassell von Starfield bei Liverpool durch den Kohlendampf vertrieben wurde, wanderte er mit seinem Observatorium zwei Meilen weiter nach Broadstones; Dawes wohnte zuerst in Ormskirk, dann zu Cranbrook, später zu Wateringbury, endlich zu Haddenham, aber überall hin begleitete ihn seine Sternwarte; ja man kann heute sogar an portative Observatorien denken, wie denn Thomas Dell ein solches von sehr zweckmässiger Einrichtung ersonnen hat. Ein gutes Fernrohr und eine verlässige Uhr in freier ruhiger Lage können richtig gebraucht oft zu den schönsten Ergebnissen führen. Kein Fach ferner gewährt vielleicht so sehr wie das unsrige die Befriedigung, die im Fördern, im Erzielen von Erfolgen liegt; kein Fach bietet so oft wie dieses die Erfrischung der

unbestreitbaren Bestätigung unserer Ansichten; kein Fach lässt wie das unsrige die Natur fast immer selbst und im Grossen experimentiren, erspart uns beinahe ganz die störenden Mühseligkeiten, welche eigentliche Versuche unausweichlich begleiten; die Astronomie fordert von ihren Jüngern nicht, dass sie ein uns angebornes Graun vor Leichen überwinden, dass sie abenteuerliche Reisen unternehmen, dass sie lebensgefährliche Experimente anstellen. Vor Allem aber hat die Astronomie einen Vortheil gegenüber den übrigen Naturwissenschaften, der hier von grosser Bedeutung ist: die völlige Freiheit von der Calamität der Terminologien und Classificationen. Während andere Naturforscher unter der Wucht dieses, ich möchte sagen, administrativen Theils ihrer Thätigkeit beinahe erliegen und eben desshalb häufig in derselben aufgehen, ist dem Astronomen diese deprimirende Aufgabe ganz und gar abgenommen. Der Begriffe: Classe, Ordnung, Familie, Gattung, Art und wie die unzähligen Abtheilungen alle heissen, deren andere Fächer für die Instandhaltung ihres wissenschaftlichen Haushaltes bedürfen, kann der Astronom sich völlig entschlagen. Die Sorglosigkeit des Astronomen in Feststellung generischer Unterschiede, ja der Kunstausdrücke überhaupt, die ergötzliche Verwirrung, welche in dieser Beziehung in unserer Wissenschaft mitunter herrscht, zeigen, wie wenig dem Astronomen an diesen Dingen liegt. Wenn heute Jemand behaupten wollte, die Sternschnuppen des August und November seien Kometen, oder Kometen seien Meteore, so werden wir uns kaum die Mühe geben, die Gründe für und wider erst sehr genau abzuwägen. Delambre nennt irgendwo die Kometen Planeten einer besonderen Art, er hätte eben so gut die Planeten eine besondere Gattung von Kometen nennen können, ohne weiter Widerspruch zu finden. Wir kennen selbstleuchtende Planeten und haben alle Ursache, die Existenz dunkler, stillstehender Centralkörper anzunehmen. Für den Astronomen hat nicht die Gattung, sondern nur das Individuum Bedeutung. Dieses aber kennzeichnet er durch den Ort, an welchem er es zu einer bestimmten Zeit traf. Er hat ein grosses Fachwerk angelegt, das ihm das ganze unermessliche Himmelsgewölbe repräsentirt, in welchem jedes beobachtete Object seinen besonderen Platz erhält, den es zwar im Laufe der Jahre ändert, aber nach bestimmten, uns genau bekannten Gesetzen, so dass nie Unordnung entsteht. Der Astronom bedarf also auch der Myriaden von Namen nicht, die andere Wissenschaften zu ihren Plagen zählen. Wenn wir ein Paar Dutzend Gestirne mit besonderen Titeln beehren, so ist das eben ein Herkommen, das wir schnell verlassen werden, wenn es uns etwa durch die Zahl dieser Himmelskörper unbequem werden

sollte, wie wir längst nahezu alle Benennungen, welche die Alten den Sternen gegeben, der Geschichte überantworteten, seitdem es eben galt, Tausende und aber Tausende von Gestirnen zu taufen. Dieser wie mir scheint wichtige Unterschied der Astronomie von anderen naturhistorischen Fächern begründet nicht etwa einen geringeren Umfang der Aufgabe, welche ihr vorliegt, denn gerade dadurch, dass sie die Individuen kennen zu lernen hat, wird ihr Gebiet ganz eigentlich unübersehbar, und wir können mit Sicherheit einer nicht eben fernen Zukunft entgegensehen, wo eine Zahl von Himmelsobjecten in den Bereich der Untersuchung gezogen sein wird, welche weit über die der bekannten Arten von Thieren, Pflanzen u. s. w., so riesig diese letztlich auch angewachsen ist, hinausgehen wird; aber dieses Kennenlernen der Individuen ist ein den Geist anregendes, unmittelbares Beschäftigen mit der Natur; wir Astronomen sammeln so zu sagen nur und kümmern uns um das ermüdende Nomenkliren nicht. Die Freude, die der Botaniker, der Zoologe etc. hat, wenn er endlich nach langwierigen Bestimmungen den Namen seines Objectes erfährt, geht bei uns ganz über in die Freude zu wissen, wo das Object am Himmel aufzusuchen ist. Jenes Bestimmen aber setzt immer ein Eingehen in die Natur der Dinge voraus, das dem Menschen nur in sehr geringem Maasse gestattet, dessen der Astronom im Allgemeinen ganz enthoben ist. Diese Frage nach den letzten Gründen durchzieht überhaupt das ganze Gewebe anderer Naturwissenschaften und erlaubt dort nicht wie in der Astronomie einzelne Theile des Faches völlig abgesondert von andern zu behandeln. Desshalb stehen denn auch jene trockenen, keineswegs anziehenden Einleitungen in das Studium anderer Zweige der Naturforschung überdies auf schwankendem Boden, während die analoge Beschäftigung des Astronomen auf unverbrüchlichen, für immer feststehenden Normen fusst, und so heisst es im Gegensatze zu sonstigen Aussprüchen hier: „die Gattung vergeht, das Individuum besteht“ — eine Seite unseres Faches, die wieder nicht wenig dazu beitragen muss, ihm Liebhaber zuzuführen; denn nirgends sonst ist die Palme der Unsterblichkeit so sicher und mit verhältnissmässig so leichter Mühe zu gewinnen. Das dankbare Feld der Entdeckungen ist das eigentliche Gebiet des Dilettantismus. Der Astronom von Profession soll nur, wenn er besondere Gründe dazu hat, sich auf's Entdecken im engsten Sinne des Wortes legen, denn es sind ihm Helfer und Mittel zur Verfügung gestellt, die ihm schwierigere Aufgaben zuweisen. Der Dilettant kann nach Lust und Liebe den Gegenstand seines Strebens wählen; welches Ziel er immer mit Ausdauer verfolgt, wir werden die Früchte seiner Mühen willkommen heissen. Eine an

sich sehr wünschenswerthe Ueberwachung des ganzen Himmels z. B. nach allem, was Neues und Unerwartetes sich zeigt, wie sie vordem Hevel und in unseren Tagen Biela durchgeführt, ist die Sache des Liebhabers, der allein dazu die nöthige Musse hat, während der Fachgelehrte seine Zeit nicht auf's Gerathewohl verwenden darf, sondern völlig bestimmte Zwecke sich vorstecken muss. Das Corps der Dilettanten hat wie alle Freicorps mehr Schwung als die Männer des Berufes. Dieser bringt einen gewissen Schematismus mit sich im Verhalten der Gelehrten, wie im Reglement des Militärs, einen Schematismus, der nothwendig und die Grundlage des ganzen Wesens ist, von dessen Schattenseiten freier zu sein der Volontär aber immerhin sich rühmen kann. In dieser Ungebundenheit liegt indessen auch die Gefahr der Zügellosigkeit, die dort, wo sie ungehindert wuchert, den Dilettanten zur Qual der Astronomen macht. Das Heer derer, die da, wie Sir John Herschel sich einmal sehr treffend ausdrückte, jede Wissenschaft, welche sie nicht kennen, für eine neue, eben entstehende halten und sich z. B. sofort anschicken den Grundbau der Astronomie durch von ihnen erdachte Weltsysteme zu legen, die da glauben, astronomische Wahrheiten liessen sich eben auch ohne alle Vorkenntnisse errathen, das Heer dieser Freiwilligen hat es zu verantworten, wenn manche Leute vom Handwerk die Berührung mit Dilettanten scheuen. Wo aber viel Korn geerntet wird, muss es auch viel Spreu geben, und in der That verleitet die Astronomie, obschon gerade sie die erste unter ihren Schwestern den richtigen Weg der Forschung betrat, mehr als irgend eine andere Wissenschaft die Geister zu eitlen Träumen, zu aristotelischen Anticipationen, — ein Weg, den heute zu betreten geistig noch eben so bedenklich ist, als es einst auch leiblich gefährlich war davon abzuweichen. Die Bestrebungen der Dilettanten sind der grossen Mehrzahl nach rieselnden Gewässern zu vergleichen, die nicht beachtet und sich selbst überlassen im Sande verrinnen, ja Schaden bringen und das Land versumpfen, gesammelt und geregelt den berechtigten Strömen an Nutzen um nichts nachstehen. Daraus ergibt sich von selbst die Richtschnur des gegenseitigen Verhaltens zwischen Profession und Liebhaberthum, das unter günstigen Verhältnissen wie in England ganz eigentlich zur Pflanzschule für jene werden kann. Wofern dem Dilettanten Ernst und Beharrlichkeit nicht fehlen, soll und darf ihm die Hilfe des Mannes vom Berufe nicht entgehen. Erfüllt er diese Forderung, so kann er auch des Erfolges gewiss sein, denn die Schachte, die es hier zu bearbeiten gilt, sind unerschöpflich, und der aufmerksame Forscher kann immer auf das, was wir Glück nennen, zählen; hätte Kepler

sich nicht zufällig an Mars gehalten, dessen Ungleichheiten auch den damaligen Beobachtungsmitteln schon zugänglich waren, hätte William Herschel Uranus eilf Tage früher erblickt, wo dieses Gestirn stationär und folglich kaum als Planet zu erkennen war, hätten Le Verrier's Arbeiten ihr Ziel nicht gerade um das Jahr 1846, wo die von ihm supponirte Bahn Neptuns mit der wirklichen zusammentraf, erreicht, so würden die glänzenden Entdeckungen, welche sich an diese Namen knüpfen, wahrscheinlich auf lange Zeit verschoben worden sein; Bradley und W. Herschel bemühten sich umsonst die Parallaxe der Fixsterne zu finden, allein die grossen Arbeiten, welche sie zu diesem Zwecke unternommen, wurden gekrönt durch die unerwarteten Entdeckungen der Aberration des Lichtes und planetarischer Sonnen. Wem aber ein astronomischer Fund von auch nur einiger Erheblichkeit gelang, der mag sich der sorglichsten Theilnahme versichert halten und darf das Unbeachtetbleiben nicht fürchten, das ihm vielleicht in anderen Wissenschaften droht; denn nirgend sonst ist die Gemeinsamkeit aller Leute vom Fache an Arbeiten jeder Art so eingebürgert. Die Gefahr im Verzuge auf der einen, die Möglichkeit, dasselbe Object von tausend Orten zugleich zu untersuchen, auf der anderen Seite, setzen in der Astronomie immer eine Hemisphäre auf die Fährte alles Neuen.

Zum Schlusse dieser Darlegungen sei mir gestattet den Wunsch auszusprechen, dass, wenn dermaleinst mein heutiges Thema wieder aufgenommen werden sollte, man nicht wie jetzt nur englische Namen in überwiegender Zahl zu nennen, dass man insbesondere auf österreichischem Boden statt der schönen, vor kurzem leider sämmtlich eingegangenen Privatsternwarten zu Olmütz, Senftenberg und Bicske reichen Ersatz anzuführen habe. Wenden Sie nicht ein, dass die Zeit zu ernst für solchen Mahnruf sei. Die Wissenschaft ist eine Zufluchtsstätte, in der die Geister sich erholen, erstarken können zum Kampfe des Lebens; gerade die Sturm- und Drangperioden weisen oft die wichtigsten Errungenschaften menschlicher Erkenntniss auf.

XIII.

Neuer Vorschlag zur Aufsuchung des Luftwiderstandsgesetzes.

Von

Herrn *Brenner*,

Lehramts-Candidaten für höhere Mathematik und Mechanik zu Tuttlingen im Königreich Würtemberg.

Es ist befremdend, dass, in Betracht der gleichförmigen Vertheilung der atmosphärischen Luft in einer so kleinen Region und in der kurzen Zeit, wie sie unsere geworfenen Projektile in Anspruch nehmen, bis jetzt noch nicht das wahre Luftwiderstandsgesetz hat entdeckt werden können. Bei der Wichtigkeit der Sache hat es an vielfältigen Versuchen zur Auffindung dieses Gesetzes allerdings nicht gefehlt; allein alle Bemühungen waren bis jetzt fruchtlos.

Diese Versuche aber theilen sich von selbst in zwei Gattungen, nämlich in rein analytische und empirische. Die erstern gehen zwar wohl davon aus, dass dem Projektil unaufhörlich eine Masse — die Luft — im Wege steht; allein es wird hier öfter nicht einmal die Elasticität der Luft in Betrachtung gezogen, oder nicht die Art und Weise, wie die ausweichende Luft auf die vorwärts und seitwärts liegenden Luftschichten einen Druck ausübt, wovon offenbar der Gegendruck auf das Projektil abhängt. Wohl wird auch eine verdichtete Luftmasse vor dem Projektil und eine verdünnte hinter demselben angenommen, wobei es sich darum handelt, auf welche Weise, oder in welcher Gradation sich diese Verdichtung und Verdünnung vertheilt, wie weit sich dieselbe erstreckt etc. Diese, offenbar richtigere Behandlung der Sache hat aber ihre bedeutenden Schwierigkeiten und hat dess-

wegen gleichfalls nicht zum gewünschten Ziele geführt. Aus diesem Grunde sind daher auch zahlreiche empirische Wege eingeschlagen worden. Alle jedoch leiden an dem Uebelstande, dass das Projektil stets mit einer Maschinerie oder überhaupt mit andern festen Körpern in Verbindung steht, wodurch bei dieser subtilen Frage die Bewegungen so alterirt werden, dass das gesuchte Gesetz nicht zu Tage treten kann. Gleichwohl scheint der empirische Weg der sicherste zu sein, und der einzig richtige ist nur der, wo das Projektil in seiner Bewegung gänzlich unabhängig bleibt von der Berührung mit festen Körpern, und so werden wir entweder auf den Wurf oder auf den freien Fall geführt. Der Wurf aber ist schon darum verwerflich, weil hiebei der erste Impuls, dessen genaue Bestimmung sehr unsicher ist, in Rechnung gezogen werden muss. Somit bleibt uns nur noch der freie Fall übrig.

Kein in freier Bewegung befindlicher Körper lässt die Lage seiner Oberfläche gegen die Bewegungsrichtung gänzlich unverändert, und diese im Voraus nicht genau zu bestimmende Rotation modificirt die Widerstandskraft der Luft im Allgemeinen wesentlich. Hievon macht allein die Kugel eine Ausnahme, und so sind wir gezwungen, unsere Untersuchungen rein auf die Kugel zu beschränken. Doch ist es ein Trost, dass gerade dieser specielle Fall der wichtigste und derjenige ist, der in der Ballistik zum Vorschein kommt.

Der Luftwiderstand ist eine Funktion der Geschwindigkeit des Projektils; allein die Beobachtung der Geschwindigkeit ist, wo nicht geradezu unmöglich, doch jedenfalls sehr unsicher. Hingegen sind Zeit und Raum, aus denen sich Kraft und Geschwindigkeit ableiten lassen, einer sehr scharfen Bestimmung fähig, und es handelt sich jetzt nur darum, wie die erforderlichen Experimente am zweckmässigsten veranstaltet werden.

Bei dem Umstande, dass der Luftwiderstand bei geringer Fallhöhe und bei bedeutender Dichtigkeit des Projektils ziemlich oder doch so gering ist, dass die Sicherheit des Resultates dadurch gefährdet ist, können wir, da wir nie über grosse Fallhöhen gebieten können, bloss die Dichtigkeit vermindern, und am besten ist es wohl, eine sehr genaue Hohlkugel von dünnem Blech und entsprechender Grösse anzufertigen, sie von verschiedenen Höhen, bis zu ansehnlicher Thurmhöhe, fallen zu lassen, und sowohl Fallzeit als Fallhöhe genau zu beobachten und aufzuzeichnen. Jede Beobachtung werde mehrmals wiederholt und bei etwa sich ergebenden Differenzen das Mittel genommen. Die Fallzeit müsste

durch zwei genaue, vermittelst der Elektricität vollkommen gleich regulirte Chronometer, die in der Nähe des Abgangs- und Auffallpunktes aufzustellen wären, beobachtet werden; und würde der Zeitpunkt des Auffallens zwischen die zwei Grenzpunkte einer Sekunde fallen, so könnte man den Fallraum so lange vermindern oder vergrössern, bis ein Klappen auf einen Grenzpunkt der Zeit erfolgte. Die Kugel selbst werde vermittelst eines Fallnetzes von Drath mit möglichst weiten Litzen oder Vierecken aufgefangen, um nicht beschädigt zu werden. Zu genauer Herbeiführung des Zusammentreffens des Abgangspunktes mit einem Sekundenanfang könnte folgender Apparat dienen. *AB* (Taf. II. Fig. 1.) ist ein auf einem anzuschraubenden Fuss stehender vertikaler Ständer mit einem Schlitz am Ende *B*. In diesen Schlitz passt ein Träger *CG*, durch welchen sammt den Schenkeln des Schlitzes ein eiserner Bolzen geht, um welchen der Träger drehbar ist. In das Ende *G* des Trägers ist ein etwas starker Drath *GD* gesteckt, der einen Drathkreis *D* trägt. Vermittelst der Feder *F* wird der Träger in horizontaler Richtung gehalten. Auf den Drathring *D* aber wird die Fallkugel *E* gelegt. Indem man nun den Sekundenzeiger des Chronometers beobachtet, übe man sich, im Moment eines Sekundenanfangs den Träger durch einen unter *C* nach aufwärts geführten Hammerschlag plötzlich nach unten zu bringen, so dass der Drathring *D* schnell unter der Kugel weggeht, ohne den Anfang des freien Falles im mindesten zu alteriren. Der Beobachter am Falltuch wird sich ebenfalls einüben müssen, um den Moment des Auffallens der Kugel genau bestimmen zu können.

Setzen wir nun den Fallraum $= s$ und die Zeit in Sekunden $= t$, so können wir aufstellen

$$s = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 + et^5 + \ldots.$$

Jede Beobachtung gibt einen Fallraum

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4 \ldots.$$

mit der zugehörigen Zeit

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4 \ldots.,$$

wodurch sich die Constanten a, b, c, d, $e \ldots$, bestimmen. Dabei ist zu vermuthen, dass diese Coefficienten rasch abnehmen, worauf sich eine Methode zu ihrer Bestimmung gründen lässt.

Setzen wir nun die Geschwindigkeit $= v$, die retardirende Kraft $= \varphi$ und die Gravitation der Erde $= g$, so ist

$$v = \frac{ds}{dt} = a + 2bt + 3ct^2 + 4dt^3 + 5et^4 + \ldots,$$

$$g - \varphi = \frac{dv}{dt} = 2b + 6ct + 12dt^2 + 20et^3 + \ldots$$

Wir müssen annehmen, dass v mit t zugleich gleich Null ist, und so ist $a = 0$ zu setzen. Da wir ferner wissen, dass im Anfang der Bewegung, von wo an wir die Zeit t zählen, $\varphi = 0$ ist, so ist

$$g = 2b \quad \text{und} \quad b = \frac{g}{2}.$$

Dadurch verwandeln sich unsere drei Gleichungen in

$$s = \frac{g}{2}t^2 + ct^3 + dt^4 + et^5 + \ldots,$$

$$v = gt + 3ct^2 + 4dt^3 + 5et^4 + \ldots,$$

$$\varphi = -6ct - 12dt^2 - 20et^3 + \ldots;$$

wofür wir aber nunmehr annehmen:

1) $$s = \frac{g}{2}t^2 + at^3 + bt^4 + ct^5 + dt^6 + \ldots,$$

2) $$v = gt + 3at^2 + 4bt^3 + 5ct^4 + 6dt^5 + \ldots,$$

3) $$\varphi = -6at - 12bt^2 - 20ct^3 - 30dt^4 + \ldots$$

Will man nun die Kraft φ als eine Funktion von v darstellen, so eliminire man t zwischen 2) und 3), oder besser, man setze:

$$\varphi = Av + Bv^2 + Cv^3 + Dv^4 + \ldots,$$

ersetze hier φ und v durch ihre Werthe aus 2) und 3), setze, da alsdann eine identische Gleichung zum Vorschein kommen muss, alle Coefficienten der verschiedenen Potenzen von t gleich 0, wodurch sich A, B, C, D.... bestimmen. Nachdem daher die Beobachtungen gemacht und notirt sind, so theilt sich das Geschäft des Calculs in die Bestimmung der Coefficienten

a, b, c, d, e.... und der Coefficienten
A, B, C, D, E....,

womit sich noch die Vermuthung der etwaigen geschlossenen Form der Funktion des Luftwiderstandes verbinden mag, nebst einigen praktischen Schlussbemerkungen.

1. Bestimmung der Coefficienten a, b, c, d....

Indem wir unserer oben ausgesprochenen Vermuthung Raum geben, so führen wir unsern Calcul in der Hypothese, dass die Coefficienten a, b, c, d.... eine fallende Reihe bilden. Bietet hierauf dieser Calcul keine Widersprüche dar, so ist die Hypothese richtig, im entgegengesetzten Falle aber unrichtig.

Noch nie ist es beobachtet worden, dass ein Körper, der schwerer ist, als die atmosphärische Luft, bei Windstille nach einigem Fallen wieder gestiegen wäre. Daraus folgt, dass $\bar{v}$ stets nur positiv sein kann und auch nie durch Null gehen wird. Gleicherweise kann auch φ nur positiv sein. Da jedoch das Zeichen von φ vom Zeichen von c abhängt, so ist ersichtlich, dass c nur negativ sein wird. Im Uebrigen möchte der beste Weg zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, d.... der folgende sein.

Man richte die Beobachtungen so ein, dass die erste gilt für $t_1 = 1$ Sekunde; die zweite für $t_2 = 2$ Sekunden u. s. w. Alsdann hat man aus 1) folgende Gleichungen:

$$s_1 - \tfrac{1}{2}g = a + b + c + d + \ldots, \tag{4}$$

$$s_2 - 2g = 8a + 16b + 32c + 64d + \ldots, \tag{5}$$

$$s_3 - 4\tfrac{1}{2}g = 27a + 81b + 243c + 729d + \ldots, \tag{6}$$

$$s_4 - 8g = 64a + 256b + 1024c + 4096d + \ldots \tag{7}$$

. . . .

Bricht man nun die Reihen der rechten Seiten gerade so ab, wie sie stehen, und multiplicirt die Gleichung 4) nach einander mit 8, 27, 64, so hat man:

$$8s_1 - 4g = 8a + 8b + 8c + 8d,$$

$$27s_2 - 13\tfrac{1}{2}g = 27a + 27b + 27c + 27d,$$

$$64s_3 - 32g = 64a + 64b + 64c + 64d.$$

Zieht man jetzt diese letzteren Gleichungen nach einander von 5) 6) und 7) ab, so ergibt sich:

$$s_2 - 8s_1 + 2g = 8b + 24c + 56d,$$

$$s_3 - 27s_2 + 9g = 54b + 216c + 702d,$$

$$s_4 - 64s_3 + 24g = 192b + 960c + 4032d;$$



woraus man b, c und d nach den bekannten allgemeinen Formeln für drei Unbekannte bestimmen wird. Zuletzt ergibt sich dann a leicht aus 4). Ihre Werthe seien a_1, b_1, c_1, d_1.

Um sodann eine weitere Constante e zu bestimmen und die erst erhaltenen zu corrigiren, so denken wir uns, a_1, b_1, c_1 und d_1 erhalten die Zuwachse α, β, γ, δ und ziehen hierauf von den auf den rechten Seiten auf fünf Glieder gebrachten Gleichungen 4), 5), 6) und 7) der Ordnung nach je diejenigen ab, die nur vier Glieder haben und in denen wir uns a, b, c und d die Werthe a_1, b_1, c_1 und d_1 habend denken. Hiedurch erhalten wir dann:

$$0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + e,$$
$$0 = 8\alpha + 16\beta + 32\gamma + 64\delta + 128e,$$
$$0 = 27\alpha + 81\beta + 243\gamma + 729\delta + 2187e,$$
$$0 = 64\alpha + 256\beta + 1024\gamma + 4096\delta + 16384e.$$

Dividiren wir jede durch e, setzen $\frac{\alpha}{e} = \alpha_1$, $\frac{\beta}{e} = \beta_1$, u. s. w. und vereinfachen noch, so erhalten wir:

$$0 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 + 1,$$
$$0 = \alpha_1 + 2\beta_1 + 4\gamma_1 + 8\delta_1 + 16,$$
$$0 = \alpha_1 + 3\beta_1 + 9\gamma_1 + 27\delta_1 + 81,$$
$$0 = \alpha_1 + 4\beta_1 + 16\gamma_1 + 64\delta_1 + 256,$$

welche sehr leicht aufgelöst werden können. Denn man ziehe jede vorhergehende von der nachfolgenden ab, wodurch sich drei Gleichungen mit drei Unbekannten ergeben. Von diesen drei Gleichungen ziehe man wieder je die vorhergehende von der nachfolgenden ab und hat dann zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die uneinsletzte aber ziehe man endlich von der letzten ab, wodurch sich δ_1 ergibt, und rückwärts gehend auch α_1, β_1 und γ_1. Auf solche Weise findet sich:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 24 \\ \beta_1 &= -50 \\ \gamma_1 &= 35 \\ \delta_1 &= -10 \end{aligned}\right\} \text{ und sodann } \begin{aligned} \alpha &= 24e \\ \beta &= -50e, \\ \gamma &= 35e, \\ \delta &= 10e. \end{aligned}$$

Bilden wir nun die nächste Gleichung:

$$s_5 - 12\tfrac{1}{2}g = 5^3a + 5^4b + 5^5c + 5^6d + 5^7e,$$

so haben wir, $a = a_1 + \alpha$, $b = b_1 + \beta$, u. s. w. setzend,

$$s_5 - 12\tfrac{1}{2}g = 5^3(a_1 + 24e) + 5^4(b_1 - 50e) + 5^5(c_1 + 35e) + 5^6(d_1 - 10e) + 5^7 e,$$

welches gibt:

$$e = \frac{s_5 - 12\tfrac{1}{2}g - 5^3 a_1 - 5^4 b_1 - 5^5 c_1 - 5^6 d_1}{5^3 . 24}.$$

Zum Behuf der Bestimmung des Coefficienten f und der Correktion der vorangegangenen Constanten, schlagen wir durchaus dasselbe Verfahren ein und finden, wenn wir die neuen Correktionen durch α, β, γ, δ und ε bezeichnen:

$$\alpha = -15f,$$
$$\beta = +85f,$$
$$\gamma = -225f,$$
$$\delta = +274f,$$
$$\varepsilon = -120f,$$

woraus sich durch Uebergang zur nächsten Gleichung ergibt:

$$f = \frac{s_6 - 18g - 6^3(a_1 + 6b_1 + 6^2 c_1 + 6^3 d_1 + 6^4 e_1)}{-6^3 . 96165},$$

wofern wir die durch die erste Correktion erhaltenen Werthe von a, b, c.... aufs Neue durch a_1, b_1, c_1.... bezeichnen. Auf gleiche Weise fährt man fort, die nächsten Coefficienten g, h.... und die Correktionen der vorangegangenen Coefficienten zu bestimmen.

Anstatt diese Coefficienten je durch die vorangegangenen genäherten Werthe a_1, b_1, c_1 u. s. w. darzustellen, könnten wir dieselben auch rein in Funktion von den verschiedenen Werthen von s und von g darstellen. Allein die auseinandergesetzte Methode scheint zweckmässiger zu sein, weil hier immer die Correktionen α, β, γ.... zum Vorschein kommen, welche endlich die Grenze anzeigen, bei der man abbrechen kann.

2. Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D....

Nachdem auf solche Weise die Constanten a, b, c, d.... bestimmt sind, so finden sich die Coefficienten A, B, C, D...., dadurch, dass man in die Gleichung

$$6at + 12bt^2 + 20ct^3 + 30dt^4 + 42et^5 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + Av + Bv^2 + Cv^3 + Dv^4 + Ev^5 + \ldots\ldots = 0$$

statt v den Werth $gt + 3at^2 + 4bt^3 + 5ct^4 + 6dt^5 + \ldots\ldots$ einsetzt, und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von t gleich Null setzt. Dadurch erhält man:

$$6a+gA=0,$$

$$12b+3aA+Bg^2=0,$$

$$20c+4bA+6gaB+g^3C=0,$$

$$30d+5cA+ga^2B+8gbB+9g^2aC+g^4D=0,$$

$$42e+6dA+10gcB+24baB+12g^2bC+27ga^2C+12ga^3D+g^5E=0,$$

. . . .

woraus sich ergibt:

$$A=-\frac{6a}{g},$$

$$B=-\frac{12b+3aA}{g^2},$$

$$C=-\frac{20c+4bA+6gaB}{g^3},$$

$$D=-\frac{30d+5cA+B(ga^2+8gb)+9g^2aC}{g^4},$$

$$E=-\frac{42e+6dA+B(10gc+24ba)+C(12g^2b+27ga^2)+12g^3aD}{g^5},$$

. . . .

3. Hypothesen über die geschlossene Form der Funktion des Luftwiderstandes.

Man darf wohl annehmen, dass es bei den Betrachtungen über den Luftwiderstand einerlei ist, ob sich die Luft gegen einen festen und ruhigen Gegenstand, oder ob sich der feste Körper in der ruhigen Luft bewegt. Nun kann man häufig die Beobachtung machen, dass ein selbst gleichmässiger Windzug Baumäste, Zweige, Blätter in eine Art von vibrirender Bewegung versetzt. Selbst das unelastische fliessende Wasser bringt einhängende Baumzweige in eine solche Bewegung. Dieselbe Bemerkung kann man machen, wenn man den Widerstand des ruhigen Wassers auf eine bewegte Kugel bestimmen will. Ueberhaupt sind vibrirende Bewegungen weit häufiger, als man es gewöhnlich dafür hält. Aufmerksame Artilleristen behaupten sogar, dass eine auf einem ebenen, baum- und häuserlosen Terrain abgeschossene Kanonenkugel grösseren Kalibers anfänglich eine Art ungleichmässigen Geräusches, ähnlich einem rollenden Donner, hervor-

bringe, ein Donner, der von dem ersten Knall ganz unabhängig ist. Diess lässt auf einen abwechselnd stärker und schwächer werdenden Luftwiderstand schliessen, so dass die Vermuthung nahe liegt, der Luftwiderstand möchte vibrirend sein. Ohne Zweifel aber bleibt der Haupttheil des Luftwiderstandes das Produkt einer Constante mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, und so liesse sich vielleicht setzen:

$$\varphi = mv^2 + n \sin \psi(v)$$

oder

$$\varphi = mv^2 + nv \sin \psi(v)$$

oder

$$\varphi = mv + v^2(m + n \sin \psi(v))$$

u. s. w.

wo

$$\psi(v) = p + qv + rv^2 + sv^3 + \text{u. s. w.}$$

Die Bemerkung, dass bei geringerer Geschwindigkeit sich nichts von vibrirendem Widerstand zeigt, widerspricht diesen Formeln nicht. Denn gesetzt, es sei n ein sehr kleiner Coefficient, so können die Glieder

$$n \sin \psi(v) \text{ und namentlich } nv \sin \psi(v),\ nv^2 \sin \psi(v)$$

bei geringerer Geschwindigkeit unmerklich sein, bei grösseren jedoch sich fühlbar machen.

Es wäre möglich, schon nach geringer Mühe, vielleicht aber auch erst bei grosser Anstrengung eine geschlossene Form aufzufinden. Eine später folgende Bemerkung möchte einige Erleichterung verschaffen.

4. Schlussbemerkungen.

a) Da der absolute Luftwiderstand unter anderm auch von der Luftdichtigkeit abhängt, so ist es nothwendig, die Beobachtungen bei möglichst gleichem Barometer- und Thermometerstand, also in möglichst kurzer Zeit abzuschliessen, und sie daher etwa zur Herbstzeit bei trockener Witterung Nachts von 9—12 Uhr vorzunehmen.

b) Indem jeder Luftzug abzuhalten ist, so wähle man als Ort der Beobachtung einen derartig hohlen und jedenfalls möglichst hohen Thurm, dass man in demselben einen Körper frei fallen lassen kann, wobei natürlich alle Oeffnungen zu verschliessen sind. Um die Fallhöhen in möglichst kurzer Zeit abzumes-

sen, kann man schon vor Beginn der Experimente die Thurmwand mit Theilstrichen von fünf zu fünf Fuss versehen, so dass man mit einem Massstab von fünf Fuss die jeweilige Fallhöhe vollends schnell abmessen kann.

c) Besser möchte es sein, an der Wandung des Thurmes einen etwa vier Zoll starken Rahmschenkel die ganze Höhe hindurch zu befestigen, den man von Fuss zu Fuss mit Theilstrichen versehen könnte. In diesem Falle wäre der Ständer AB entbehrlich, und könnte mittelst einer Stellschraube — wie bei Nähkissen — eine Vorrichtung an den Rahmschenkel befestigt werden, die denselben Arm CD trüge. Eine Leiter, die man auf den vorhandenen Böden oder Ruhebänken aufstellte und an der man auf- und absteigen könnte, würde dazu dienen, die Vorrichtung an die verschiedensten Stellen des Rahmschenkels hinzubringen. Ueberhaupt aber wird die Oertlichkeit dieses Verfahren immerhin modificiren.

d) Bewegte sich die Kugel zu nahe an einer Wand, welche der in Bewegung gesetzten Luftmasse theilweise ein Hinderniss in den Weg zu legen im Stande wäre, so müsste dieser Umstand ein gutes Resultat in Frage stellen. Am schädlichsten aber müsste der Durchlass durch einen Boden wirken, wenn die Ränder dieses Durchlasses nicht weit genug zurückträten. Ueberhaupt ist ein nach unten sich erweiternder und in seiner Abgrenzung möglichst glatter Raum am günstigsten. Es fragt sich nun bloss, ob es der Kosten nicht werth wäre, eine zweihundert Fuss hohe hölzerne mit Brettern beschaalte Pyramide oder Kegel in der Nähe eines Thurmes oder zwischen hohen Gebäuden aufzuführen, und seine Befestigung durch Verkettung an die hohe Umgebung zu bewerkstelligen! Das Auf- und Niedersteigen könnte vermittelst Leitern an der Aussenseite geschehen und die Verbindung mit dem Innern durch angebrachte Oeffnungen herbeigeführt werden.

e) Ohne Zweifel verhält sich der Widerstand, den eine Kugel erfährt, direkt wie das Quadrat ihres Durchmessers und umgekehrt wie die Masse oder das Gewicht, wie diess alle Physiker beweisen. Um jedoch auch diesen Satz empirisch zu bestätigen und überhaupt über eine grössere Anzahl von Beobachtungen gebieten zu können, ist es gut, die Experimente mit zwei Kugeln vorzunehmen, und zuletzt die Coefficienten des Widerstandes mit einander zu vergleichen. Gesetzt, die Coefficienten der zweiten Kugel seien A_1, B_1, C_1, ..., welche den Coefficienten A, B, C.... der ersten entsprechen, die entsprechenden Durchmesser aber D_1 und D, die Gewichte G_1 und G, so müsste sein:

$$\frac{AG}{D^2} = \frac{A_1 G_1}{D_1^{\,2}},$$

$$\frac{BG}{D^2} = \frac{B_1 G_1}{D_1^{\,2}},$$

$$\frac{CG}{D^2} = \frac{C_1 G_1}{D_1^{\,2}},$$

$$\cdots\cdots$$

woraus noch folgt

$$A : A_1 = B : B_1 = C : C_1 \ldots.$$

wofern die Beobachtungen unter übrigens gleichen Umständen, und also namentlich bei gleichem Barometer- und Thermometerstand gemacht worden sind.

Die Proportionalität der obigen Coefficienten wird zugleich die Schärfe der Beobachtungen controliren. Zeigen sich aber Abweichungen von solcher Grösse, dass man annehmen darf, sie fallen ausserhalb der gewöhnlichen Beobachtungsfehler, so ist zu vermuthen, dass sich die Kugeln in ihrem Falle zu nahe der betreffenden Wandungen befanden. Ist es daher nicht möglich, diese Entfernung zu vergrössern, oder eine besondere Pyramide zu erbauen, so suche man eine andere Oertlichkeit auf, oder verkleinere man die Kugeln, so dass die in Bewegung gesetzten Luftmassen die Wandungen nicht mehr berühren.

Die Gleichungen

$$\frac{AG}{D^2} = \frac{A_1 G_1}{D_1^{\,2}}, \text{ u. s. w.}$$

möchten im Stande sein, die Aufsuchung der vielleicht geschlossenen Form der gesuchten Funktion zu erleichtern. Denn daraus folgt, dass das Gesetz des Luftwiderstandes noch dasselbe bleiben muss, wenn man statt

$$\varphi = Av + Bv^2 + Cv^3 + Dv^4 + \ldots.$$

setzt:

$$\varphi = \frac{A}{M}v + \frac{B}{M}v^2 + \frac{C}{M}v^3 + \frac{D}{M}v^4 + \ldots.$$

oder

$$\varphi = v + \frac{B}{A}v^2 + \frac{C}{A}v^3 + \frac{D}{A}v^4 + \ldots.$$

oder

$$\varphi = \frac{A}{B}v + v^2 + \frac{C}{B}v^3 + \frac{D}{B}v^4 + \ldots.$$

oder

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

f) Das Schwierigste möchte die Anfertigung sehr genauer Kugeln sein. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass es nicht als nothwendig erscheint, dass Schwerpunkt und geometrischer Mittelpunkt vollkommen genau zusammentreffen. Durch Schwimmenlassen der Kugeln im Wasser könnte man leicht auf der Oberfläche einen Punkt bezeichnen, welcher mit dem Mittelpunkt und Schwerpunkt in einer geraden Linie liegt. Bringt man hierauf den bezeichneten Punkt der Oberfläche stets oben hin, so ist man versichert, dass der Schwerpunkt am tiefsten liegt und dass beim Fall keine Drehung vorkommen kann. Und gesetzt sogar, die Kugel drehte sich und würde dadurch von ihrer Richtung etwas abgelenkt, so würde solche Ablenkung die Fallzeit und Fallhöhe um eine Grösse ändern, die man mit dem Wachsthum des Cosinus eines sehr kleinen Winkels vergleichen könnte, wofern dieser kleine Winkel selbst um eine sehr kleine Grösse gewachsen wäre.

g) Anlangend die Dimensionen und das Gewicht der Kugeln, so lässt sich hier nichts Bestimmtes aufstellen. Jedenfalls sollten sich die Durchmesser in dem Rahmen von $^1/_2$ bis 1 Schuh bewegen und das Gewicht derartig sein, dass durch den Luftwiderstand in der ersten Secunde eine Retardation von 1 bis 2 Schuh herbeigeführt würde, so dass statt $15^1/_3$ Par. F. nur deren 13 oder 14 durchlaufen würden. Allein, bevor man kostspielige Proben anstellt, könnte man etwa durch einen Kupferschmied eine ungefähre, getriebene Kupferkugel anfertigen lassen, versehen mit einer kleinen verschliessbaren Oeffnung. Vermittelst verschiedener Gewichte, die man durch die Oeffnung in die Kugel einlegte, könnte man endlich das richtige Gewicht erfahren, um nach demselben die Fallkugel anfertigen zu lassen. Gesetzt, es sei dieses Gewicht $= G$ Pfunde und es wiege ein Cubikzoll des anzuwendenden Metalls g Pfunde; ferner sei der äussere Halbmesser der Kugel $= r$ Zolle und der innere $= x$, so ist

$$\tfrac{4}{3}\pi g(r^3 - x^3) = G,$$

woraus folgt

$$x = \sqrt[3]{r^3 - \frac{3G}{4\pi g}}.$$

h) Man könnte vielleicht die Probe machen wollen, vermittelst eines am Hebel CG angebrachten Drathzuges den Gebrauch zweier Chronometer auf den eines einzigen zu reduciren. Allein hierauf ist nichts zu halten, da der Anzug des Drathes — zumal wenn er lang ist — kein präcises Abkommen der Kugel herbeiführen kann. Besser ist ein Hammerschlag an C aufwärts, am besten aber ein solcher über F oder G abwärts.

XIV.

Lehrsatz über den Flächeninhalt eines geraden Cylindermantels, welcher von einem andern senkrecht geschnitten wird.

Von
Herrn *Eugen Lommel*
in Mannheim.

Wenn die Axen zweier ungleichen geraden Kreiscylinder sich rechtwinklig durchschneiden, so ist der im dickeren Cylinder eingeschlossene Theil der Mantelfläche des dünneren Cylinders gleich der Mantelfläche eines schiefen Cylinders, welcher den kreisförmigen Querschnitt des dünneren Cylinders zur Basis, den Durchmesser des dickeren Cylinders zur Seitenlänge, und zur Höhe die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks hat, dessen andere Kathete und Hypotenuse beziehlich die Durchmesser des dünneren und dickeren Cylinders sind.

Beweis. Legt man durch jede der beiden in O (Taf. II. Fig. 2.) sich rechtwinklig durchkreuzenden Cylinderaxen OZ und OX eine Ebene senkrecht zur andern, so werden dieselben sich in der zu OZ und OX senkrechten Geraden OYV durchschneiden und die kreisförmigen Querschnitte ZV und XY des dickeren und des dünneren Cylinders enthalten. Durch einen beliebigen Punkt M des Kreises XY ziehe man MP parallel und gleich dem Halbmesser OX, lege durch ihren Endpunkt PM' parallel zu OZ (also senkrecht zur Ebene XOY) und mache $MM' = OZ =$ dem Halbmesser des dickeren Cylinders, so ist PM' die Höhe und MM' eine Seitenlinie des oben erwähnten schiefen Cylinders, während der bis zur Kreislinie ZV verlängerte Durchschnitt der Ebene

$M'MP$ mit der Ebene ZOV, d. h. die Gerade NL, der Seitenlinie des dünneren Cylinders gleich ist, welche sich im Punkte M seines Querschnitts bis zur Oberfläche des dickeren Cylinders erhebt. Da die aus P auf die Tangente MK gefällte Senkrechte dem Radius OM parallel, und desswegen Winkel MPK gleich Winkel OMN ist, so sind die bei K und N rechtwinkligen Dreiecke MKP und ONM einander congruent. Folglich ist $MK=ON$ und Dreieck MKM' congruent Dreieck ONL, weil ihre Winkel bei K und N Rechte, ihre Hypotenusen MM' und OL, und ihre Katheten MK und ON einander gleich sind; also ist auch $KM' = NL$. Ist aber M der Mittelpunkt eines Bogens, der klein genug ist, um als geradlinig betrachtet werden zu können (d. h. eines „unendlich kleinen" Bogens) und zieht man von seinen Endpunkten parallel OZ zwei Seitenlinien des dünneren Cylinders bis zur Oberfläche des dickeren, so enthalten diese zwischen sich einen schmalen trapezförmigen Streifen der Mantelfläche, dessen Inhalt gleich ist demjenigen eines Rechtecks aus dem kleinen Bogen und der Mittellinie NL des Trapezes; zieht man ferner durch die Endpunkte desselben kleinen Bogens parallel und gleich MM' zwei Seitenlinien des schiefen Cylinders, so ist das zwischen ihnen enthaltene schmale Parallelogramm, welches $M'K = NL$ zur Höhe und den kleinen Bogen zur Grundlinie hat, dem über demselben Bogen stehenden Streifen des geraden Cylinders an Inhalt gleich. Dann ist aber auch die Summe aller Streifen des geraden Cylinders, welche einem beliebig grossen Bogen des Kreises XY angehören, d. h. das auf diesem Bogen stehende Stück der geraden Mantelfläche, dem entsprechenden Stücke der schiefen Cylinderfläche gleich; folglich auch der vom ganzen Kreis XY bis zur Oberfläche des dickeren Cylinders emporreichende gerade Cylindermantel gleich der schiefen, über demselben Kreis sich erhebenden Cylinderfläche. Da nun die beiden eben genannten Cylindermäntel die Hälften derjenigen sind, von welchen der Lehrsatz handelt, so ist die Behauptung desselben vollkommen erwiesen.

Der eben bewiesene Lehrsatz gilt auch dann noch, wenn die beiden sich durchdringenden Cylinder einander gleich sind. Der schiefe Cylinder fällt jetzt mit seinen beiden kreisförmigen Endflächen und allen seinen Seitenlinien in die Ebene XOY, und seine Mantelfläche besteht jetzt aus zwei ebenen, von geraden Linien und Halbkreisen begrenzten Figuren, deren jede dem Quadrate des Durchmessers an Inhalt gleich ist.

Wendet man auf den schiefen Cylinder unseres Lehrsatzes ein von Brinkley (Irish transact. IX. 1803. A theorem for finding the surface of an oblique cylinder) aufgestelltes und

leicht zu beweisendes Theorem *) an, wodurch die Mantelfläche eines schiefen Cylinders mit kreisförmiger Basis auf die Mantelfläche eines geraden Cylinders zurückgeführt wird, welcher den Durchmesser jenes Kreises zur Höhe, und dessen elliptische Basis die Seitenlänge und die Höhe des schiefen Cylinders zu Axen hat; so erkennt man unmittelbar die Wahrheit des folgenden

Zusatzes. Wenn die Axen zweier ungleichen geraden Kreiscylinder sich rechtwinklig durchschneiden, so ist der im dickeren Cylinder eingeschlossene Theil der Mantelfläche des dünneren Cylinders gleich der Mantelfläche eines geraden Cylinders, der den Durchmesser des dünneren Cylinders zur Höhe, und dessen elliptische Basis den Radius des dickeren Cylinders zur grossen Halbaxe und den Radius des dünneren Cylinders zur Excentricität hat.

XV.

Zur Theorie der Gleichungen.

Von

Herrn *Johann Karl Becker*,
Privatlehrer in Zürich.

I.

Herr Baurath Dr. Scheffler hat die Algebra unter anderm um eine einfache Formel bereichert **), vermittelst der man, wenn eine Wurzel einer Gleichung vom dritten Grade gefunden, sofort auch die beiden andern erhalten kann.

Heisst nämlich die Gleichung, deren eine Wurzel r gefunden,

*) Mit seinem Beweise mitgetheilt von mir im Archiv. Theil X. Seite 222. G.

**) Die Auflösung der algebraischen und transzendenten Gleichungen etc. von Dr. Hermann Scheffler. Braunschweig 1859. Siehe pag. 92. und 93.

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

so hat man für die beiden andern:

$$x = -\frac{r + a_1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r + a_1}{2}\right)^2 + \frac{a_3}{r}}. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Da diese Formel sowohl von praktischem Werthe, indem sie schneller zum Ziele führt, als die Division durch $x - r$ nach der gewöhnlichen Methode, als auch von wissenschaftlichem Interesse ist, so möchte auch die folgende höchst einfache Herleitung derselben einiger Beachtung werth sein, um so mehr, da Herr Dr. Scheffler sie auf grossem Umwege gefunden hat, während der näherliegende, viel kürzere Weg ihm entgangen zu sein scheint.

Wird $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ durch $x - r$ dividirt, so erhält man einen Quotienten von der Form: $x^2 + px + q$, in welchem p und q zu bestimmen sind. Da nun $-p$ die Summe und q das Product der Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, also der zu suchenden der Gleichung (1), so hat man unmittelbar:

$$-p + r = -a_1,$$
$$qr = -a_3;$$

also:

$$p = r + a_1,$$
$$q = -\frac{a_3}{r}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

ein, so erhält man als deren Auflösung die Formel (2), so dass dieselbe nun, ohne zu weit zu führen, in die Elemente der Algebra aufgenommen werden kann.

II.

Wenn man von der Gleichung vom 4ten Grade

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zwei Wurzeln r_1 und r_2, die entweder reelle oder conjugirte complexe Wurzeln sein können, kennt, so ergeben sich die beiden andern aus der Formel:

$$x = -\frac{a_1 + r_1 + r_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 + r_1 + r_2}{2}\right)^2 - \frac{a_4}{r_1 r_2}}. \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Coefficienten p und q der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

deren Wurzeln die Formel (4) darstellt, gibt nämlich wieder die Theorie der Gleichungen:

$$-a_1 = -p + r_1 + r_2,$$

$$a_4 = qr_1r_2;$$

also:

$$p = a_1 + r_1 + r_2,$$

$$q = \frac{a_4}{r_1r_2}.$$

Man kann leicht ähnliche Formeln für die beiden letzten Wurzeln jeder beliebigen Gleichung höheren Grades herleiten, deren übrige Wurzeln bekannt sind. Wenn r_1, r_2, r_3, ... r_{n-2} die bekannten Wurzeln der Gleichung vom $n$ten Grade

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad \dots\dots \quad (5)$$

sind, so erhält man die beiden andern aus der Formel:

$$x = \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

$$-\frac{a_1 + r_1 + r_2 + \dots + r_{n-2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1 + r_1 + r_2 + \dots + r_{n-2}}{2}\right)^2 \pm \frac{a_n}{r_1r_2r_3 \dots r_{n-2}}}.$$

Von dem doppelten Zeichen innerhalb des Wurzelausdrucks gilt das obere oder das untere, je nachdem n ungerade oder gerade.

XVI.

Ueber mittlere Zahlungstermine mit einfachen Zinsen.

Von

Herrn Doctor *Schlechter*,

Lehrer am Gymnasium zu Bruchsal.

Ist man ein Kapital von k fl. nach n Jahren unverzinslich zu zahlen schuldig und es wird die jährliche Vergütung für's Hundert zu p Procent und der gegenwärtige Werth zu x angenommen, so ist k zu zerschlagen in den baaren, gegenwärtigen Werth x und den Abzug, Rabatt, Disconto D; somit ist $k=x+D$. D drückt nun offenbar die Benutzung des Kapitals x zu p Procent für n Jahre aus, so dass dann $D=\frac{pnx}{100}$ gesetzt werden kann. Hieraus folgt:

$$1)\quad k=x+\frac{pnx}{100};$$

somit

$$2)\quad x=\frac{100k}{100+pn}.$$

$\frac{100k}{100+pn}$ fl. werden zum Zinsfuss p in n Jahren zu k fl. wieder anwachsen. Der Disconto $D=k-\frac{100k}{100+np}$, also

$$3)\quad D=\frac{pnk}{100+pn}.$$

Sind folglich $k_1, k_2, k_3, \ldots. k_r$ nach $a, b, c, \ldots. y$ Jahren unverzinslich zu entrichten, so ist ihr gegenwärtiger Werth W:

$$4)\quad W=\frac{100k_1}{100+ap}+\frac{100k_2}{100+bp}+\ldots.+\frac{100k_r}{100+yp},$$

der Disconto:

$$5)\quad D = \frac{apk_1}{100+ap} + \frac{bpk_2}{100+bp} + \ldots + \frac{ypk_r}{100+yp}.$$

Wird nun die Aufgabe so gestellt, dass die Kapitalien k_1, k_2, ... k_r, welche man nach a, b, c, ... y Jahren unverzinslich schuldig ist, an einem und demselben Tage bezahlt werden sollen, so wird also der Schuldner bei baarer Zahlung aller Kapitalien den Werth

$$6)\quad W = \frac{100k_1}{100+ap} + \frac{100k_2}{100+bp} + \ldots + \frac{100k_r}{100+yp}$$

entrichten; der Minderbetrag, Disconto, D wäre:

$$7)\quad D = \frac{apk_1}{100+ap} + \frac{bpk_2}{100+bp} + \ldots + \frac{ypk_r}{100+yp}.$$

Es muss daher dem Schuldner der Werth W so lange in Händen gelassen werden, bis durch Verzinsung desselben zu p Procent der Disconto D erzielt worden ist. Nennt man diese Zeit x, so ist:

$$8)\quad D = \frac{pWx}{100}$$

oder

$$9)\quad x = \frac{100D}{pW},$$

also nach 6) und 7):

$$10)\quad x = \frac{\frac{ak_1}{100+ap} + \frac{bk_2}{100+bp} + \ldots + \frac{yk_r}{100+yp}}{\frac{k_1}{100+ap} + \frac{k_2}{100+bp} + \ldots + \frac{k_r}{100+yp}}.$$

Oder, was offenbar dasselbe ist, der baare Werth W und der Zins aus W zum Zinsfusse p muss gleich sein der Summe der in den einzelnen Terminen zu zahlenden Kapitalien. Somit:

$$11)\quad W + \frac{Wxp}{100} = k_1 + k_2 + \ldots + k_r,$$

woraus man für x den Werth in Gleichung 10) erhält. Es kann somit dieser Auflösungsweise die Richtigkeit nicht abgesprochen werden, um so mehr, wenn man sich überzeugt, dass, wenn der Werth von x aus 10) in 11) eingesetzt wird,

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r$$

sich ergibt. Schafft man in Gleichung 10) die Nenner aller Brüche im Zähler und Nenner weg, und führt die dann angezeigten Multipli-

cationen aus, so erhält der Nenner und Zähler Posten mit und ohne den Factor p, so dass $x=\frac{A+Bp}{C+Dp}$ gesetzt werden kann. Führt man auf der rechten Seite der Gleichung die Division aus, so erhält man:

$$12)\quad x=\frac{B}{D}+\frac{A-\frac{BC}{D}}{C+Dp}.$$

Bei Betrachtung dieser Gleichung wird in die Augen fallen, dass die Zeit x von p in der Weise abhängt, dass, wenn p abnimmt, die Zeit x zunimmt und umgekehrt. $p=0$ gesetzt gibt:

$$13)\quad x=\frac{ak_1+bk_2+\ldots+yk_r}{k_1+k_2+\ldots+k_r},$$

den grösstmöglichsten Werth für x. $p=x$ genommen, gibt den kleinsten:

$$14)\quad x=\frac{B}{D}.$$

Die gemeinschaftliche Verfallzeit aller Kapitalien wird also um so früher fallen, je grösser der Zinsfuss genommen wird, und umgekehrt. Man erkennt also aus dieser Entwickelung, dass der mittlere Zahlungstermin nicht allein von der Zeit, nach welcher die Kapitalien zu entrichten sind, und von ihrer Grösse, sondern auch vom Zinsfuss abhängt. Die gestellte Aufgabe ist daher so lange eine völlig unbestimmte, so lange nicht der Werth p gegeben und durch Vereinbarung festgestellt ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung kann unmöglich bestritten werden. Gegen diese Wahrheit werden Verstösse gemacht in allen mir hierüber bekannten Schriften. (Meier Hirsch, Oettinger u. s. w.)

Es soll nun der innere Grund, wie man zu dieser falschen Aufgabenstellung und natürlich dann auch zur falschen Lösung kam, näher erläutert werden.

Wir stellen zu diesem Behufe die Aufgabe, wie sie gewöhnlich gestellt und gelöst wird:

Man habe $k_1, k_2, \ldots k_r$ fl. nach $a, b, c, \ldots y$ Jahren unverzinslich zu bezahlen; welches ist die mittlere Verfallzeit?

Auflösung 1. Zahlt der Schuldner alle Kapitalien statt nach seinen vorgeschriebenen Terminen baar und man nimmt im Allgemeinen an, die Verzinsung der Kapitalien könne nach dem Zinsfuss p stattfinden, so sind die Verluste des Schuldners:

$$14)\quad D=\frac{apk_1+bpk_2+\ldots+ypk_r}{100}.$$

Die Kapitalien $k_1, k_2, \ldots . k_r$ müssen dem Schuldner so lange gelassen werden, bis er zum Zinsfusse p den Disconto D gewonnen hat. Es ist also:

$$15) \quad \frac{apk_1 + bpk_2 + \ldots . + ypk_r}{100} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots . + k_r)px}{100},$$

$$16) \quad x = \frac{ak_1 + bk_2 + \ldots . + yk_r}{k_1 + k_2 + \ldots . + k_r}.$$

Auflösung 2. Entrichtet der Nutzniesser diese Kapitalien baar, so verliert er die Benutzung von k_1 a Jahre, also von ak_1 1 Jahr; ebenso von bk_2, von bk_3 u. s. w. 1 Jahr.

Es müssen ihm also sämmtliche Kapitalien so lange gelassen werden, bis er die Benutzung von $(ak_1 + bk_2 + \ldots . + yk_r)$ für 1 Jahr genossen hat. Nennen wir diese Zeit x, so ist

$$17) \quad x = \frac{ak_1 + bk_2 + \ldots . + yk_r}{k_1 + k_2 + \ldots . + k_r}.$$

Es ist also nach diesen Auflösungen der mittlere Zahltag vom Zinsfusse unabhängig.

Schon darin liegt offenbar ein Widerspruch, dass man einen Zinsfuss annimmt, durch die Art und Weise der Auflösung der Aufgabe aber erkennt, dass er gar nicht in Anschlag gebracht werden kann. Diess tritt noch klarer hervor, wenn man in Gleichung 10) $p=0$ setzt, d. h. gar keine Nutzniessung für's Hundert, also auch für alle Kapitalien nimmt. Zugleich wird klar sein, dass auf diese Weise die Zeit immer die grösstmöglichste und der Nutzniesser immer im Vortheil ist.

Es soll die Unrichtigkeit noch mehr beleuchtet werden. Der auf diese Weise berechnete Disconto beträgt

$$18) \quad D = \frac{apk_1 + bpk_2 + \ldots . + ypk_r}{100};$$

daher der baare Werth W aller Kapitalien:

$$19) \quad W = k_1 + k_2 + \ldots . + k_r - \frac{apk_1 + bpk_2 + \ldots . + ypk_r}{100},$$

$$20) \quad W = k_1\left(1 - \frac{ap}{100}\right) + k_2\left(1 - \frac{bp}{100}\right) + \ldots . + k_r\left(1 - \frac{yp}{100}\right).$$

Da aber $a, b, c, \ldots . y$ und p alle möglichen positiven Werthe annehmen können, so wird, wenn $ap = 100$, $bp = 100$, u. s. w., $yp = 100$ gesetzt wird,

$$21)\quad W=0.$$

Der Schuldner oder Nutzniesser hat also gar kein Kapital mehr in Händen, um seinen Verlust durch Umsetzung zu decken. Dass der Schuldner aus den Kapitalien k_1, k_2, k_3, ... k_r den Verlust in zu bestimmender Zeit wieder gewinne, ist eine beliebige Annahme und entbehrt jeden Grundes, da die Abzüge so beschaffen sein müssen, dass die Reste, die baaren Werthe der Kapitalien, zur Versinsung ausgeliehen, zur ursprünglichen Summe wieder anwachsen müssen. Es müsste

$$W+\frac{Wpx}{100}=k_1+k_2+\ldots.+k_r$$

sein, was unmöglich ist. Diese Lösungsweise ist durch die Pinckard'sche oder Carpzov'sche Berechnung des Interuseriums hervorgerufen worden, und Oettinger sagt mit Recht Seite 111. seiner politischen Arithmetik, dass dieser Methode schon längst kein Denkender mehr beipflichte. Er selbst löst zwar sonderbarer Weise die Aufgaben über mittlere Zahlungstermine ebenso, währenddem der Herr Verfasser Seite 13. den Widerspruch der Gleichung 20) nachzuweisen sucht und mit Anwendung der Zinseszinsen ganz analog verfährt.

XVII.

Einiges über Trisection des Winkels.

Von

Herrn *Franz Walter,*

Cadet der k. k. Genie-Truppe im Militär-geographischen Institute zu Wien.

I.

Es sei (Taf. II. Fig. 3.) AB eine bekannte Gerade, C deren Mittelpunkt und GH senkrecht auf AB. Beschreibt man aus einem beliebigen, in der GH liegenden Punkte D den Bogen

$BEFA$ mit dem Halbmesser $DB = DA$, theilt diesen Bogen bei F und E in drei gleiche Theile, und verfährt ebenso mit mehreren, aus den in der GH liegenden Mittelpunkten D', D'' u. s. w. beschriebenen Bögen, so liegen alle, auf der einen Seite befindlichen Theilungspunkte E', E, E'' u. s. w., dann F', F, F'' u. s. w. in einer krummen Linie, deren nähere Untersuchung unsere Aufgabe sein soll.

Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten in O, wenn $OC = \frac{1}{3}AC$, die Abscissenaxe in XOX', die Ordinatenaxe in YOY' parallel zu GH, verbindet man ferner die Punkte B und E, E und F, zieht JE senkrecht auf AB, und bezeichnet endlich die Länge CB mit a, so ist:

$$OJ = x, \quad EJ = y, \quad FE = EB,$$

$$JB^2 + JE^2 = BE^2 = FE^2;$$

da nun

$$FE = 2.EK = 2.CJ = 2(OJ - OC) = 2(x - \frac{a}{3})$$

und

$$JB = OB - OJ = \frac{4}{3}a - x$$

ist, so ist

$$\left(\frac{4}{3}a - x\right)^2 + y^2 = 4(x - \frac{a}{3})^2,$$

$$\frac{16}{9}a^2 - \frac{8}{3}ax + x^2 + y^2 = 4x^2 - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{9}a^2;$$

wird diese Gleichung geordnet, so hat man:

$$\frac{4}{3}a^2 = 3x^2 - y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

als den geometrischen Ort des Punktes E. In dieser Gleichung erkennt man eine Hyperbel, deren halbe grosse Axe $= \frac{2a}{3}$ und deren halbe kleine Axe $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$ leicht zu bestimmen sind. Ferner findet man die Durchschnitte der Hyperbel mit der Abscissenaxe, d. i. deren Scheitel, in L und A, weil $AO = OL = \frac{2a}{3}$. Es entspricht demnach die Curve, welche F'', F, F' u. s. w. verbindet, nicht der Gleichung (1), sondern einer anderen Hyperbel, deren Dimensionen zwar dieselben sind, deren Scheitel sich jedoch in O und B befinden.

Die Gleichung (1) enthält ferner nur die Constante $AB = 2a$, die Hyperbel wird demnach blos durch diese Grösse, die Sehne des getheilten Bogens, bestimmt, und ist von dem Bogen selbst ganz unabhängig. Aus der Natur der Ableitung geht ferner die Giltigkeit der Gleichung für die Theilungspunkte aller über AB beschriebenen Bögen hervor.

Auf diese Betrachtung gestützt lässt sich ein Instrument von der in Taf. II. Fig. 4. dargestellten Form construiren, mit welchem man jeden Winkel in drei gleiche Theile theilen kann.

Es ist nämlich AB die Sehne des zu theilenden Bogens, CH senkrecht auf AB, $AC = CB$ und $LC = \frac{1}{3}CB$, ferner LE ein Theil eines Astes der durch die Gleichung (1) bestimmten Hyperbel, in der man $a = CB$ setzt. Die Punkte A und B sind durch einen Strich auf den Kanten Ln und Cm markirt.

Ist nun MNO (Taf. II. Fig. 5.) der zu theilende Winkel, so legt man das Instrument dergestalt auf denselben, dass die Punkte A und B in seinen Schenkeln liegen und die Kante CH durch seinen Scheitel geht. Wird nun das Hyperbelstück LE auf das Papier übertragen, ferner der Punkt B auf NO markirt und nach Wegnahme des Instrumentes der Bogen BRA aus dem Mittelpunkte N beschrieben, so ist der Durchschnitt R dieses Bogens mit dem Hyperbelstücke der gesuchte Theilungspunkt desselben, daher $\angle BNR = \frac{1}{3}\angle MNO$. Die Richtigkeit des Vorganges erhellet aus der Vergleichung der Figuren 5. und 3. auf Taf. II.

Der genauen Ausführung dieser Theilung, welche im Allgemeinen keinem Anstande unterliegt, treten in einzelnen Fällen Schwierigkeiten entgegen. Bei Winkeln nämlich nahe an 180° treffen die Kanten Ln und Cm die Schenkel des Winkels in sehr schiefer Richtung, es wird daher die Beurtheilung, ob die Punkte A und B in diesen Schenkeln liegen, und die Bestimmung des Punktes B auf NO sehr unsicher, daher das Resultat mit einem bedeutenden Fehler behaftet sein, — der grösste mit Sicherheit zu theilende Winkel dürfte 140° nicht übersteigen. Ist der zu theilende Winkel sehr spitz, so ist das Instrument ebenfalls nicht mit Vortheil anzuwenden, denn je spitzer der Winkel wird, desto grösser werden dessen Schenkel und der Theil CH des Instrumentes (bei gleicher Sehne AB), so dass diese Stücke bei nur mässig kleinen Winkeln schon Dimensionen annehmen, welche die Grenzen gewöhnlicher Zeichenflächen überschreiten, wenn nicht schon ursprünglich die Sehne AB sehr klein gemacht worden ist, was aber wieder bei grösseren Winkeln der Genauigkeit Eintrag thun würde. Es ist aus diesem Grunde der Winkel von

30° als der kleinste zu theilende Winkel anzunehmen, für welchen Fall $CH = 2AB$ genügt. Ebenso ist es für den grössten zu theilenden Winkel von 140° hinreichend, wenn das Hyperbelstück LE so lang gemacht wird, dass die Entfernung $BE = CB$ ist. Sind Winkel zu theilen, welche 140° überschreiten oder 30° nicht erreichen, so vollführt man die Theilung an dem halben oder doppelten, überhaupt an einem, in einfacher Beziehung zu dem gegebenen stehenden und innerhalb der gegebenen Grenzen liegenden Winkel, von dem sich dann leicht die Theilung auf den ursprünglichen Winkel übertragen lässt.

II.

Das Stück des Hyperbelastes, welches zur Theilung der Winkel benützt wird, lässt sich annähernd durch einen Kreisbogen ersetzen, und es soll hier untersucht werden, inwiefern dies gestattet sein kann.

Zu diesem Ende bezieht man die für den Anfangspunkt O giltige Gleichung der Hyperbel $3x^2 - 4\frac{a^2}{3} = y^2$ auf deren Scheitel A, und man erhält als neue Gleichung:

$$y^2 = 3x^2 + 4ax. \qquad (1)$$

Nun beschreibt man aus dem beliebig in der Abscissenaxe gewählten Punkte B (Taf. II. Fig. 6.) mit dem Halbmesser BA den Kreisbogen ACD *), bezeichnet das Stück AB mit l, verbindet ferner einen beliebigen Punkt der Hyperbel E mit B und bezeichnet die Gerade EB durch l_1.

Es ist nun der Unterschied zwischen l_1 und l zu finden, wenn E innerhalb der angedeuteten Grenzen liegt, zu welchem Zwecke bemerkt wird, dass für den ganzen Lauf dieser Untersuchung nur der halbe Hyperbelast von A aufwärts in Rechnung gezogen, mithin die untere Hälfte desselben und der andere Ast nicht berücksichtigt wird.

Es ist $EB^2 = EF^2 + FB^2$ oder $l_1^2 = (l-x)^2 + y^2$, und nach Gleichung (1):

$$l_1^2 = l^2 - 2lx + 4x^2 + 4ax, \qquad (2)$$

*) Es ist in der Figur sowohl dieser Bogen, als auch die Hyperbel etwas unnatürlich gezeichnet, um ihren Unterschied deutlicher hervortretend zu machen.

und wenn man hier $4x^2+4ax-2lx=m$ setzt:

$$l_1^2=l^2+m.$$

Es wird der Unterschied zwischen l_1 und l blos von m abhängen, so dass l_1 für ein positives m grösser als l, für ein negatives m kleiner als l ist, und für $m=0$ die Geraden l und l_1 einander gleich werden; in diesem letzteren Falle wird der Kreisbogen die Hyperbel schneiden.

m wird aber positiv, wenn

$$4x^2+4ax>2lx, \quad 2x+2a>l, \quad 2x>l-2a;$$

es wird negativ, wenn

$$2x<l-2a,$$

und $=0$, wenn

$$2x=l-2a,$$

so dass

$$\frac{l-2a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

die Abscisse des Durchschnittspunktes ist.

Das Zeichen von m wird für jedes x dasselbe bleiben, wird sich aber für verschiedene Werthe von l ändern. Ist nämlich $l<2a$, z. B. $=2a-v$, so wird m nie negativ werden können, denn es kann nicht $2x<-v$, sondern nur $2x>-v$, daher m positiv sein. Für $l=2a$ wird m entweder positiv oder $=0$, aber nie negativ, und nur für $l>2a$ können alle drei Fälle eintreten.

Fasst man die erhaltenen Resultate zusammen, so sieht man, dass wenn die Entfernung des Mittelpunktes des Bogens vom Scheitel der Hyperbel grösser ist als $2a$, so wird der Bogen ausser der Hyperbel bis zu ihrem Durchschnittspunkte fortlaufen, sodann aber innerhalb derselben bleiben.

Wenn die Entfernung des Mittelpunktes vom Scheitel $\overset{=}{<} 2a$ ist, so liegt der ganze Kreis im Innern der Hyperbel.

Hieraus lässt sich leicht schliessen, dass im ersten Falle, wenn nämlich der Bogen mit der Hyperbel zwei Punkte gemein hat, die grösste Differenz zwischen l_1 und l jedenfalls kleiner ausfallen wird, als im zweiten Falle, da der Kreisbogen nahe der Hyperbel bis zum Durchschnitte mit derselben fortläuft, während er sich im zweiten Falle sogleich von ihr entfernt.

Es wird aber die grösste Differenz zwischen l_1 und l offen-

bar dann eintreten, wenn l_1 ein Minimum wird; um nun dieses Minimum zu bestimmen, löst man die Gleichung (2) nach x auf:

$$l_1^2 = l^2 - 2lx + 4x^2 + 4ax,$$

$$x^2 + 2x\frac{2a-l}{4} = \frac{l_1^2 - l^2}{4},$$

$$x = \frac{l - 2a \pm \sqrt{4l_1^2 - 3l^2 + 4a^2 - 4al}}{4}. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Man sieht, dass l_1 unmöglich kleiner werden kann als

$$\sqrt{\frac{3l^2 + 4al - 4a^2}{4}},$$

da sonst der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ, mithin x imaginär werden würde. Bezeichnet man den kleinstmöglichen Werth von l_1 mit l_2, so ist

$$l_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3l^2 + 4al - 4a^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(3l - 2a)(l + 2a)}.$$

Für diesen Fall wird der Ausdruck in (4) unter dem Wurzelzeichen $=0$ und $x = \frac{l-2a}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{l-2a}{2}$, d. h. die Abscisse desjenigen Punktes, für welchen l_1 ein Minimum wird, ist gleich der halben Abscisse des Durchschnittspunktes der Hyperbel mit dem Kreisbogen. [Vergl. Gleich. (3) u. (4).]

Will man das Hyperbelstück AC durch einen Kreisbogen ersetzen, so ist, wenn derselbe durch C gehen soll, dessen Radius $AB = 2a + 2AG$, die grösste Abweichung von der Hyperbel $= l - \frac{1}{2}\sqrt{(3l - 2a)(l + 2a)}$, und die Abscisse für den Punkt der grössten Abweichung $AF = \frac{1}{2}AG$.

Da es für sich einleuchtend ist, dass, je grösser l, also je grösser das Hyperbelstück, auch die Abweichung des so gefundenen Kreisbogens grösser sein wird, so wird man desto annähernder das Hyperbelstück ersetzen können, je kleiner dasselbe ist. Nimmt man das Hyperbelstück, welches zur Theilung von Winkeln bis zu 180° ausreicht, so erhält man die Abweichung $= 0.006.a$, eine Grösse, welche sehr fühlbar und für die wirkliche Ausführung zu bedeutend ist. Dagegen erhält man einen, für diesen Zweck vollkommen tauglichen Bogen, wenn man als Grenze der zu theilenden Winkel 90° annimmt.

Es wird für diesen Fall:

$$x = r \sin 15° - \tfrac{1}{3}a,$$

wenn $JH = r$ ist. Da aber $r = HJ = a\sqrt{2}$, so ist

$$x = a(\sqrt{2}.\sin 15^{\circ} - 0.33) = 0{,}0326920.a,$$

daher

$$l = 2.0653840.a,$$

$$l_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(3l-2a)(l+2a)}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{4.1961520 \times 4.0653840}$$

$$= 2.065115.a,$$

mithin

$$l - l_2 = 0.000269.a.$$

Da die Unterschiede zwischen l und l_1 jedenfalls kleiner sind als die entsprechenden Unterschiede zwischen den, durch den Kreisbogen und durch die Hyperbel abgeschnittenen Bögen, so ist der grösste Fehler, den man begehen kann, $0.0002.a$.

Nimmt man als die, im günstigsten Falle zu erreichende Strichdicke 0.001 Wr. Zoll, so wird man für $a = 4$ Zoll, d. i. die ganze Sehne $=8$ Zoll, höchstens um die Dicke des feinsten Striches fehlen können, und es wird dieser Fehler eintreten, wenn der zu theilende Winkel $85^{\circ}\ 53'$.... beträgt, da für diesen Fall l_1 ein Minimum wird.

Die folgende Construction ist hierauf gestützt.

Sei MON (Taf. II. Fig. 7.) der zu theilende Winkel, so beschreibt man den Bogen MFN mit einem beliebigen Halbmesser, zieht die Sehne MN und macht $AN = \frac{1}{3}MN$. Theilt man nun $\angle MON$ durch die Gerade OP in zwei gleiche Theile, macht $CE = CN$, beschreibt aus E den Bogen MBN und trägt chord $MB = EM$ auf, so ist arc $BN = \frac{1}{3}$ arc MN, da $\angle MEN = 90^{\circ}$ ist. Zieht man nun $BD \perp MN$, trägt $DG = CN = a$ und $GH = GA$ auf, so wird der aus H beschriebene Bogen AB den Bogen MN in F schneiden und dieser Punkt der Theilungspunkt sein.

Ist ein stumpfer Winkel MOQ zu theilen, so theilt man MON bei F und trägt chord $FK =$ chord $KL = ON$ auf, so wird arc $QL = \frac{1}{3}$ arc MQ sein.

Da diese Construction für den gewöhnlichen Gebrauch viel zu umständlich ist, so wird man statt des Halbmessers AH den Halbmesser $2a$ nehmen können und hiebei, besonders wenn CN nicht sehr gross und $\angle MON$ spitz ist, keinen bedeutenden Fehler begehen, da für $MON = 90^{\circ}$, $l - l_2 = 0.0010a$ wird, und sich dieser Fehler desto mehr verringert, je kleiner $\angle MON$ ist.

XVIII.

Beitrag zur Theorie der Tangenten an die krummen Linien der zweiten Ordnung.

Von

Herrn Professor Dr. *J. K. Steczkowski*

an der Universität zu Cracau.

Aus einem, ausserhalb eines Kegelschnitts gegebenem Punkte eine Tangente an diesen Kegelschnitt zu ziehen, sind zwar etliche und ganz einfache Methoden bekannt, doch will ich hier noch eine nicht minder einfache zeigen, welche wiewohl schon längst, jedoch nicht allgemein bekannt sein dürfte, weil ich sie bis jetzt in keiner analytischen Geometrie angetroffen habe; ich erinnere mich nur, dass mein seliger Professor Franz Sapalski in der descriptiven Geometrie uns diese Methode für die Ellipse als eine einfache und praktische, aber ohne Beweis gezeigt hat.

Das Wesen dieser Methode beruht auf Folgendem. Nimmt man den Kreis als Beispiel vor, dessen Mittelpunkt S (Taf. II. Fig. 8.). Sei ausserhalb dieses Kreises der gegebene Punkt P, aus welchem wir die Tangente ziehen wollen. Man ziehe aus diesem gegebenen Punkte P wie immer drei Sekanten, welche die Peripherie des Kreises in den Punkten A, B, C, D, E, F schneiden sollen. Verbindet man kreuzweise die Durchschnittspunkte der Sekanten mit der Peripherie mit Geraden BC, AD, DE, CF, so schneiden sich diese Geraden in zwei Punkten O und O', durch welche die Gerade gezogen und bis an die Peripherie verlängert, uns die Berührungspunkte T und T' der zwei aus dem Punkte P an den Kreis gezogenen Tangenten anzeigen wird. Dasselbe gilt auch für die anderen Kegelschnitte. Um aber diese Methode zu begründen, muss vorerst bewiesen werden,

dass die Punkte O und O' sich wirklich auf der die Berührungspunkte verbindenden Geraden TT' befinden. Dieses hat Tacquet in seiner „Synopsis sectionum conicarum, Venetiis MDCCLXII“ synthetisch bewiesen, sich auf den Satz stützend, dass bei jedem Kegelschnitte, wenn man aus einem ausserhalb liegenden Punkte eine Sekante dieses Kegelschnitts zieht, dieselbe in zwei Punkten, wo sie den Kegelschnitt, und im dritten Punkte, wo sie die Gerade, welche die Berührungspunkte zweier aus demselben an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten verbindet, schneidet, in einer harmonischen Proportion getheilt wird. Diese zwei Sätze habe ich in keinem der jetzigen Lehrbücher gefunden, deswegen werde ich ihre Begründung hier folgen lassen, indem ich mit dem zweiten beginne.

Für den Kreis ist dieser Satz äusserst leicht zu beweisen. Seien nemlich aus dem Punkte P (Taf. II. Fig. 9.) zwei Tangenten gezogen und die, die Berührungspunkte verbindende Gerade TT', so wie die Sekante PB, welche die Peripherie des Kreises in den Punkten A und B und die Gerade TT' im Punkte C schneidet. Zu beweisen ist, dass

$$PB:PA = BC:AC.$$

Durch die Punkte A und B zieht man die Geraden FD und GE parallel zu TT', bis sie sich mit der Peripherie und der einen der Tangenten schneiden, wie hier in F, G und D, E. Aus einem bekannten Satze der elementaren Geometrie hat man $\overline{DT}^2 = FD.AD$ und $\overline{ET}^2 = EG.EB$; zieht man noch durch den Mittelpunkt des Kreises die Gerade PQ, welche die Gerade TT' und folglich auch die ihr parallelen FA und GB halbiren wird, so ist

$$QE:OD = QB:OA \quad \text{oder} \quad \overline{QE}^2:\overline{QB}^2 = \overline{OD}^2:\overline{OA}^2,$$

und daraus:

$$\overline{QE}^2 - \overline{QB}^2 : \overline{QE}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OA}^2 : \overline{OD}^2,$$

oder

$$(QE+QB)(QE-QB):(OD+OA)(OD-OA) = \overline{QE}^2:\overline{OD}^2,$$

oder, da $QB = QG$ und $OA = OF$:

$$EG.BE:DF.DA = \overline{QE}^2:\overline{OD}^2.$$

Setzt man hier die obigen Werthe für die Rechtecke, so erhalten wir:

$$\overline{QE}^2:\overline{OD}^2 = \overline{ET}^2:\overline{DT}^2 \quad \text{oder} \quad QE:OD = ET:DT.$$

Da aber $QE:OD = PE:PD$, so ist $PE:PD = ET:DT$, d. h. die Tangente PE ist in den Punkten P, D, T, E in einer harmonischen Proportion getheilt, deswegen ist derselbe Fall mit der Sekante PB, dass sie in den Punkten P, A, C, B durch die Parallelen in der nemlichen Proportion getheilt wird, d. h. es wird $PB:PA = BC:AC$ sein, wie behauptet wurde.

Um diesen Satz für andere Kegelschnitte zu beweisen, werde ich nur die Ellipse vornehmen; alles aber, was ich für diese beweisen werde, wird für die zwei anderen Kegelschnitte, d. h. Hyperbel und Parabel, gelten. Ich nehme die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte vor:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

in welcher ich x und y als schiefwinklichte Coordinaten ansehe, deren Anfangspunkt O ist (Taf. II. Fig. 10.), und setze voraus, dass diese Gleichung die Ellipse bedeutet.

Ordne ich diese Gleichung nach y, so wird

$$y^2 + \frac{bx+d}{a}y + \frac{cx^2+ex+f}{a} = 0$$

sein. Wird hier $x = OP$ gesetzt, so erhält man zwei Wurzeln für y, nemlich PM und PN. Da aber nach der Theorie der Gleichungen $\frac{cx^2+ex+f}{a}$ das Product dieser Wurzeln ist, so ist

$$PM.PN = \frac{cx^2+ex+f}{a}.$$

Diese Wurzeln können aber entweder beide reell, beide imaginär oder beide gleich sein, je nachdem die zwei Wurzeln der Gleichung $x^2 + \frac{e}{c}x + \frac{f}{c} = 0$ reell, imaginär oder unter einander gleich sind. Lassen wir die imaginären Wurzeln ausser Acht. Wird in der ursprünglichen Gleichung $y = 0$ gesetzt, so erhalten wir die Abscissen der Punkte, in welchen die Ellipse die Abscissenaxe schneidet, d. h. wir erhalten OA und OB. Für diesen Fall haben wir:

$$x^2 + \frac{e}{c}x + \frac{f}{c} = (x - OA)(x - OB)$$

oder

$$\frac{cx^2+ex+f}{a} = \frac{c}{a}(x - OA)(x - OB).$$

Da wir aber vorher $x = OP$ gesetzt haben, so wird auch:

$$\frac{cx^2+ex+f}{a} = \frac{c}{a}(OP-OA)(OP-OB) = \frac{c}{a}.PA.PB,$$

d. h. nach dem Obigen $PM.PN = \frac{c}{a}.PA.PB$, woraus $\frac{PM.PN}{PA.PB} = \frac{c}{a}$. Aus dieser Gleichung lesen wir die Wahrheit, dass das Verhältniss der Rechtecke $PM.PN$ und $PA.PB$ für jeden Kegelschnitt constant ist. Setzt man also $x = OP'$, so werden wir auf dem nemlichen Wege $\frac{P'M'.P'N'}{P'A.P'B} = \frac{c}{a}$ und folglich

$$\frac{PN.PM}{PB.PA} = \frac{P'N'.P'M'}{P'B.P'A}$$

erhalten, d. h. zwei Sekanten aus dem nemlichen Punkte P gezogen geben dasselbe Verhältniss der Rechtecke aus den ganzen Sekanten in ihre Theile ausserhalb des Kegelschnitts, wie zwei andere den ersten parallele Sekanten aus einem anderen Punkte an denselben Kegelschnitt gezogen.

Nehmen wir jetzt die Abscissenaxe $O'X'$ zur Tangente an, oder, was dasselbe ist, setzen wir voraus, dass zwei Wurzeln der Gleichung $x^2 + \frac{e}{c}x + \frac{f}{c} = 0$ unter einander gleich sind, so kommen die Punkte A und B in einen Punkt D zusammen, d. h. es wird $PB = PA = QD$, so wie $P'B = P'A = Q'D$; deswegen erhalten wir aus dem nemlichen Grunde:

$$\frac{QN.QM}{\overline{QD}^2} = \frac{Q'N'.Q'M'}{\overline{Q'D}^2} \quad \text{oder} \quad \frac{QN.QM}{Q'N'.Q'M'} = \frac{\overline{QD}^2}{\overline{Q'D}^2},$$

d. h. wenn man aus zwei verschiedenen Punkten ausserhalb eines Kegelschnitts zwei parallele Sekanten und Tangenten an den nemlichen Kegelschnitt zieht, so verhalten sich die Rechtecke aus den Sekanten in ihre Theile ausserhalb des Kegelschnitts, wie die Quadrate der Tangenten.

Auf diese Eigenschaft der Kegelschnitte gestützt, können wir jetzt beweisen, dass die Sekante PB eines Kegelschnitts, gezogen aus dem Punkte P, wo die beiden Tangenten zusammenkommen, in den Punkten A, B, wo sie den Kegelschnitt, und im Punkte C, wo sie die, die Berührungspunkte der zwei aus demselben Punkte P gezogenen Tangenten verbindende Gerade schneidet, in einer harmonischen Proportion getheilt wird. Wir wollen nemlich beweisen, dass

$$PB : PA = BC : AC$$

ist (Taf. II. Fig. 11.). In dieser Absicht zieht man durch P und den Mittelpunkt der Ellipse die Gerade PQ, und dann durch die Punkte A und B, wo die Sekante die Ellipse schneidet, Parallellinien zu TT', bis sie sich mit der Ellipse nochmals und mit der Tangente PT in den Punkten F, G, D, E schneiden.

Ich halte es nicht für nöthig, zu beweisen, dass die Gerade PQ die TT' im Punkte I, also auch die ihr parallelen Sehnen AF und BG in den Punkten O und Q halbirt. Wenn ich also dieses voraussetze, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$DF.DA : EG.EB = \overline{DT}^2 : \overline{ET}^2.$$

Im Dreiecke QPE haben wir:

$$QE : OD = PQ : PO = QB : OA,$$

d. h.

$$\overline{QE}^2 : \overline{QB}^2 = \overline{OD}^2 : \overline{OA}^2,$$

woraus

$$\overline{QE}^2 - \overline{QB}^2 : \overline{QE}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OA}^2 : \overline{OD}^2$$

oder

$$(QE + QB)(QE - QB) : (OD + OA)(OD - OA) = \overline{QE}^2 : \overline{OD}^2.$$

Da aber $QB = QG$ und $OA = OF$, so ist

$$EG.BE : DF.DA = \overline{QE}^2 : \overline{OD}^2.$$

Setzen wir hier für das Verhältniss der Rechtecke das obige ihm gleiche der Quadrate, so erhalten wir:

$$\overline{QE}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{ET}^2 : \overline{DT}^2 \text{ oder } QE : QD = ET : DT.$$

Aber $QE : OD = PE : PD$, folglich $PE : PD = ET : DT$, d. h. die Tangente PE ist in den Punkten P, D, T, E in einer harmonischen Proportion getheilt, deswegen wird auch die Sekante PB durch die Parallellinien in den Punkten P, A, C, B in einer harmonischen Proportion getheilt, nemlich es wird

$$PB : PA = BC : AC$$

sein, was zu beweisen war.

Das Letzte, was uns zu begründen bleibt, die auf der ersten Figur für einen Kreis gezeigte Methode, mittelst dreier Sekanten die Tangente eines Kegelschnittes zu ziehen, zu rechtfertigen, ist

der Beweis, dass die Geraden AD, BC (Taf. II. Fig. 12.) sich auf der die Berührungspunkte verbindenden Geraden TT' schneiden. Diesen Beweis werde ich fast mit Tacquets Worten führen.

Es seien PT und PT' zwei aus dem Punkte P an eine Ellipse gezogene Tangenten und TT' die, die Berührungspunkte verbindende Gerade; dann seien PB und PD die zwei aus demselben Punkte gezogenen Sekanten, welche die Ellipse in den Punkten A, B, C, D und die Gerade TT' in E und F schneiden. Die Gerade AD schneide die Linie TT' im Punkte O; durch P und O ziehen wir wieder eine Gerade, und durch die Punkte B und C Parallellinien zu AD, bis sie sich mit der TT' und der verlängerten PO in den Punkten H, K und G, I schneiden; zuletzt ziehen wir BO und CO. In dem Dreiecke DOP haben wir $DO:CI = PD:PC$. Da aber nach dem Vorhergehenden $PD:PC = DF:CF$, so ist auch $DO:CI = DF:CF$. Die Dreiecke DOF und FGC sind ähnlich, deswegen $DF:CF = DO:GC$, folglich $DO:CI = DO:GC$, also $CI = GC$. Ebenso hat man im Dreiecke BPK die Proportion $BK:AO = PB:PA$. Da aber $PB:PA = BE:AE$, so ist auch $BK:AO = BE:AE$. Die Dreiecke BEH und AEO sind wieder ähnlich, also $BE:AE = BH:AO$, folglich $BK:AO = BH:AO$, woraus $BK = BH$. Endlich sind die Dreiecke HOK und IOG ähnlich, haben überdies die Seiten HK und GI parallel, die zwei anderen Seiten des einen sind Verlängerungen der Seiten des anderen Dreiecks; wenn also die Gerade BO die eine der parallelen Seiten HK in B halbirt, so muss sie verlängert die andere, d. h. GI, auch halbiren, oder sie muss auf den Punkt C treffen; mit anderen Worten, die drei Punkte B, O, C müssen in einer und derselben Geraden liegen.

Auf diese Art haben wir bewiesen, dass die Geraden AD, BC sich auf der Geraden TT' durchschneiden. Da man aber keine besondere Lage für die zwei Sekanten angenommen hat, so gilt der Satz für je zwei aus dem nemlichen Punkte P gezogene. Zieht man also drei solche Sekanten, so werden wir zwei Durchschnittspunkte erhalten, welche uns die Richtung der Geraden TT' und diese Gerade die Berührungspunkte T und T' bestimmen werden.

XIX.

Ueber elliptische Coordinaten.

(Man sehe die frühere Abhandlung in diesem Theile: „Ueber krummlinige Coordinaten." Nr. V. S. 26.)

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

Aus den Gleichungen des Ellipsoids (ϱ) und der homofokalen Hyperboloide (μ) und (ν):

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1, \quad \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1$$

folgt:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad bcx=\varrho\mu\nu,$$

$$(3) \quad \ldots \quad b\sqrt{c^2-b^2}.y=\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2},$$

$$(4) \quad \ldots \quad c\sqrt{c^2-b^2}.z=\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}.$$

Diese Relationen bilden die Grundlage für die Theorie der centrischen homofokalen Flächen, oder der elliptischen Coordinaten. Es sei $ABCD$ ein Krümmungslinien-Viereck auf (ϱ); x_a, x_b, x_c, x_d sind die Abscissen der Eckpunkte, welche durch die elliptischen Coordinaten (ϱ, μ, ν); (ϱ, μ, ν'); (ϱ, μ', ν'); (ϱ, μ', ν) bestimmt sind; so folgt aus (2):

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_a.x_c=x_b.x_d;$$

ebenso findet man aus (3) und (4):

$$y_a . y_c = y_b . y_d,$$

$$z_a . z_c = z_b . z_d.$$

Die Abscissen der Ecken eines Krümmungslinien-Vierecks sind proportionirt. Hieraus ergibt sich weiter, dass die Gegenecken solcher Vierecke die correspondirenden Punkte des Ivory sind. (Chasles, sur l'attraction des ellipsoides. Institut de France, tome IX.). Aus (2) folgt:

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene senkrecht zur x-Axe, so ist das Produkt der grossen Halbaxen der drei durch ihn gehenden homofokalen Flächen konstant.

Wir betrachten ein von sechs homofokalen Flächen eingeschlossenes Parallelepiped. Die Punkte (ϱ, μ, ν) und $(\varrho + d\varrho, \mu + d\mu, \nu + d\nu)$ sind zwei Gegenecken desselben; in dem ersten dieser Punkte stossen die drei Kanten ds', ds'', ds''' zusammen; ds ist die Verbindungslinie beider Punkte oder die Diagonale des Parallelepipeds. Betrachten wir in (2), (3) und (4) x, y, z und ϱ als variabel, so erhalten wir:

(6) . . . . $bc dx = \mu\nu d\varrho$,

$$b\sqrt{c^2-b^2}\,dy = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2-b^2}}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2},$$

$$c\sqrt{c^2-b^2}\,dz = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2-c^2}}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2},$$

$$(7)\qquad ds' = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}\,d\varrho.$$

Ebenso findet man, wenn in (2), (3) und (4) x, y, z und μ, hierauf x, y, z und ν als veränderlich angesehen werden:

$$(8)\qquad ds'' = \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}\,d\mu,$$

$$(9)\qquad ds''' = \frac{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\nu.$$

Es seien a, a', a''; $\alpha, \alpha', \alpha''$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ die Cosinus der Winkel, welche die Linien ds', ds'', ds''' mit den Axen der x, y, z bilden, so findet man aus (6) und (7), da $a = \frac{dx}{ds'}$, $a' = \frac{dy}{ds'}$, $a'' = \frac{dz}{ds'}$ ist:

$$(10)\quad a=\frac{\mu\nu\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}{bc\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}},\quad a'=\frac{\varrho\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}},$$

$$a''=\frac{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}.$$

Aehnliche Werthe ergeben sich für die anderen Cosinus. Aus (10) folgt:

In einem Krümmungslinien-Viereck auf einem Ellipsoid oder Hyperboloid sind die Cosinus der Winkel, welche die Normalen der Fläche mit einer der Axen bilden, proportionirt.

In einem früheren Aufsatze (Ueber einige Sätze der höheren Geometrie, Archiv. Thl. XXXIII. S. 111.) habe ich folgendes Theorem von Chasles aus den Formeln (1) abgeleitet. Wenn man durch einen Punkt A oder (ϱ, μ, ν) drei Normalen der Flächen (ϱ), (μ), (ν) zieht und auf demselben Stücke abschneidet $=\varrho$, μ und ν, so sind diese die Halbaxen eines Ellipsoids E, welches die yz-Ebene im Ursprung O berührt, und dessen parallel mit dieser Ebene gelegter Diametralschnitt die constanten Halbaxen b und c hat. Wenn sich nun der Punkt (ϱ, μ, ν) auf einer Ebene L bewegt, welche mit den Normalen ϱ, μ und ν die Winkel i, i', i'' bildet, so sind die Perpendikel, welche von den Endpunkten dieser Normalen auf L herabgelasssen werden, gleich $\varrho\sin i$, $\mu\sin i'$, $\nu\sin i''$, und da die Quadratsumme der von den Endpunkten dreier konjugirten Semidiameter eines Ellipsoids auf eine Diametral-Ebene gefällten Perpendikel konstant ist, so haben wir:

$$(11)\quad \ldots\ldots \quad \varrho^2\sin^2 i+\mu^2\sin^2 i'+\nu^2\sin^2 i''=\alpha^2.$$

Hier bedeutet α^2 die Quadratsumme der von den Endpunkten der konjugirten Semidiameter OA, b und c auf L gefällten Perpendikel. Bewegt sich A auf L, so ist α^2 konstant; kommt der Punkt A in eine solche Lage, dass eine der drei durch ihn gehenden homofokalen Flächen L tangirt, so verwandelt sich die linke Seite von (11) in das Quadrat der grossen Halbaxe dieser tangirenden Fläche, also ist diese Halbaxe $=\alpha$. Die Fläche selbst nennen wir (α). Wenn in (11) der Punkt (ϱ, μ, ν) als fest angenommen wird und die Fläche (α) als gegeben, so ist (11) die Gleichung des Kegels, dessen Spitze (ϱ, μ, ν) ist und welcher (α) tangirt. Die Variabelen sind die Winkel i, i', i''. Wir betrachten die Normalen der in (ϱ, μ, ν) zusammenstossenden Flächen (ϱ), (μ) und (ν) als Coordinatenaxen, und zwar sollen die Normalen von (ϱ), (μ) und (ν) die Axen der ξ, η und ζ sein. Für irgend einen Punkt (ξ, η, ζ), der auf der Normale von L liegt, ist:

$$\sin^2 i = \frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad \sin^2 i' = \frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad \sin^2 i'' = \frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2};$$

nach (11) ist:

$$(\varrho^2-\alpha^2)\xi^2+(\mu^2-\alpha^2)\eta^2+(\nu^2-\alpha^2)\zeta^2=0.$$

Diess ist die Gleichung des Ergänzungskegels von demjenigen, welchen die Ebenen L einhüllen; der Kegel selbst hat also die Gleichung:

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\xi^2}{\varrho^2-\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\mu^2-\alpha^2}+\frac{\zeta^2}{\nu^2-\alpha^2}=0;$$

die Gleichungen der Fokal-Linien sind:

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}}{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}\zeta, \quad \eta=0;$$

da ϱ, μ und ν konstant sind, so folgt hieraus:

Alle konzentrischen Berührungskegel homofokaler Ellipsoide oder Hyperboloide sind homofokal (haben dieselben Fokal-Linien), welchen Satz **Chasles** (Aperçu historique) und **Jacobi** (Crelle's Journal) angegeben haben.

Die Gleichung des Berührungskegels einer zweiten homofokalen Fläche (β), dessen Spitze auch (ϱ, μ, ν) ist, heisst:

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\xi^2}{\varrho^2-\beta^2}+\frac{\eta^2}{\mu^2-\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\nu^2-\beta^2}=0.$$

(12) und (13) sind die Gleichungen einer gemeinsamen Tangente der homofokalen Flächen (α) und (β). Da nun zwei homofokale Kegel sich senkrecht schneiden, so folgt hieraus, dass sich durch die gemeinschaftliche Tangente zwei Ebenen legen lassen, wovon die erste (α) berührt und auf (β) senkrecht steht; die andere berührt (β) und steht auf (α) senkrecht; mit anderen Worten:

Die scheinbaren Umrisse zweier homofokalen Flächen verschiedener Art stehen auf einander senkrecht, von welchem Punkt aus sie auch betrachtet werden mögen.

Solche Flächen können also die Krümmungsmittelpunkte Einer dritten Fläche (λ) enthalten; diese hat die Eigenschaft, dass die Normalen, deren Fusspunkte eine Krümmungslinie auf ihr bilden, (α) (oder (β)) in einer geodätischen Linie berühren. (**Monge, analyse appliquée à la géometrie**, 5me éd., pag. 136., 137.) Die Berührungspunkte derselben Normalen mit (β) (oder (α)) bil-

den eine andere Linie, deren Natur mit derjenigen der geodätischen Linie auf (α) (oder (β)) eng zusammenhängt, und die ich desshalb **konjugirte geodätische Linie** nenne; denn ihre konjugirten Tangenten sind Tangenten der geodätischen Linie. Die Gleichungen beider Arten von Linien lassen sich aus (11) unmittelbar ableiten mit Hülfe der so eben angeführten Betrachtungen, wie diess **Chasles** zuerst gethan hat. Man findet nämlich:

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2,$$

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad \mu_{,}^2 \cos^2 i_{,} + \nu_{,}^2 \sin^2 i_{,} = \beta^2.$$

(14) ist die **Liouville**'sche Gleichung für geodätische Linien auf dem Ellipsoid (β), deren Tangenten die homofokale Fläche (α) berühren. Im Punkte (β, μ, ν) bildet diese Tangente mit der Krümmungslinie $\beta =$ const., $\mu =$ const. den Winkel i. Alle Tangenten der Linie (14) berühren die homofokale Fläche (α) in einer konjugirten geodätischen Linie, deren Gleichung in (15) enthalten ist. Im Punkte (α, μ', ν') auf (α) bildet die konjugirte Tangente der letzteren Linie mit der Krümmungslinie $\alpha =$ const., $\mu' =$ const. den Winkel i'. Wir können aus (15) einige Eigenschaften konjugirter geodätischer Linien ableiten.

Wenn in einem Punkte auf (α) zwei Linien zusammentreffen, für welche β denselben Werth hat, so ist

$$\mu_{,}^2 \cos^2 i_{,} + \nu_{,}^2 \sin^2 i_{,} = \mu_{,}^2 \cos^2 i_{,,} + \nu_{,}^2 \sin^2 i_{,,},$$

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad i_{,} = i_{,,}.$$

Solche Linien stehen gehörig verlängert auf der Krümmungslinie $\beta =$ const. von (α) senkrecht. Die Formel (16) enthält also den Satz:

Zwei konjugirte geodätische Linien eines Ellipsoids oder Hyperboloids, welche auf Einer Krümmungslinie der Fläche senkrecht stehen, bilden in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt mit einer zweiten Krümmungslinie gleiche Winkel mit derselben.

$i_{,}$ und $i_{,,}$ sind die Winkel, welche die conjugirten Tangenten beider Linien im Durchschnittspunkt mit der Krümmungslinie $\mu_{,} =$ const. bilden, und da diese Winkel nach (16) gleich sind, so sind es auch die Winkel, welche die Linien selbst mit dieser Krümmungslinie bilden. Aus (15) folgt:

$$\sin i_{,} = \frac{\sqrt{\mu_{,}^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu_{,}^2 - \nu_{,}^2}}, \quad \cos i_{,} = \frac{\sqrt{\beta^2 - \nu_{,}^2}}{\sqrt{\mu_{,}^2 - \nu_{,}^2}}.$$

In A schneiden sich zwei konjugirte geodätische Linien, deren konjugirte Tangenten auf einander senkrecht stehen, also ist

$$\sin i_{,} = \cos i_{,,} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{\mu_{,}^2 - \beta^2}{\mu_{,}^2 - \nu_{,}^2}} = \sqrt{\frac{\beta_{,}^2 - \nu_{,}^2}{\mu_{,}^2 - \nu_{,}^2}},$$

$$(17) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mu_{,}^2 + \nu_{,}^2 = \beta^2 + \beta_{,}^2 = \text{const.}$$

Nun ist der vom Mittelpunkt nach A gezogene Halbmesser $= a^2 + \mu_{,}^2 + \nu_{,}^2 - b^2 - c^2$, also auch konstant; hierauf beruht der Satz:

Wenn sich in einem Punkte zwei konjugirte geodätische Linien treffen, welche auf zwei bestimmten Krümmungslinien senkrecht stehen, und die sich so schneiden, dass ihre konjugirten Tangenten einen rechten Winkel mit einander bilden, so bewegt sich der Punkt auf dem Durchschnitt der Fläche mit einer concentrischen Kugel.

Nach dem Theorem von **Euler** besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\cos^2 i + \frac{1}{R'}\sin^2 i.$$

Wenden wir dieselbe auf die geodätischen und konjugirten geodätischen Linien der centrischen Flächen zweiten Grades an. R und R' sind die Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids (ϱ) in dem Punkte, wo es von den homofokalen Hyperboloiden (μ) und (ν) geschnitten wird; also:

$$R = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}^3}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}, \quad R' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}^3\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}};$$

i ist der Winkel, welchen die Tangente der geodätischen Linie mit der Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ macht. r ist der Krümmungshalbmesser der geodätischen Linie und also zugleich des durch die Tangente gehenden Normalschnitts der Fläche. Durch Substitution der Werthe von R und R' in die obige Gleichung erhalten wir:

$$(18) \quad \frac{1}{r} = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}^3\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}^3}\{\varrho^2 - (\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i)\}.$$

Da nun nach dem Satze von **Liouville** $\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i = \text{const.}$ ist längs aller geodätischen Linien, welche Eine Krümmungslinie von (ϱ) tangiren oder durch einen Nabelpunkt der Fläche gehen, so ist auch:

$$\frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}^3\sqrt{\varrho^2-\nu^2}^3}{r}=\text{const. oder } \frac{D^3 . D'^3}{r}=\text{const.}$$

D und D' sind die Halbaxen desjenigen Diametralschnitts der Fläche, welcher der Tangential-Ebene im Punkt (ϱ, μ, ν) parallel ist. $D.D'.\pi$ ist der Inhalt dieses Diametralschnitts, somit haben wir:

Längs aller geodätischen Linien auf einem Ellipsoid oder Hyperboloid, welche Eine Krümmungslinie der Fläche tangiren oder durch einen Nabelpunkt gehen, ist das Verhältniss der dritten Potenz des Inhalts von dem der Tangential-Ebene parallelen Diametralschnitte zum Krümmungshalbmesser der Linie konstant.

Die ganze Beweisführung lässt sich auch auf die konjugirten geodätischen Linien übertragen, wenn man in (18) unter r den Krümmungshalbmesser des der konjugirten Tangente der Linie entsprechenden Normalschnitts der Fläche versteht, und unter i den Winkel begreift, welchen diese Tangente mit der Krümmungslinie $\mu=$const. bildet.

m und m' sind die Endpunkte eines Linienelements auf einer Fläche; mq und $m'q'$ sind die Normalen der Fläche, und zwar sind qq' diejenigen Punkte, welche die kleinste Entfernung zwischen beiden Normalen angeben, aber die Linie qq' ist senkrecht auf jeder Normale. Joachimsthal nennt mq die Poldistanz des Elements mm' und findet dafür den Werth:

$$\varDelta=\frac{\frac{1}{R}\cos^2 i+\frac{1}{R'}\sin^2 i}{\frac{1}{R^2}\cos^2 i+\frac{1}{R'^2}\sin^2 i};$$

i ist der Winkel zwischen mm' und der durch m gehenden Krümmungslinie. Es mag hier erwähnt werden, dass Poisson zuerst den Gedanken hatte, die kürzeste Entfernung zwischen zwei unendlich nahen Flächen-Normalen zu berechnen (Journal de l'école polytechnique, sur la courbure des surfaces, cahier 21, page 205.). Setzen wir nun in diese Gleichung die oben angegebenen Werthe von R und R' für das Ellipsoid (ϱ) ein, so erhalten wir nach einigen Reduktionen:

$$(19) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varDelta=p^2\frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}.$$

In demjenigen Diametralschnitte von (ϱ), welcher der Tangential-Ebene des Elements mm' parallel ist, ziehe man einen Semidia-

meter parallel mm' und fälle vom Mittelpunkte auf die durch den Endpunkt dieses Semidiameters gehende Tangente des Schnitts ein Perpendikel, so bedeutet in (19) p die Grösse dieses Perpendikels.

Das vom Mittelpunkte auf die Tangential-Ebene gefällte Perpendikel sei P, so hat man dafür den Werth in elliptischen Coordinaten:

$$P = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}},$$

also

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta = \frac{p^2}{P}.$$

Hierin ist folgendes Theorem enthalten:

Auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist ein Linienelement gegeben; man ziehe in dem Diametralschnitte der Fläche, welcher der durch dieses Element gehenden Tangential-Ebene parallel ist, einen Semidiameter parallel dem Elemente, so ist das Quadrat des Perpendikels, welches vom Mittelpunkte auf die durch den Endpunkt dieses Semidiameters gehende Tangente des Schnitts gefällt wird, gleich der Poldistanz des Elements multiplizirt mit dem vom Mittelpunkte auf die Tangential-Ebene herabgelassenen Perpendikel.

Dieser Satz gilt allgemein für irgend eine Linie auf der Fläche. Bei den Krümmungslinien wird die Poldistanz gleich dem Hauptkrümmungs-Halbmesser der Fläche, und p fällt zusammen mit einer Halbaxe D oder D' des der Tangential-Ebene parallelen Diametralschnitts, also ist:

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad R = \frac{D^2}{P}, \quad R' = \frac{D'^2}{P}, \quad R : R' = D : D',$$

welches der Satz von Dupin ist.

Jede Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist charakterisirt durch die Formel

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad P.\delta.\delta'.\sin\alpha = \text{const.}$$

δ ist der Semidiameter der Fläche, welcher parallel der Tangente der Linie ist, δ' der konjugirte Semidiameter in dem Diametralschnitte, der parallel der Tangential-Ebene ist; α der Winkel zwischen beiden. Bei den geodätischen Linien ist $P.\delta = \text{const.}$ (Joachimsthal), also auch:

(23) . . . . $\delta'.\sin\alpha = \text{const.}$

Bei den konjugirten geodätischen Linien ist $P.\delta' = \text{const.}$ (Chasles), mithin auch:

(24) . . . . $\delta.\sin\alpha = \text{const.}$

$\delta.\sin\alpha$ ist nach der obigen Erklärung offenbar $= p$, also haben wir nach (20):

(25) . . . . $\Delta.P = \text{const.}$

Hierin ist dieser Satz ausgedrückt:

Längs einer conjugirten geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt der Poldistanz eines Linienelements und des vom Mittelpunkte auf die Tangential-Ebene gefällten Perpendikels konstant.

XX.

Interessante Abänderung des Ausspruchs des Gesetzes der gewöhnlichen Lichtbrechung.

Von

Herrn Dr. *Wilh. Matzka,*

Professor der Mathematik an der Hochschule zu Prag.

Die folgende Umstaltung des bekannten Lehrsatzes über die gewöhnliche Brechung des Lichtes beim Uebergange aus einem Mittel in ein anderes angrenzendes, von welchem jener über die Zurückwerfung des Lichtes nur eine Besonderheit ist, entsprang aus meiner (im Januar 1857 stattgefundenen) genaueren Erwägung eines in meinen wiederholten Vorträgen über die gegenseitige Stellung von Geraden und Ebenen im Raume behandelten, so wie

auch in manche Lehrbücher der Geometrie (z. B. in L. Schulz von Strassnicki's Elemente der reinen Mathematik, 2. Theil, Geometrie. Wien 1835, S. 196.) aufgenommenen Lehrsatzes über den Zusammenhang der Winkel einer geraden Linie mit den in einer, von ihr durchstochenen Ebene enthaltenen Geraden. Sie dürfte einer weiteren Bekanntmachung im Kreise der mathematischen Physiker wohl sicher für würdig erachtet werden.

II.

1. Wenn ein Lichtstrahl durch eine Trennungsebene zweier Mittel hindurchgeht, wird er an ihr gewöhnlich dergestalt gebrochen, dass das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels ε zum Sinus des Refractions- oder Brechungswinkels ϱ von der Grösse dieser Winkel unabhängig und dem in dieser Hinsicht beständigen Verhältnisse $n:1$ gleich ausfällt, wo n der Brechungsindex oder Brechungsexponent genannt zu werden pflegt; also dass sich verhält

$$\sin\varepsilon : \sin\varrho = n : 1.$$

2. Man weiss, dass der Neigungswinkel*) einer geraden Linie a (Taf. III. Fig. 1.) gegen jede Normale oder jedes Loth p einer Ebene $\mathfrak{A}$ sich mit ihrem Neigungswinkel gegen diese Ebene, oder eigentlich gegen ihre Projection a' in dieselbe Ebene, zu einem rechten Winkel ergänzt, nemlich dass

$$\widehat{a.p} + \widehat{a.\mathfrak{A}} = \widehat{a.p} + \widehat{a.a'} = 90^\circ$$

ist. Sonach ist der Sinus jenes ersteren Winkels der Cosinus dieses letzteren, und man kann deswegen die Sinus der obigen zwei Winkel ε, ϱ durch die Cosinus der Neigungswinkel ε', ϱ' des einfallenden und gebrochenen Strahles gegen die Trennungsebene $\mathfrak{A}$ ersetzen, so dass sich auch verhält

$$\cos\varepsilon' : \cos\varrho' = n : 1.$$

3. Der Cosinus des Winkels einer in eine Ebene $\mathfrak{A}$

---

*) Unter Neigungswinkel zweier unbegrenzter oder voller Geraden begreife ich immer den kleinsten Winkel der Richtungen dieser beiden Geraden; weshalb derselbe nie stumpf und insbesondere bei gleichlaufenden Geraden Null, bei schiefen Geraden spitz, bei senkrechten aber recht ist, oder kurz immer im ersten Winkelquadranten liegt, von 0° bis 90° sich erstreckt.

einschneidenden Geraden a mit einer beliebigen Geraden d der Ebene gleicht dem Producte aus dem Cosinus des Neigungswinkels jener Geraden a gegen diese Ebene oder gegen ihre Projection a' in die Ebene und aus dem Cosinus des Winkels dieser Projection mit jener willkürlichen Geraden, vorausgesetzt, dass jede Gerade nach einer gewissen ihrer beiderlei Richtungen genommen werde; nemlich es ist:

$$\cos(a.d) = \cos \widehat{a.a'} . \cos(a'.d).$$

Denn projicirt man von der Geraden a irgend eine Strecke $OA = r$ zuvörderst mittelbar auf die Gerade d, d. i. zuerst in die Ebene $\mathfrak{E}$ nach OA' und dann noch diese Projection auf die beliebige Gerade d nach OD; so bildet dort OA mit ihrer Projection OA' immer den Neigungswinkel der a mit ihrer Projection a', folglich ist:

$$OA' = r \cos \widehat{a.a'},$$

und dabei eben so wie dieser Cosinus jedesmal positiv; hier aber ist

$$OD = OA' . \cos A'OD.$$

Nun ist entweder (wie in Taf. III. Fig. 1.) der Winkel $(a'.d)$ spitzig, also $A'OD = (a'.d)$, oder es ist (wie in Taf. III. Fig. 2.) der Winkel $(a'.d)$ stumpf, also $A'OD = 180^\circ - (a'.d)$. Dort liegt D und OD auf der Halbaxe d selbst, hier aber auf der ihr entgegengesetzten Halbaxe $\bar{d}$, oder die dortige Strecke OD ist positiv, die hiesige dagegen negativ; und somit findet man:

$$OD = \pm r \cos \widehat{a.a'} \cos(a'.d).$$

Projicirt man nunmehr noch die Strecke $OA = r$ direct (geradezu) auf die Gerade d auf OD, so ist jedenfalls

$$OD = r \cos AOD;$$

allein jenachdem $(a'.d)$ spitz oder stumpf ist, folglich OD auf d oder $\bar{d}$ fällt, muss auch der Winkel $(a.d)$ spitz oder stumpf, daher entweder $AOD = (a.d)$ oder $= 180^\circ - (a.d)$ sein, und hiernach ist:

$$OD = \pm r \cos(a.d);$$

folglich gibt die Gleichstellung der beiden für OD gefundenen Ausdrücke die behauptete Gleichheit:

$$\cos(a.d) = \cos \widehat{a.a'} . \cos(a'.d).$$

Sollte insbesondere d auf a' senkrecht stehen, so ist die Projection OD der OA' auf die d Null, oder der Punkt D fällt auf O; mithin muss, weil D oder O auch die directe Projection des Punktes A der a auf die d ist, die a ebenfalls auf d senkrecht sein. In diesem Falle verschwinden die $\cos(a'.d)$ und $\cos(a.d)$ zugleich, also auch beide Ausdrücke der Projection OD, und sohin gilt die gefundene Endgleichung auch noch in diesem Sonderfalle. — Diese Gleichung behält endlich ihre Giltigkeit auch dann noch, wenn die Gerade a die Ebene $\mathfrak{A}$ nicht schneidet, sondern zu ihr gleichläuft. Denn da ist sie auch zu ihrer Projection a' gleichläufig, mithin sind diese beiden Geraden a und a' gegen jede dritte Gerade, also auch gegen jede in der Ebene $\mathfrak{A}$ liegende Gerade d gleich geneigt. Sonach ist $\widehat{a.a'}=0$ und $(a.d)=(a'.d)$, folglich gilt auch da noch diese allgemeine Gleichung.

4. Als Winkel zweier geraden Linien überhaupt, welche entweder in ihrer ganzen unendlichen Erstreckung nirgends zusammentreffen, wie gleichlaufende und gekreuzte (nicht in einerlei Ebene gelegene) Geraden, oder deren Treffpunkt nicht geradehin vorliegt, pflegt man die Winkel anzusehen, welche eine der beiden Geraden mit einer, durch irgend einen ihrer Punkte zur anderen parallel geführten Geraden einschliesst, oder auch welche zwei durch einen beliebigen Punkt zu ihnen gleichlaufend gezogene Geraden mit einander machen. Mithin kann man anstatt der so eben betrachteten in der Ebene $\mathfrak{A}$ liegenden und durch den Einschnitt O der Geraden a gehenden beliebigen Geraden d nicht allein jede irgendwo in dieser Ebene, sondern auch jegliche wo immer ausserhalb derselben Ebene zu ihr parallel gezogene Gerade g, daher kurz jede zur Ebene $\mathfrak{A}$ gleichlaufende oder gegen die Normale p der Ebene senkrechte gerade Linie g wählen. Für sie ist nemlich $(a.d)=(a.g)$ und $(a'.d)=(a'.g)$, mithin auch:

$$\cos(a.g)=\cos\widehat{a.a'}.\cos(a'.g).$$

II.

Seien nun zwei das Licht durchlassende Mittel an einer Grenz- oder Uebergangsstelle durch eine Ebene $\mathfrak{A}$ von einander getrennt (Taf. III. Fig. 3.), der einfallende Lichtstrahl a, welcher im Einfallspunkte O mit dem Einfallslothe p den spitzigen Einfallswinkel ε macht, werde auf der Kehrseite der Ebene vom zweiten Mittel nach der Richtung b gebrochen, welche mit dem neuen

Einfallslothe $\bar{p}$, der entgegengesetzten Richtung des ersten, den spitzen Brechungswinkel $\varrho = (\bar{p}.b)$ bildet *). Dann liegt bekanntlich der gebrochene Strahl b auch in der Einfallsebene ap, welche, weil sie das Einfallsloth $p\bar{p}$ enthält, auf der Trennungsebene $\mathfrak{A}$ nothwendig senkrecht steht und somit auf ihren (geraden) Einschnitt $a'b'$ in die Trennungsebene den ganzen Strahl projicirt; wobei zugleich die Projectionen a' und b' beider Strahlhälften a und b gleich gerichtet ausfallen. Sonach sind die Neigungswinkel ε' und ϱ' der beiden Strahlen gegen die Scheidungsebene $\widehat{a.a'}$ und $\widehat{b.b'}$, und das Brechungsverhältniss ist:

$$n:1 = \cos\widehat{a.a'} : \cos\widehat{b.b'}.$$

Nunmehr sei g eine wo immer zur Scheidungsebene $\mathfrak{A}$ der zwei Mittel gleichlaufend oder auf ihre Normallinie $p\bar{p}$ senkrecht geführte Gerade; dann bestehen für die Halbaxen a und b, zufolge der Sätze 3. und 4. in I., die beiden Beziehungsgleichungen:

$$\cos(a.g) = \cos\widehat{a.a'}.\cos(a'.g),$$

$$\cos(b.g) = \cos\widehat{b.b'}.\cos(b'.g),$$

und, weil a' und b' einerlei Richtung haben, ist $(a'.g) = (b'.g)$. Demnach ist das Verhältniss

$$\cos(a.g):\cos(b.g) = \cos\widehat{a.a'} : \cos\widehat{b.b'},$$

oder dem Vorigen gemäss:

$$\cos(a.g):\cos(b.g) = n:1.$$

Sohin erhalten wir folgenden, bisher in keinem physikalischen Handbuche verzeichneten, allgemeinen und beachtungswerthen Satz:

---

*) Bei dieser Messungsweise des Einfalls- und Brechungswinkels besteht, weil man beide stets als spitz darzustellen beabsichtigt, bei den Physikern die bekannte Gepflogenheit, alle vier Richtungen, der beiderlei Einfallslothe und beider Strahlhälften, vom Einfallspunkte aus, theils ins erste Mittel zurück, theils ins zweite vorwärts, zu erfassen, mithin den einfallenden Lichtstrahl in seiner entgegengesetzten Richtung zu nehmen, so dass der Einfallswinkel $\varepsilon = (a.\bar{p}) = 180° - (a.p)$ ist. Eigentlich versteht man unter Einfalls- und Brechungswinkel kurz den Neigungswinkel des einfallenden und gebrochenen Strahles gegen das Einfallsloth oder die Normallinie der Trennungsebene der Mittel.

Bei der (einfachen oder gewöhnlichen) Brechung des Lichtes an einer, zwei Mittel scheidenden, Ebene ist das beständige sogenannte Brechungsverhältniss (des Brechungsexponenten n zur Eins) auch gleich dem Verhältnisse der Cosinus der Winkel, welche der einfallende und gebrochene Lichtstrahl, nach der Richtung ihrer Fortpflanzung genommen, mit was immer für einer zur Trennungsebene gleichlaufenden oder zu ihrem Lothe senkrechten Richtung bilden.

Der Satz schliesst schon die wichtige Bedingung in sich, dass die Verlängerung des einfallenden Lichtstrahls über den Einfallspunkt hinaus mit dem gebrochenen Strahle auf einerlei Seite des Einfallslothes, nemlich auf dessen Rückseite, falle; weil ja der Bedingung $(a'.g)=(b'.g)$ gemäss die Projectionen jener zwei Richtungen auf die Trennungsebene genau dieselben sein müssen.

III.

Die Brechung des Lichtes übergeht in Zurückwerfung (Reflexion), wenn die Neigungswinkel des einfallenden und gebrochenen Lichtstrahles gegen das Einfallsloth gleich ausfallen, also $\varrho=\varepsilon$ wird, ohne dass beide Strahlen in einerlei Geraden bleiben. In diesem Falle bildet nemlich die Richtung des zurückgeworfenen Strahles b (Taf. III. Fig. 4.) mit dem Einfallslothe p auf dessen Kehrseite einen eben so grossen spitzen Winkel, als welchen die entgegengesetzte Richtung des einfallenden Lichtstrahls a mit demselben Lothe auf dessen Vorderseite macht; jener Reflexionswinkel ist also diesem Einfallswinkel gleich.

Da wird demnach der Brechungsindex $n=1$, folglich $\cos(a.g) = \cos(b.g)$, also auch der Winkel $(a.g)=(b.g)$.

Dies ist in der That richtig, wie man sich überzeugt, wenn man die Richtung a des einfallenden Strahles jenseits der zurückwerfenden Ebene $\mathfrak{A}$ nach $\dot{a}$ verlängert und durch den Einfallspunkt O und die Gerade g die Ebene legt, welche die Ebene $\mathfrak{A}$ in der zur g parallelen geraden Linie schneidet. Denn so wie $a\dot{a}$ und b gegen das Einfallsloth p gleich geneigt sind, eben so sind sie auch gegen die Ebene $\mathfrak{A}$ oder gegen ihre gemeinschaftliche Projection $a'b'$ in diese Ebene gleich geneigt, nemlich es ist $\dot{a}\hat{.}b'=a\hat{.}b'=b\hat{.}b'$. Allein die Reflexionsebene, welche die Geraden $a\dot{a}$, p, b und b' enthält, steht auf der Rückstrahlungsebene $\mathfrak{A}$ senkrecht; mithin

macht jede in dieser Ebene $\mathfrak{A}$ gezogene Richtung d mit den beiden Geraden $\dot{a}$ und b gleiche Winkel, nemlich es ist $(\dot{a}.d) = (a.d) = (b.d)$. Da endlich $d \parallel g$ ist, muss auch $(a.g) = (b.g)$ sein.

Weil man in den analytischen Rechnungen über den Gang der Lichtstrahlen den Winkel ϱ als den Winkel des zweiten Einfallslothes $\bar{p}$ mit dem gebrochenen Strahle ansieht, nemlich $\varrho = (\bar{p}.b)$ setzt, und weil für $n = 1$ der $\sin\varrho = \sin\varepsilon$ wird, so kann man entweder

$$\varrho = \varepsilon \quad \text{oder} \quad \varrho = 180^\circ - \varepsilon$$

setzen. Die Satzung

$$\varrho = \varepsilon$$

findet bei der Brechung des Lichtes statt, wenn in einer Reihe aus Paaren von Mitteln der Index n der Grenze 1 zustrebt. Die Satzung

$$\varrho = 180^\circ - \varepsilon$$

dagegen findet erst für die Zurückwerfung des Lichtes statt.

Hieraus folgt, dass der in II. für die Brechung des Lichtes erwiesene Lehrsatz auch für dessen Zurückwerfung gilt, wenn man nur den Brechungsexponenten $n = 1$ und den Brechungswinkel $\varrho = 180^\circ - \varepsilon$ sein lässt.

IV.

Werden die beiden das Licht durchlassenden Mittel durch eine krumme Fläche geschieden oder wird das Licht in einem und demselben Mittel von einer krummen Spiegelfläche zurückgeworfen, so kann, weil der einfallende Lichtstrahl jederzeit einfach vorausgesetzt wird und er somit diese Trennungs- oder Spiegelfläche blos in einem einzigen Punkte trifft, die an diesem Einfallspunkte zur Fläche legbare Berührungsebene die Fläche selbst ersetzen. Somit kommt dieser Fall der krummen Scheidungsflächen auf jenen der vorhin betrachteten ebenen zurück, oder man hat bei ihnen als Einfallsloth blos die Normale der krummen Trennungsfläche im Einfallspunkte anzusehen.

Die Hauptvortheile bietet der von mir aufgestellte Ausspruch des Lichtbrechungsgesetzes bei analytischer Behandlung der auf Brechung oder Zurückwerfung des Lichtes Bezug habenden Aufgaben mittels rechtwinkeliger Coordinaten; weil hierbei leicht die Cosinus der Winkel gerader Linien aus ihren Richtcosinus

berechnet werden können. Die Auflösung der nachfolgenden zwei Aufgaben wird dies ersichtlich machen.

V.

Erste Aufgabe. Die Trennungsebene zweier Mittel und der einfallende Lichtstrahl seien gegeben, man sucht a. den gebrochenen und b. den zurückgeworfenen Lichtstrahl.

1. Zur positiven (oder Vorder-) Seite der Trennungsebene $\mathfrak{A}$ wählen wir diejenige, auf welcher der Anfang der rechtwinkligen Coordinatenaxen der x, y, z liegt; und positiv lassen wir diejenige Richtung ihrer Normale oder des Einfallslothes sein, welche von der Trennungsebene aus auf die positive Seite derselben geht. Die Cosinus der Richtwinkel *) dieser Normale seien a, b, c; der (senkrechte) Abstand der Trennungs- oder brechenden Ebene $\mathfrak{A}$ vom Coordinatenanfange, im positiven Sinne von jener Ebene zu diesem Punkte gezählt, sei d; und die Coordinaten eines laufenden (wandelbaren) Punktes derselben Ebene seien x, y, z; dann ist die Gleichung dieser Ebene

$$ax + by + cz = d. \tag{1}$$

Denken wir uns einen Punkt $\xi\eta\zeta$ im Raume auf der Vorderseite der brechenden Ebene $\mathfrak{A}$, durch ihn zu dieser Ebene eine andere parallel gelegt, und diese stehe um δ vom Coordinatenursprunge ab, so ist in gleicher Weise dieser (gleichfalls von der Ebene aus zum Punkte hin gezählte oder an der Ebene anfangende) Abstand

$$a\xi + b\eta + c\zeta = \delta. \tag{2}$$

Auf dass nun dieser Punkt $\xi\eta\zeta$ auf der Vorderseite der Ebene $\mathfrak{A}$ liege, muss die Entfernung der durch ihn parallel gelegten Hilfsebene von der $\mathfrak{A}$, nemlich der Unterschied $\delta - d$, **positiv** ausfallen.

Aus einem solchen vorderen Punkte $\xi\eta\zeta$ gehe nun ein Lichtstrahl aus, positiv im Sinne seines Fortschrittes gerichtet, habe die Richtcosinus α, β, γ und einen laufenden von $\xi\eta\zeta$ um r abstehenden Punkt x, y, z; dann sind seine Gleichungen:

---

*) Richtwinkel einer Geraden heissen hier die hohlen Winkel, welche die positive Richtung dieser Geraden mit den positiven Richtungen der drei winkelrechten Coordinatenaxen der x, y, z bildet. Ihre Cosinus nenne ich später kurz die **Richtcosinus** jener Geraden.

$$(3) \qquad \frac{x-\xi}{\alpha}=\frac{y-\eta}{\beta}=\frac{z-\zeta}{\gamma}=r.$$

Dieser einfallende Lichtstrahl treffe die Scheidungsebene $\mathfrak{A}$ in einem Punkte $\xi'\eta'\zeta'$ (dem Einfallspunkte) im Abstande k von $\xi\eta\zeta$, so liefern diese Gleichungen (3) in Verbindung mit der (1) die Bestimmungsgleichungen

$$(4') \qquad \xi'=\xi+\alpha k, \quad \eta'=\eta+\beta k, \quad \zeta'=\zeta+\gamma k,$$

$$(4'') \qquad a\xi'+b\eta'+c\zeta'=d.$$

Die entgegengesetzte Richtung dieses Lichtstrahls, deren Richtcosinus $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ sind, macht mit dem Einfallslothe (a, b, c) den (spitzigen) Einfallswinkel ε, mithin findet sich dieser Hilfswinkel aus der Bestimmungsgleichung

$$(5) \qquad \cos\varepsilon=-(a\alpha+b\beta+c\gamma),$$

wofern der dem Gleichheitszeichen folgende Ausdruck sich positiv ausweist. Multiplicirt man nun die drei ersten Gleichungen (4) mit a, b, c, so gibt ihre Summe nach geringen Umstaltungen:

$$(6) \qquad k=\frac{d-\delta}{\cos\varepsilon},$$

wonach die Gleichungen (4′) sofort die Coordinaten $\xi'\eta'\zeta'$ des Einfallspunktes vollständig bestimmen.

2. Von ihm geht der **gebrochene** Lichtstrahl aus auf die negative oder Kehrseite der Trennungsebene ins zweite Mittel; positiv gerichtet im Sinne seiner Fortpflanzung habe er die fraglichen Richtcosinus $\alpha'\beta'\gamma'$ und mache mit der entgegengesetzten Richtung $(-a, -b, -c)$ des Einfallslothes den spitzen Brechungswinkel ϱ, dann muss der Ausdruck

$$(7) \qquad \cos\varrho=-(a\alpha'+b\beta'+c\gamma')$$

entschieden positiv ausfallen. Zur Bestimmung dieser Richtcosinus $\alpha'\beta'\gamma'$ benützen wir eine beliebige, auf dem Einfallslothe (a, b, c) senkrechte Richtung, deren Richtcosinus zu den Zahlen A, B, C proportionirt sein mögen und für die demnach die Bedingung

$$aA+bB+cC=0$$

besteht. Dann sind die Cosinus der Winkel dieser Hilfsrichtung mit den Richtungen (α, β, γ) und $(\alpha', \beta', \gamma')$ des einfallenden und gebrochenen Strahles proportionirt zu den Summen

$$\alpha A+\beta B+\gamma C \quad \text{und} \quad \alpha' A+\beta' B+\gamma' C,$$

und gemäss unseres Ausspruches des Brechungsgesetzes (in Art. II.) ihr Verhältniss gleich dem Brechungsverhältnisse, das wir, zur Erzielung von Symmetrie in unseren späteren Rechnungsformen, durch $\frac{1}{n}:\frac{1}{n'}$ darstellen wollen. Sohin ist:

$$(\alpha A+\beta B+\gamma C):(\alpha' A+\beta' B+\gamma' C)=\frac{1}{n}:\frac{1}{n'}$$

und danach

$$(n'\alpha'-n\alpha)A+(n'\beta'-n\beta)B+(n'\gamma'-n\gamma)C=0.$$

Diese und die vorige Gleichung können bei der Willkür der Zahlen A, B, C mitsammen bekanntlich nur dann bestehen, wenn die Coefficienten dieser Zahlen in einerlei Verhältniss zu einander stehen, also wenn sich verhält:

$$\frac{n'\alpha'-n\alpha}{a}=\frac{n'\beta'-n\beta}{b}=\frac{n'\gamma'-n\gamma}{c}=\frac{m}{1},$$

wenn die Hilfszahl m der Bedingung

$$m^2=(n'\alpha'-n\alpha)^2+(n'\beta'-n\beta)^2+(n'\gamma'-n\gamma)^2$$

genügt. Würden wir selbe bereits kennen, so hätten wir für die gesuchten Richtcosinus α', β', γ' die Bestimmungsgleichungen:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} n'\alpha'&=n\alpha+ma,\\ n'\beta'&=n\beta+mb,\\ n'\gamma'&=n\gamma+mc.\end{aligned}\right.$$

Erheben wir diese zur zweiten Potenz, zählen sie zusammen und beachten die Gleichung (5) mit den bekannten Beziehungsgleichungen

$$a^2+b^2+c^2=1,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$
$$\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1;$$

so erfolgt:

$$m^2-2n\cos\varepsilon.m=n'^2-n^2,$$

und daher die fragliche Hilfszahl:

$$m=n\cos\varepsilon\pm\sqrt{n'^2-n^2\sin\varepsilon^2}.$$

Um über das Doppelzeichen zu entscheiden, multipliciren wir die Gleichungen (8) mit $-a$, $-b$, $-c$, addiren sie und berücksichtigen die Ausdrücke (5) und (7), so erhalten wir:

$$n'\cos\varrho = n\cos\varepsilon - m = \mp\sqrt{n'^2 - n^2\sin\varepsilon^2}.$$

Hieraus ersehen wir nun, weil n, n' als absolute Zahlen angesehen werden und $\cos\varrho$ positiv sein muss, dass obiger Wurzel das untere Zeichen zugeschrieben werden muss, folglich

$$(9) \qquad m = n\cos\varepsilon - \sqrt{n'^2 - n^2\sin\varepsilon^2}$$

zu setzen ist. Noch finden wir eben daraus ganz leicht:

$$n^2\sin\varepsilon^2 = n'^2\sin\varrho^2$$

oder, weil alle vier Potentiande positiv sein müssen, die Wurzelgleichung:

$$(10) \qquad n\sin\varepsilon = n'\sin\varrho \quad \text{oder} \quad \sin\varepsilon : \sin\varrho = \frac{1}{n} : \frac{1}{n'},$$

welche Proportion, da sie uns ohnehin bekannt ist, uns hier nur die Versicherung gewährt, dass wir auf der rechten Bahn uns bewegen.

3. Bezüglich der Berechnung der Hilfszahl m liesse sich noch die Bemerkung beifügen, dass man den positiven $\cos\varepsilon$ aus (5). und aus ihm oder nach dem aus ihm leicht abzuleitenden Ausdrucke

$$(11) \qquad \sin\varepsilon^2 = (b\gamma - c\beta)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 + (a\beta - b\alpha)^2$$

auch noch den positiven $\sin\varepsilon$ berechnen und dann sogleich für ϱ aus obiger Proportion den positiven

$$(12) \qquad \sin\varrho = \frac{n}{n'}\sin\varepsilon$$

auffinden könne, mit dessen Hilfe man endlich die vermittelnde Zahl m aus dem in der Form (9) begründeten Ausdrucke

$$(13) \qquad m = n\cos\varepsilon - n'\cos\varrho$$

ausrechnen kann.

Sobald der Zahlwerth von m bekannt ist, lassen sich sofort gemäss der Gleichungen (8) die allein noch unbekannten Richtcosinus $\alpha'\beta'\gamma'$ des gebrochenen Lichtstrahls ausmitteln und dadurch dieser Strahl vollkommen bestimmen.

Zieht man es vor, die Gleichungen desselben zusammenzustellen, so erhält man, wenn $(x'y'z')$ einen auf ihm wandelnden und vom Einfallspunkte $(\xi'\eta'\zeta')$ um den positiven Fahrstrahl r' abstehenden Punkt bezeichnet, selbe in der Gestalt:

$$(14) \qquad \frac{x'-\xi'}{\alpha'} = \frac{y'-\eta'}{\beta'} = \frac{z'-\zeta'}{\gamma'} = \frac{r'}{1}.$$

Nach Einstellung der für ξ', η', ζ', α', β', γ' gefundenen Ausdrücke findet man endlich die **Gleichungen des gebrochenen Lichtstrahls** in der Gestalt

$$(15) \qquad \frac{x'-\xi-\alpha k}{n\alpha+ma}=\frac{y'-\eta-\beta k}{n\beta+mb}=\frac{z'-\zeta-\gamma k}{n\gamma+mc}=\frac{r'}{n'},$$

worin nur noch k und m durch ihre, gemäss den Ausdrücken (6) und (9) oder (13) zu berechnenden Zahlwerthe zu ersetzen kommen.

4. Der senkrechte Abstand d' der durch den laufenden Punkt $(x'y'z')$ zur brechenden Ebene $\mathfrak{A}$ parallel gelegten Ebene vom Coordinatenursprunge ist, dem Ausdrucke (1) nachgebildet,

$$d'=ax'+by'+cz',$$

daher auch

$$=a(\xi'+\alpha'r')+b(\eta'+\beta'r')+c(\zeta'+\gamma'r')$$
$$=d-r'\cos\varrho;$$

mithin ist die Entfernung des Punktes $(x'y'z')$ des gebrochenen Lichtstrahles von der Trennungsebene $\mathfrak{A}$ selbst:

$$d'-d=-r'\cos\varrho,$$

und sohin, weil r' und $\cos\varrho$ positiv sind, sicher **negativ**; zur Bestätigung, dass **jeder Punkt des gebrochenen Lichtstrahles auf der Kehrseite der** die beiden Mittel **scheidenden Ebene** $\mathfrak{A}$ **liegt.**

5. Noch wollen wir uns die Ueberzeugung verschaffen, dass, wie am Schlusse des Art. II. angeführt wurde, **die Verlängerung des einfallenden Lichtstrahls über den Einfallspunkt hinaus wirklich mit dem gebrochenen Strahle,** in der Einfallsebene, **auf die Rückseite des** vollständigen **Einfallslothes falle.**

Der für die Gleichungen (3) des einfallenden Lichtstrahles vorausgesetzte laufende Punkt (x, y, z) liege über den Einfallspunkt $(\xi'\eta'\zeta')$ hinaus, also um die **positive** Strecke $r-k$ vor ihm, weil jener Punkt um r, dieser um k von dem Ausgangspunkte $(\xi\eta\zeta)$ dieses Strahles absteht. Dann ist denselben Gleichungen entsprechend:

$$(16) \qquad \frac{x-\xi'}{\alpha}=\frac{y-\eta'}{\beta}=\frac{z-\zeta'}{\gamma}=r-k.$$

Mit dieser Strecke $r-k$ des einfallenden Strahles liegt die ebenfalls vom Einfallslothe ausgehende und im wandelbaren Punkte $(x'y'z')$ endende Strecke r' des gebrochenen Lichtstrahles in dem-

selben rechten Winkel des zweiten Einfallslothes mit der rückwärtigen Halbscheid der Einschnittslinie der Einfallsebene in die Trennungsebene, da sie mit diesem Lothe die spitzen Winkel ε und ϱ machen. Ihre Projectionen auf die Trennungsebene $\mathfrak{A}$ sind sonach beziehungsweise

$$(r-k)\sin\varepsilon \text{ und } r'\sin\varrho.$$

Diese Projectionsstrecken können gleich lang werden, also auch mit ihren Endpunkten übereinfallen, wenn zur willkürlichen Strecke r' die andere so bemessen wird, dass

$$(r-k)\sin\varepsilon = r'\sin\varrho$$

ausfalle, nemlich dass

$$r-k=r'\frac{\sin\varrho}{\sin\varepsilon}=r'\frac{n}{n'},$$

mit Bezug auf die Proportion (10) bemessen werde

Dann werden die Endpunkte (x, y, z) und (x', y', z') dieser zwei gegen einander so abgeglichenen Strecken $r-k=r'\frac{n}{n'}$ und r' durch einerlei Senkrechte auf die Ebene $\mathfrak{A}$ projicirt, oder die durch diese zwei Punkte hindurch gehende gerade Linie, deren Richtcosinus sonach den Unterschieden $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ proportionirt sind, muss zum Einfallslothe (a, b, c) parallel sein, folglich muss sich verhalten:

$$\frac{x'-x}{a}=\frac{y'-y}{b}=\frac{z'-z}{c},$$

was in der That zutrifft. Denn nach den Gleichungen (14) des gebrochenen Lichtstrahles ist

$$x'-\xi'=\alpha'r', \quad y'-\eta'=\beta'r', \quad z'-\zeta'=\gamma'r';$$

und nach den Gleichungen (16) des verlängerten einfallenden Lichtstrahles hat man:

$$x-\xi'=\alpha\frac{n}{n'}r', \quad y-\eta'=\beta\frac{n}{n'}r', \quad z-\zeta'=\gamma\frac{n}{n'}r';$$

daher, wenn man diese Gleichungen von jenen abzieht und die Ausdrücke aus (8) einsetzt, findet man:

$$x'-x=\frac{n'\alpha'-n\alpha}{n'}r'=\frac{mr'}{n'}a, \quad y'-y=\frac{n'\beta'-n\beta}{n'}r'=\frac{mr'}{n'}b,$$

$$z'-z=\frac{n'\gamma'-n\gamma}{n'}r'=\frac{mr'}{n'}c;$$

also in Wirklichkeit die so eben bedungenen Proportionen

$$\frac{x'-x}{a}=\frac{y'-y}{b}=\frac{z'-z}{c}=\frac{mr'}{n'}$$

zur Vergewisserung von der Richtigkeit unserer Behauptung.

6. Um aus diesen für die Lichtbrechung gefundenen Formeln sofort jene für die Zurückprallung des Lichtes zu erhalten, braucht man, dem Art. III. gemäss, blos den Brechungsexponenten $n':n=1$, also $n'=n$, und zugleich $\varrho=180^0-\varepsilon$, also $\cos\varrho=-\cos\varepsilon$ zu setzen.

Für den auffallenden Lichtstrahl verbleiben natürlich die Gleichungen (1) bis (6) in ihrer Giltigkeit, dagegen findet man für den zurückgeworfenen Lichtstrahl zuvörderst vermöge (13) die Hilfszahl

$$m=n.2\cos\varepsilon,$$

sonach zufolge (8) dieses Strahles Richtcosinus:

$$(17)\qquad \begin{cases}\alpha'=\alpha+2a\cos\varepsilon,\\ \beta'=\beta+2b\cos\varepsilon,\\ \gamma'=\gamma+2c\cos\varepsilon;\end{cases}$$

und gemäss (15) seine Gleichungen:

$$(18)\qquad \frac{x'-\xi-\alpha k}{\alpha+2a\cos\varepsilon}=\frac{y'-\eta-\beta k}{\beta+2b\cos\varepsilon}=\frac{z'-\zeta-\gamma k}{\gamma+2c\cos\varepsilon}=r',$$

wozu die Ausdrücke von k und $\cos\varepsilon$ aus (6) und (5) zu entnehmen kommen.

Der laufende Punkt $(x', y', z'; r')$ dieses zurückgeworfenen Lichtstrahls steht von der Trennungs- oder Spiegel-Ebene $\mathfrak{A}$ zufolge Früherem um die positive Länge

$$d'-d=r'\cos\varepsilon$$

ab, folglich liegt er und mit ihm dieser ganze Strahl auf der Vorderseite der spiegelnden Ebene oder er geht ins erste Mittel wieder zurück.

Derselbe Punkt erhält mit demjenigen Punkte $(x, y, z; r-k)$ der Verlängerung des auffallenden Lichtstrahles einerlei Projection in der Spiegel-Ebene, für welchen $r-k=r'$ ist, der nemlich mit ihm gleichweit vom Einfallspunkte absteht, was auch aus anderen einfachen Betrachtungen einleuchtet.

VI.

Zweite Aufgabe. Wenn die krumme Trennungsfläche zweier Mittel und der einfallende Lichtstrahl (durch ihre Gleichungen) gegeben sind, soll a. der gebrochene und b. der zurückgeworfene Strahl gesucht werden.

1. Für rechtwinkelige Coordinaten x, y, z sei die Gleichung der trennenden Fläche zweier Mittel:

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

und die Gleichungen des einfallenden Lichtstrahles seien, wie in der ersten Aufgabe:

$$(2) \qquad \frac{x-\xi}{\alpha} = \frac{y-\eta}{\beta} = \frac{z-\zeta}{\gamma} = R.$$

Der Einschnitt dieser Geraden in jene Fläche — der Einfallspunkt $(x, y, z;\ R)$ — ergibt sich aus diesen vier Gleichungen, und zwar vielleicht am einfachsten, wenn man in (1) für x, y, z ihre Ausdrücke aus (2):

$$(3) \qquad x = \xi + \alpha R, \quad y = \eta + \beta R, \quad z = \zeta + \gamma R$$

einstellt, aus der so entstehenden Gleichung den Fahrstrahl R sucht und seinen Ausdruck wieder in (3) einsetzt, um x, y, z zu erhalten.

Sei nun die Differentialgleichung der Fläche

$$(4) \qquad df(x, y, z) = p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0,$$

und seien die dreierlei partiellen Differentialquotienten p, q, r auf den Einfallspunkt bezogen; so findet man die Richtcosinus a, b, c des Einfallslothes, d. i. derjenigen Hälfte (oder Richtung) der Normale zur Trennungsfläche am Einfallspunkte, welche auf jene Seite der Fläche hingeht, von welcher der einfallende Lichtstrahl zur Trennungsfläche gelangt, aus den Proportionen:

$$(5) \qquad \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \frac{1}{s},$$

wofern

$$(6) \qquad p^2 + q^2 + r^2 = s^2$$

gesetzt und von den beiden entgegengesetzt gleichen Werthen

der Hilfszahl s derjenige gewählt wird, durch den die fraglichen Richtcosinus ihre rechten Qualitätszeichen empfangen.

Da im vorliegenden Falle die krumme Scheidungsfläche der Mittel, zufolge des Art. V., durch ihre Berührungsebene am Einfallspunkte vertreten werden kann, so dürfen wir sogleich die in der ersten Aufgabe aufgefundenen schliesslichen Rechnungsvorgänge in Anwendung bringen.

Demgemäss suchen wir vor Allem den spitzen Einfallswinkel ε, nach V. (5), aus dem positiven Ausdrucke

$$\cos\varepsilon = -\frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{s}, \tag{7}$$

dann wie früher die Hilfszahl

$$m = n\cos\varepsilon - \sqrt{n'^2 - n^2\sin\varepsilon^2}, \tag{8}$$

oder auch vorerst den spitzen Brechungswinkel ϱ aus

$$\sin\varrho = \frac{n}{n'}\sin\varepsilon, \tag{9}$$

und nachher erst diese Hilfszahl

$$m = n\cos\varepsilon - n'\cos\varrho. \tag{10}$$

Sonach erhalten wir, zufolge V. (8), des gebrochenen Strahles Richtcosinus α', β', γ' aus

$$\left\{\begin{aligned} n'\alpha' &= n\alpha + \frac{m}{s}p, \\ n'\beta' &= n\beta + \frac{m}{s}q, \\ n'\gamma' &= n\gamma + \frac{m}{s}r, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

und endlich die in Frage gestellten Gleichungen des gebrochenen Strahles:

$$\frac{x' - \xi - \alpha R}{ns\alpha + mp} = \frac{y' - \eta - \beta R}{ns\beta + mq} = \frac{z' - \zeta - \gamma R}{ns\gamma + mr}. \tag{12}$$

2. Für den von derselben Fläche am nemlichen Einfallspunkte zurückgeworfenen Strahl erhalten wir, gemäss V. (17) und (18), seine Richtcosinus aus

$$\alpha' = \alpha + 2\frac{p}{s}\cos\varepsilon, \quad \beta' = \beta + 2\frac{q}{s}\cos\varepsilon, \quad \gamma' = \gamma + 2\frac{r}{s}\cos\varepsilon, \tag{13}$$

und seine **Gleichungen** in der Form

$$(14)\qquad \frac{x'-\xi-\alpha R}{s\alpha+2p\cos\varepsilon}=\frac{y'-\eta-\beta R}{s\beta+2q\cos\varepsilon}=\frac{z'-\zeta-\gamma R}{s\gamma+2r\cos\varepsilon}.$$

VII.

Beispiel. Die brechende oder zurückwerfende krumme Fläche sei ein **Ellipsoid**.

Versetzen wir die Coordinatenaxen in die Axen des Ellipsoids selbst, deren Längen $2A$, $2B$, $2C$ sein sollen, so ist seine Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1,$$

und wir erhalten für den Einfallspunkt die Coordinaten

$$x=\xi+\alpha R,$$
$$y=\eta+\beta R,$$
$$z=\zeta+\gamma R$$

und den Fahrstrahl R aus

$$\left(\frac{\xi+\alpha R}{A}\right)^2+\left(\frac{\eta+\beta R}{B}\right)^2+\left(\frac{\zeta+\gamma R}{C}\right)^2=1,$$

oder wenn wir abkürzend setzen:

$$(2)\qquad \frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{B^2}+\frac{\gamma^2}{C^2}=E,$$

$$(3)\qquad \frac{\alpha\xi}{A^2}+\frac{\beta\eta}{B^2}+\frac{\gamma\zeta}{C^2}=F$$

aus

$$ER^2+2FR+\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{C^2}=1.$$

Sonach ist

$$(ER+F)^2=H^2,$$

wofern man setzt:

$$H^2=E-\left(\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\eta^2}{B^2}+\frac{\zeta^2}{C^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{B^2}+\frac{\gamma^2}{C^2}\right)+\left(\frac{\alpha}{A}\,\frac{\xi}{A}+\frac{\beta}{B}\,\frac{\eta}{B}+\frac{\gamma}{C}\,\frac{\zeta}{C}\right)^2$$

oder

$$(4)\qquad H^2=\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{B^2}+\frac{\gamma^2}{C^2}-\left(\frac{\beta\zeta-\gamma\eta}{BC}\right)^2-\left(\frac{\gamma\xi-\alpha\zeta}{CA}\right)^2-\left(\frac{\alpha\eta-\beta\xi}{AB}\right)^2,$$

und daher erhält man R ausgedrückt mittels

$$R = \frac{-F + H}{E}. \tag{5}$$

Differenzirt man die Gleichung (1), so gibt sie

$$\frac{x}{A^2}dx + \frac{y}{B^2}dy + \frac{z}{C^2}dz = 0,$$

folglich ist:

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{x}{A^2} = \frac{\xi + \alpha R}{A^2}, \\ q &= \frac{y}{B^2} = \frac{\eta + \beta R}{B^2}, \\ r &= \frac{z}{C^2} = \frac{\zeta + \gamma R}{C^2} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

und

$$s^2 = LR^2 + 2MR + N, \tag{7}$$

wenn man abkürzend setzt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{A^4} + \frac{\beta^2}{B^4} + \frac{\gamma^2}{C^4} &= L, \\ \frac{\alpha\xi}{A^4} + \frac{\beta\eta}{B^4} + \frac{\gamma\zeta}{C^4} &= M, \\ \frac{\xi^2}{A^4} + \frac{\eta^2}{B^4} + \frac{\zeta^2}{C^4} &= N. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Danach findet man ε aus

$$\cos\varepsilon = -\frac{ER + F}{s} = -\frac{H}{s}, \tag{9}$$

und die Hilfszahl m aus:

$$m = -\left(n\frac{H}{s}\right) - \sqrt{n'^2 - n^2 + \left(n\frac{H}{s}\right)^2}. \tag{10}$$

Zu allen diesen vorbereiteten Werthen bieten die Gleichungen (12) und (14) in VI. sofort die fraglichen Gleichungen des gebrochenen und des zurückgeworfenen Lichtstrahles.

XXI.

Allgemeinere Bestimmung der Länge von Nonien an Maassstäben.

Von

Herrn Dr. *Wilh. Matzka*,

Professor der Mathematik an der Hochschule in Prag.

An gerad- und kreislinigen Maassstäben pflegt man, zur Messung von aliquoten Theilen oder von Brüchen der auf dem Maassstabe selbst noch aufgetragenen kleinsten Theilchen (Strecken oder Bogen), oft ein kleines Hilfsmaassstäbchen, Nonius oder Vernier genannt, daran entlang schleifbar, anzubringen. Die Bestimmung der Länge und der Gleichtheilung dieses Nonius wird in den Lehrbüchern der angewandten Geometrie und der Physik immer nur in beschränkter Weise gelehrt. Gleichwohl ist noch eine allgemeinere solche Längenbestimmung der Nonien, wenigstens in der Lehre (Theorie), möglich, welche unter gewissen Umständen dennoch auch zur wirklichen Ausführung und Anwendung (Praxis) geeignet sein dürfte *).

I.

Sei überhaupt die kleinste auf einem solchen Maassstabe noch aufgetragene Länge $= \mu$, jeder der auf dem Nonius befind-

*) Ihre Grundlinien und ihr Hauptergebniss hatte ich bereits im Juni 1849 in meinen Vorlesungen über praktische Geometrie am königl. böhmischen ständischen Polytechnikum hier, so wie auch am 14. Januar 1856 in der Sitzung der naturwissenschaftlichen und mathematischen Section der hiesigen königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften vorgetragen, wie in den „Abhandlungen dieser Gesellschaft", 5te Folge, 9ter Band, Prag 1857, auf Seite 51. der „Geschichte der Gesellschaft" berichtet wird.

lichen gleichen Theile $= \nu$, und denke man sich den Anfangs- oder Nullstrich des Nonius in der Verlängerung eines Theilstrichs des Maassstabes, welchen Theilstrich wir hier kurz auch als den nullten des Maassstabes zählen wollen, so ist der Unterschied zwischen einem Noniustheil ν und einem Maassstabtheil μ, oder der Abstand des ersten Noniusstriches vom ersten Maassstabstriche

$$\text{entweder } \nu - \mu \text{ oder } \mu - \nu,$$
$$\text{je nachdem } \nu > \mu \text{ oder } \nu < \mu \text{ ist.}$$

Soll dieser Unterschied oder Zwischenraum etliche aliquote, etwa i der $n$ten Theile des Maassstabtheilchens μ betragen, folglich

$$\nu - \mu = i\frac{\mu}{n} \text{ oder } \mu - \nu = i\frac{\mu}{n}$$

sein, so muss

$$\text{hier } \nu = \frac{n+i}{n}\mu, \text{ da } \nu = \frac{n-i}{n}\mu,$$

also wenn man

$$n \pm i = m$$

setzt,

$$\nu = \frac{m\mu}{n}$$

gemacht werden, nemlich es muss eine gewisse Anzahl (m) Maassstabtheilchen (μ) auf den Nonius übertragen und sohin dessen Länge $m\mu$ in n gleiche Theilchen (ν) getheilt werden. Hiernach frägt es sich also um jene Anzahl m auf den Nonius zu übersetzender Maassstabtheilchen, insofern der Nenner oder die Anzahl n der Gleichtheile des Nonius wie fast immer als angegeben vorausgesetzt wird.

Demgemäss ist der Abstand des $p$ten Theilstrichs des Nonius vom $p$ten Theilstriche des Maassstabes oder der Unterschied der Längen $p\nu$ und $p\mu$ entweder

$$p\nu - p\mu = p(\nu - \mu) = \frac{pi}{n}\mu$$

oder

$$p\mu - p\nu = p(\mu - \nu) = \frac{pi}{n}\mu,$$

nemlich immer das $p$fache des Zwischenraums ihrer beiderlei ersten Theilstriche.

2.

Nun gebe das Product pi durch n getheilt zum Quotus q und zum gewöhnlichen, stets unter dem Theiler n bleibenden positiven Reste r, nemlich

$$pi = nq + r,$$

so wird

I. im ersten Falle, wo $\nu > \mu$ ist, der Zwischenraum

$$p\nu - p\mu = q\mu + r\frac{\mu}{n}$$

und hiernach

$$p\nu - (p+q)\mu = r\frac{\mu}{n} = e_p,$$

d. h. der Abstand e_p des $p$ten Theilstriches des Nonius vor dem $(p+q)$ten Theilstriche des Maassstabes beträgt r der $n$ten Theile des Maassstabtheilchens μ.

Steht nemlich in der Urstellung (Taf. III. Fig. 5.) mit dem 0ten Theilstriche a des Maassstabes M der 0te Theilstrich b des Nonius N überein, so ist am $p$ten Theilstriche d des Nonius die $bd = p\nu$, dagegen am $(p+q)$ten Theilstriche c des Maassstabes die $ac = (p+q)\mu$; mithin steht der Noniusstrich d vor dem Maassstabstriche c um die Länge

$$cd = bd - ac = e_p = r\frac{\mu}{n},$$

und man sieht sich demgemäss aufgefordert, an den $p$ten Theilstrich d des Nonius den Zähler r der $n$ten Theile von μ, folglich an den 0ten Theilstrich b desselben den Zähler 0 zu setzen.

II. Im zweiten Falle, wo $\nu < \mu$ ist, wird die Zwischenweite

$$p\mu - p\nu = q\mu + r\frac{\mu}{n}$$

und hiernach

$$(p-q)\mu - p\nu = \nu\frac{\mu}{n} = e_p,$$

d. i. der $p$te Theilstrich des Nonius steht hinter dem $(p-q)$ten Theilstriche des Maasstabes um r der $n$ten Theile des μ.

Steht nemlich in der Urstellung (Taf. III. Fig. 6.) mit dem 0ten Theilstriche a des Maassstabes M der 0te Theilstrich b des



Nonius N in gerader Linie, so ist am $p$ten Theilstriche d des Nonius wieder die $bd = p\nu$, dagegen am $(p-q)$ten Theilstriche c des Maassstabes die $ac = (p-q)\mu$; mithin steht der Noniusstrich d **hinter** dem Maassstabstriche c um die Länge

$$cd = ac - bd = e_p = r\frac{\mu}{n},$$

und man sieht sich auch hier veranlasst, zum $p$ten Theilstriche d des Nonius den Zähler r der $n$ten Theile des μ zu schreiben.

3.

Wenn demnach bei dem **Abmessen einer bestimmten Länge** fb der $p$te Theilstrich d des Nonius N mit einem gewissen Theilstriche des Maassstabes, namentlich

I. da, wo $\nu > \mu$ ist, mit dem $(p+q)$ten Theilstriche c des Maassstabes M (Taf. III. Fig. 7.) in einerlei Gerade fällt; so ist von den in Taf. III. Fig. 5. übereingefallenen zwei Nullstrichen der mit b bezeichnete Nullstrich des Nonius **hinter** den Nullstrich a des Maassstabes um ab der Taf. III. Fig. 7. $= cd$ der Taf. III. Fig. 5. **zurück** oder um dieses Streckchen vom Anfangspunkte f der zu messenden Länge fb weiter gerückt. Denn es ist in Taf. III. Fig. 7. $ab = db - ca = cd$ der Taf. III. Fig. 5. $= e_p = r\frac{\mu}{n}$. Ist nun $fa = k\mu$, so ist das Maass der vorgelegten Länge:

$$fb = (k + \frac{r}{n})\mu.$$

II. Wenn hingegen da, wo $\nu < \mu$ ist, der $p$te Theilstrich d des Nonius mit dem $(p-q)$ten Theilstriche c des Maassstabes M in Taf. III. Fig. 8. in einerlei Gerade zu stehen kommt, so ist von den in Taf. III. Fig. 6. übereingefallenen zwei Nullstrichen der mit b bezeichnete Nullstrich des Nonius **vor** den Nullstrich des Maassstabes um ab der Taf. III. Fig. 8. $= cd$ der Taf. III. Fig. 6. **vorwärts** oder um dieses Strecklein vom Anfange f der abzumessenden Länge fb weiter gerückt. Denn es ist in Taf. III. Fig. 8. $ab = ac - bd = cd$ der Taf. III. Fig. 6. $= e_p = r\frac{\mu}{n}$.

Ist nun $fa = k\mu$, so ist auch hier das Maass der vorliegenden Länge

$$fb = (k + \frac{r}{n})\mu.$$

4.

Damit aber, wie es erforderlich ist, der Ergänzungsbruch $e_p = \frac{r}{n}\mu$ jede Anzahl $n$ter Theile von μ, nemlich $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ solche Theile, betrage, wenn die Nummer p des Noniusstrichs die natürliche Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ durchgeht; muss der bei der Theilung von pi durch n rückbleibende Rest r durchaus verschieden ausfallen, und sonach darf der beständige Unterschied i keinen Theiler mit n gemeinschaftlich haben. Denn wenn für p und p' derselbe Rest r entfiele, folglich

$$pi = nq + r \quad \text{und} \quad p'i = nq' + r$$

würde, dann müsste

$$(p'-p)i = n(q'-q)$$

sein, mithin, weil p und p', also um so mehr $p'-p$ kleiner als n ist, i mindestens einen gemeinschaftlichen Theiler mit n haben, wenn nicht durch selbe theilbar sein. Da jedoch entweder $i = m - n$ oder $i = n - m$ ist, so müsste auch m wenigstens mit n einen Theiler gemeinsam haben oder hiedurch theilbar sein. Damit demnach von den n möglichen Resten r keine zwei gleich ausfallen, müssen die Anzahlen m und n Primzahlen unter sich oder gegen einander prim sein; und nach dieser einfachen Anforderung hat man sohin zu jedem angegebenen Theiler n die Anzahl m der vom Maassstabe auf den Nonius zu übertragenden kleinsten Maassstabtheilchen μ zu wählen.

Z. B. zum Theiler $n = 10$

passen die Anzahlen $m = 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, \ldots$;

für den Theiler $n = 12$

eignen sich die Anzahlen $m = 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$;

und für den Theiler $n = 15$

taugen die Anzahlen $m = 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, \ldots$

Wählt man zum Theiler $n = 10$ die Anzahl $m = 7$, so ist $i = n - m = 3$; oder wählt man hiefür die Anzahl $m = 13$, so ist $i = m - n$ auch $= 3$; folglich erhält man beide Male

zur Nummer p	$=0,$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
den Dividend pi	$=0,$	3,	6,	9,	12,	15,	18,	21,	24,	27,
also den Rest r	$=0,$	3,	6,	9,	2,	5,	8,	1,	4	7.

Auch kann man überhaupt die fragliche Anzahl

$$m = n \mp i$$

ansetzen, wofern man nur i gegen n prim wählt. Für gleiche subtractive und additive i ergibt sich dann natürlich eine und dieselbe Reihenfolge der Reste r.

Z. B. zum Theiler $n = 12$ kann man

$i = 1$, 5, 7, folglich die Anzahl
$m = 11$, 7, 5 oder
$= 13$, 17, 19 wählen.

Für $i = 5$ oder für $m = 7$ und $m = 17$ erhält man demnach

zum Noniusstrich Nummer $p = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
den Rest oder Zähler $r = 0$, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7.

Die in diesen Beispielen aufgefundenen Reste sind demnach in denselben Reihenfolgen den nach einander kommenden Theilstrichen des Nonius als Abzähler, dort von 10teln, hier von 12teln, des kleinsten Maassstabtheilchens beizusetzen.

Da man beim Ablesen der Abmessungen ohnehin jedesmal nachsehen muss, welcher Theilstrich des Nonius mit einem Theilstriche des Maassstabes übereinfalle; so kann man an demselben Noniusstriche offenbar auch sofort ganz leicht den Zähler der aliquoten oder Bruchtheile des kleinsten Maassstabstreckchens ablesen; deshalb ist es für die Praxis keineswegs unerlässlich, dass die auf dem Nonius anzusetzenden Zähler gerade in natürlicher Reihung auf einander folgen.

5.

Um noch über die Abfolge der Zähler oder Reste r, bei natürlicher Anordnung der Nummern p der Noniusstriche, Aufschluss zu erhalten, betrachten wir abermals die allgemeine Theilungsgleichung

$$pi = nq + r$$

und lassen die Ordnungszahl p des Noniusstrichs auf die um Δp höhere $p + \Delta p$ aufsteigen. Dann erhebt sich der Quotus q auf $q + \Delta q$ und der Rest r auf $r + \Delta r$, mithin ist auch:

$$(p + \Delta p)i = n(q + \Delta q) + (r + \Delta r),$$

und wenn man hievon die vorige Gleichung abzieht, die allgemeine Differenzengleichung:

$$i\Delta p = n\Delta q + \Delta r.$$

Durchgeht man die Theilstriche des Nonius der Reihe nach vom 0ten bis zum $(n-1)$ten, so ist die Steigung ihrer Nummern stets $\Delta p = 1$, also

$$i = n\Delta q + \Delta r.$$

I. Sollen hierbei auch die Reste r in ihrer natürlichen Ordnung ansteigen, soll also $\Delta r = 1$ bleiben, so muss man wählen:

$$i = n\Delta q + 1,$$

und sonach kann, weil i so wie n nur positiv gehalten wurden, auch Δq nicht negativ ausfallen. Da ferner, wenn man $m = n - i$ wählt, m nicht negativ werden darf, und wenn man $m = n + i$ setzt, die Länge $m\mu$ des Nonius möglichst klein gemacht werden soll; so wird man immer $i < n$ wählen — was auch mit der Grundbedeutung von i als Zähler eines echten Bruches im Einklange steht —; mithin kann hier blos $\Delta q = 0$ und $i = 1$ sein, und sohin ist die fragliche Anzahl

$$m = n \mp 1.$$

Dies ist bekanntlich die übliche Bestimmungszahl der auf den Nonius zu übertragenden Massstabtheile.

II. Aus obiger Differenzengleichung folgt noch für $\Delta p = 1$ die in Frage gestellte Aenderung des Restes

$$\Delta r = i - n\Delta q.$$

Weil nun jederzeit $i < n$ sein muss, kann nur zusammen bestehen

$$\Delta q = 0 \text{ mit } \Delta r = i$$
$$\text{und } \Delta q = 1 \text{ mit } \Delta r = -(n-i),$$

d. h. bei der Theilung der geordneten Vielfachen $pi = 0, i, 2i, \ldots$ $\ldots (n-1)i$ durch n kann der entfallende Rest r nur entweder, wenn der Quotus q ungeändert bleibt, um i wachsen oder, wenn der Quotus q um 1 steigt, um $n-i$ abnehmen.

So überzeugt man sich an obigen Beispielen, dass bei $n = 10$ und $i = 3$ die Reste der Reihe nach gewöhnlich um 3 steigen und nur ausnahmsweis um 7 fallen; so wie, dass bei $n = 12$ und $i = 5$ die Reste bald um 5 steigen, bald um 7 sinken.

XXII.

Ein kritischer Nachtrag zur Geschichte der Erfindung der Logarithmen,

mit Beziehung auf Abhandlung III. im 15ten Theil, 2. Heft, S. 121.—196. im Archiv, 1850.

Von

Herrn Dr. *Wilh. Matzka*,

Professor der Mathematik an der Hochschule zu Prag.

Eine akademische Gelegenheitsrede gab mir im verwichenen April Veranlassung, noch einmal über den Werth der Leistungen beider, gewöhnlich dafür ausgegebenen, Erfinder der Logarithmen nachzudenken; vielleicht dürfte die Veröffentlichung der gewonnenen Ergebnisse dieser Forschung auch dem grösseren mathematischen Leserkreise nicht unwillkommen sein.

A. John Neper.

I. Neper's Erklärungsweise der Logarithmen mittels Zusammenhaltens zweier gleichzeitigen geradlinigen Bewegungen zweier Punkte, und zwar einer gleichförmigen mit einer in veränderlichem Verhältnisse verzögerten, welch' beide mit einerlei Geschwindigkeit anheben *), erscheint beim erstmaligen Vernehmen und obenhin Besehen allerdings nicht wenig sonderbar; allein bei längerer und genauerer Durchforschung überzeugt man sich mit aufrichtiger Bewunderung, dass selbe in Bezug auf scharfe Kennzeichnung der innersten Wesenheit der allgemeinen Zahlen, also auch ihrer Logarithmen, eine Vortrefflichkeit besitzt, welche durchweg allen nachgefolgten Erklärungen desselben Gegenstandes abgeht.

---

*) Archiv a. a. O. S. 122—124.

Sie schliesst nemlich in sich das am spätesten von den kritischen Mathematikern erkannte und den Begriff der allgemeinen Zahl vervollständigende Merkmal der Stetigkeit (Continuität) der Zahlen überhaupt, bei Neper insbesondere die Stetigkeit der Logarithmen und ihrer Logarithmande, das ist derjenigen Zahlen, denen sie angehören, und es möchte diese Begriffsentwickelung der Logarithmen durch Neper, in der allmälichen Herausbildung der allgemeinen Grössen- und Zahlenlehre, wohl der erste Fall sein, wo dieser, für die höhere Analysis und ihre Anwendung auf die Erforschung der Linien und Flächen völlig unumgängliche und unentbehrliche Begriff mit berücksichtiget ward.

Nach Neper's Begriffsbestimmung stellt der Weg, der von seinem zuerst angenommenen gleichförmig (in gleichen Zeiten gleichweit) vorrückenden Punkte jeweilig zurückgelegt wird, den Logarithmus desjenigen Weges vor, den der andere Hilfspunkt bis zu einem vorgesteckten Ziele hin noch zu durchlaufen hat; wofern seine Geschwindigkeit und deren Verzögerung (negative Beschleunigung — Acceleration —) stets eben diesem noch zu durchlaufenden Wege proportionirt bleibt.

Beide Wege als solche — mithin auch der von ihnen vorgestellte oder abgebildete Logarithmus und Logarithmand — ändern sich nun stetig oder mit Stetigkeit, d. h. sie durchgehen gleichzeitig oder mit einander Schritt haltend allmälich alle Zwischenstufen von Grösse oder Grossheit (magnitudo, quantitas) ohne Uebergehung auch nur einer einzigen solchen Stufe; mithin nehmen bei Neper's Anordnung einerseits die Logarithmande oder Zahlen stetig ab, andererseits ihre Logarithmen stetig zu.

II. Treffendere und verständlichere Bilder für derlei gleichzeitige und stetige Aenderungen zusammenhängender Veränderlichen, wie die von Neper gewählten neben und mit einander bestehenden Bewegungen stofflicher Punkte besitzen wir aber nicht. Denn die einfachste und allbekannte stetig wachsende, gleichsam fortfliessende Grösse ist die Zeit — Dauerzeit einer Erscheinung —; die nächste eben so einfache stetig zu- oder abnehmende Grösse ist ein gerader Weg, den ein nach einem bestimmten Gesetze bewegter Stoffpunkt entweder bereits zurückgelegt hat oder erst noch zurücklegen soll.

Dagegen erfassen die übrigen Erklärer der Logarithmen von Zahlen nur Reihen von, in gewissen Absätzen oder Zwischenweiten auf einander folgenden, also getrennten Ständen (Stadien) solcher gleichzeitig vor sich gehenden Bewegungen mit den, entweder durchlaufenen oder noch bestehenden Wegstrecken.

Freilich für die wirkliche Ausrechnung der Logarithmen zu voraus gestellten Reihen von Zahlen wie zu jener der Sinus und Tangenten der von 90 Graden an minutenweise abnehmenden Winkel oder Kreisbogen, vermochte Neper auch nicht anders, als seine Nachfolger vorauszugehen; auch er musste Reihen zusammengehöriger Wegstrecken neben einander stellen, eine arithmetische steigende, welche die Logarithmen, und eine geometrisch fallende, welche die Zahlen derselben verbildlicht. Allein Reihen stellen — wie Neper sehr scharfsichtig herausgefühlt hatte — keineswegs stetig oder fliessend sich ändernde Grössen, sondern jedesmal nur sprung- oder ruckweis abgeänderte Werthe gewisser veränderlichen Grössen vor; sie sind und bleiben in ihrem Laufe immer unstetig (discontinuirlich). Deshalb kann irgend eine willkürlich festgesetzte Grösse nur zufällig in einer gesetzmässigen Reihe von Grössen derselben Art vorkommen, in der Meistzahl der Fälle aber lediglich zwischen ein Paar Nachbarglieder dieser Reihe hineinfallen, wogegen eine in zureichendem Umfange stetig wachsende oder abnehmende Veränderliche dieser Art auch jene festgesetzte Grösse nothwendig durchwandern muss.

Zwar kann man, durch Einschieben oder Einschalten einer nach dem nemlichen Gesetze gebildeten Hilfsreihe zwischen jenes Paar benachbarter Glieder, die Hauptreihe vervollständigen, ihre Lücken so schmälern, dass sie entweder auch jene gewisse vorgelegte Grösse selbst mit enthält oder mindestens möglichst eng sich an selbe anschliesst; allein nothwendig und vollständig erreichen muss sie dieselbe doch keineswegs, namentlich in den so unendlich häufigen Fällen nicht, wo diese voraus festgestellte Grösse in Bezug auf die Messeinheit ihrer Art einen irrationalen Zahlwerth besitzt. Somit muss bei der Aneinanderstellung einer geometrischen Reihe von Zahlen und einer arithmetischen Reihe ihrer Logarithmen erst noch scharf dargethan werden, dass jeglicher Zahl, sie sei ganz oder gebrochen, rational oder irrational, ein und nur ein Logarithme entspreche und umgekehrt; bei Neper's bildlicher Darstellung durch sein Paar gleichzeitiger Bewegungen drängt sich diese Wahrheit ganz unbezweifelbar von selbst auf.

III. Bevor wir diesen grossen Denker verlassen, möge es noch erlaubt sein, wenn es auch hier weniger zur Sache gehören mag, die Arten oder Gesetze dieser zweierlei Bewegungen, besonders der letzteren, etwas genauer zu besehen.

Den ersten Stoffpunkt denkt sich Neper gleichförmig in's Unbestimmte hinaus auf gerader Bahn bewegt. Dieser lege

nun während der vom Zeitpunkte Null an beginnenden und fortfliessenden Zeit t den Weg x, also im Zeitelemente dt das nächstfolgende Wegstreckchen dx zurück; so ist, weil der Punkt in jederlei gleichdauernden Zeiten gleichlange Wege zurücklegt, seine Geschwindigkeit u oder $\frac{dx}{dt}$ dem, in jeder von wann immer angefangen gerechneten Zeiteinheit zurückgelegten, also sich immer gleich bleibenden Wege, dessen Länge k heissen möge, gleich; nemlich es ist des bewegten Stofftheilchens Geschwindigkeit

$$u=\frac{dx}{dt}=k.$$

Daraus folgt die Beschleunigung (Acceleration) dieser Bewegung, das Differentialverhältniss ihrer Geschwindigkeit zur Zeit,

$$\frac{du}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

d. i. gleich Null oder es besteht hier keinerlei Beschleunigung.

Umgekehrt gibt die Integration der ersteren Differentialgleichung, wenn man sie von $t=0$ und $x=0$ anfangen lässt, die endliche und erschöpfende Bewegungsgleichung, bestimmend den vom Beweglichen jeweilig durchlaufenen Weg

$$x=kt.$$

Den zweiten Stoffpunkt denkt sich Neper auf einer anderen Geraden ungleichförmig fortschreitend, zur Zeit 0 von seiner Zielstelle um die Strecke ϱ abstehend und in derselben früher betrachteten Zeit t den Weg z dermassen zurücklegend, dass der Punkt am Schlusse derselben noch um die Strecke

$$y=\varrho-z$$

von seinem Zielpunkte abstehe. Im nachfolgenden Zeittheilchen dt durchlaufe er das Wegtheilchen dz und nähere sich seinem Ziele um $dy=-dz$ mit einer Geschwindigkeit

$$v=\frac{dz}{dt}=\frac{-dy}{dt}.$$

Diese nun soll dem zurückzulegenden Wege y proportionirt sein, also zu ihm sich so verhalten, wie die Anfangsgeschwindigkeit $\varkappa$ vom anfänglichen Abstande ϱ des bewegten Punktes von seinem Ziele oder auch wie diejenige Geschwindigkeit c des Beweglichen da, wo es um die Längeneinheit oder um die Länge 1 noch vom Ziele absteht, das ist: es soll sich verhalten

$$\frac{v}{y} = \frac{\varkappa}{\varrho} = \frac{c}{1} = c,$$

oder die zur Zeit t eintretende **wandelbare Geschwindigkeit** soll sein:

$$v = \frac{\varkappa}{\varrho} y = cy,$$

und die **Anfangsgeschwindigkeit** $\varkappa = c\varrho$.

Dann ist die **Beschleunigung** dieser Geschwindigkeit:

$$G = \frac{dv}{dt} = c\frac{dy}{dt} = -cv$$

oder auch $G = -c^2 y$, folglich ebenfalls proportionirt dem noch bis an's Ziel hin bevorstehenden Wege y.

Die zu Anfang der Bewegung, nemlich bei $t=0$ und $y=\varrho$, stattfindende Beschleunigung der Anfangsgeschwindigkeit $\varkappa$ ist sonach

$$\gamma = -c\varkappa = -\frac{\varkappa^2}{\varrho},$$

und die wandelbare Beschleunigung:

$$G = \frac{\gamma}{\varrho} y = \frac{y}{\varrho} \gamma,$$

oder es verhält sich auch:

$$\frac{G}{y} = \frac{\gamma}{\varrho} = \frac{-\varkappa^2}{\varrho^2} = -c^2.$$

Bei dieser Bewegung ist demnach eben so, wie bei den pendelartigen Schwingungen oder Erzitterungen kleinster Stofftheilchen um ihre uranfängliche Ruhelage, die Beschleunigung dem jeweiligen Abstande des Beweglichen von einem gewissen feststehenden Punkte (im letzteren Falle von der Ruhelage) proportionirt; nur ist bei derlei Schwingungen das jeweilige Verhältniss der Beschleunigung G zum Abstande y des Beweglichen vom Ziele **positiv**, in **Neper's** zweitem Bewegungsfalle hingegen **negativ**.

Aus der leicht herstellbaren Differentialgleichung der Bewegung

$$v = \frac{-dy}{dt} = cy$$

folgt sofort:

$$\frac{-dy}{y} = cdt;$$

daher, wenn man von $t=0$ und $y=\varrho$ an integrirt, ist (in natürlichen Logarithmen, die wir blos durch l andeuten):

$$l\frac{\varrho}{y}=ct,$$

folglich

$$\frac{\varrho}{y}=e^{ct}=\frac{\varkappa}{v}.$$

Sonach findet man für jede Zeit t den **Abstand** des beweg-ten Punktes von seinem Ziele:

$$y=\varrho e^{-ct},$$

den **durchlaufenen** Weg:

$$z=\varrho(1-e^{-ct}),$$

die **Geschwindigkeit**:

$$v=\varkappa e^{-ct},$$

und die **Beschleunigung**:

$$G=-c\varkappa e^{-ct}.$$

Aus der letztern findet man noch das Differential-Verhältniss der Beschleunigung zur Zeit:

$$\frac{dG}{dt}=c^2\varkappa e^{-ct}=c^2v,$$

welches daher immer positiv ausfällt.

Im Verlaufe der Zeit nähert sich demnach der bewegliche Punkt mit abnehmender Geschwindigkeit und mit einer mehr und mehr zunehmenden Verzögerung seinem Ziele, ohne jedoch dieses Ziel je vollkommen zu erreichen. Denn nie kann der Abstand

$$y=\varrho e^{-ct}$$

des Beweglichen vom Ziele streng Null (aufgehoben, zu nichte) werden, wenn er auch bei unendlichem Wachsen der Zeit t unendlich abnimmt.

Während demnach im steten Fortlaufe der mit Null anhebenden Zeit t der Logarithme x von Null an über alle Grenzen hinaus wächst, nimmt die Zahl y, welcher er angehört, von ihrem Anfangswerthe ϱ an unaufhörlich ab und strebt der Null als Grenze zu.

IV. Noch dürfte folgende **Bemerkung** nicht ohne Interesse sein.

Neper hat sich die Bewegungen beider Stoffpunkte in beliebigen Geraden vor sich gehend gedacht, da es für seinen Zweck

ganz gleichgiltig war, wie er diese geraden Bahnen gegen einander stellte. Man möchte hiebei fast bedauern, dass er nicht auf den Gedanken gerieth, sie auf einander senkrecht zu stellen, weil dann diese zwei gleichzeitigen, gegen einander senkrecht gerichteten Bewegungen sich in eine einzige krummlinige zusammengesetzt hätten; nemlich, weil er dann jene zwei geradlinigen Bewegungen als die Bewegungen der Fusspunkte P und Q (Taf. III. Fig. 9.) derjenigen Senkrechten MP, MQ hätte anschauen können, welche aus einem, auf einer krummen Linie Hz sich bewegenden Punkte M auf zwei sich senkrecht durchschneidende Axen Ox, Oy geführt werden.

Sei nemlich zur Zeit Null der bewegliche Punkt auf der Geraden Ox in D, der auf der Oy sich bewegende Punkt in E, folglich der die krumme Linie Hz durchlaufende Punkt in A, dem Durchschnitte der in D und E auf Ox und Oy senkrecht aufgestellten Geraden. Seien $OD=\xi$ und $OE=\eta$ die Abstände der Punkte D und E von O. Zur Zeit t befinde sich der erstere Stoffpunkt in P, der zweite in Q und der auf der Krummen Az sich bewegende Punkt in M, und seien $OP=x'$ und $OQ=y'$ die Abstände der Punkte P und Q von O. Auf der Ox wurde von D aus in gleichförmigem Fortschritt der Weg

$$DP=x=kt$$

zurückgelegt, also ist

$$OP=\xi+x=x'$$

und

$$x'=\xi+kt.$$

Auf der Oy sei C das Ziel des bewegten Stoffpunktes, also $EC=\varrho$ und

$$QC=y=\varrho e^{-ct},$$

mithin

$$OQ=OE-EC+CQ,$$

$$y'=\eta-\varrho+y,$$

folglich

$$y'=\eta-\varrho+\varrho e^{-ct}.$$

Hätte dann Neper die veränderlichen Abstände der beweglichen Punkte von O aus gerechnet, nemlich $OP=x'$ und $OQ=y'$ angenommen, und hätte er den Abstand x' den Logarithmus von y' genannt; so hätte er den Zusammenhang dieser zwei Abstände — gegenwärtig Coordinaten benannt — durch diese Gleichung

$$x' = \text{Log}\, y'$$

dargestellt, und so würde er der Erste die später von **Des Cartes** ersonnene Darstellung krummer Linien durch Gleichungen zwischen gewissen Strecken und Winkeln (Coordinaten) bereits ausgeführt haben.

Es würde hiebei ganz natürlich gewesen sein, wenn Neper zur Vereinfachung seiner Untersuchungen, wie es ihm frei stand, in Taf. III. Fig. 9. den Ausgangspunkt D des ersten Stofftheilchens auch zum Zielpunkte C des zweiten gewählt hätte, nemlich wenn er $OD = \xi = 0$ und $EO = EC$, also $\eta = \varrho$ gemacht hätte. Da wäre $OP = DP$, $OQ = CQ$ oder in der eifacheren Taf. III. Fig. 10.:

$$x' = x = OP, \quad y' = y = OQ,$$

also

$$x = kt, \quad y = \varrho e^{-ct}$$

das Paar der Gleichungen der krummen Bahn AMz geworden, und Neper's Gleichung dieser Linie würde die Gestalt

$$x = \text{Log. Nep.}\, y$$

angenommen haben.

Unsere jetzige Ausdrucksweise derselben Gleichheit ist:

$$\frac{y}{\varrho} = e^{-c\frac{x}{k}} = e^{-\frac{\varkappa}{k}\frac{x}{\varrho}},$$

oder, wenn wir natürliche Logarithmen benutzen, umgekehrt:

$$\frac{x}{\varrho} = \frac{k}{\varkappa} l \frac{\varrho}{y}.$$

Beachtet man noch, dass Neper die Anfangsgeschwindigkeiten k und $\varkappa$ beider bewegten Punkte als gleich unterstellte, so hätte seine krumme Linie die Gleichung erhalten:

$$\frac{y}{\varrho} = e^{-\frac{x}{\varrho}}$$

und

$$\frac{x}{\varrho} = l\frac{\varrho}{y} = -l\frac{y}{\varrho}.$$

Bekanntlich ist dies die Gleichung der **Logistik** oder **logarithmischen Linie**, folglich gewinnt man durch diese Betrachtungen zugleich eine verständlichere Erzeugungsweise dieser Linie,

als in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie vorgetragen zu werden pflegt.

B. Jobst Byrg.

Es hat sich bekanntlich unter den Mathematikern die ganz gewöhnliche Ansicht geltend gemacht, dass Byrg mindestens mit Neper gleichzeitiger, wenn nicht sogar früherer, folglich eigentlicher Erfinder der Logarithmen sei. Auch ich war bisher der erstern Ansicht zugethan, wie aus meiner Abhandlung im Archiv Thl. XV., Hft. 2., 1850, S. 136, Art. 6. erhellt. Allein nach einer durch Abfassung erwähnter Gelegenheitsrede veranlassten eindringlicheren Forschung, besonders der von Herrn Gymnasial-Oberlehrer Dr. Gieswald zu Danzig im Jänner 1856 mit dem Schulprogramm veröffentlichten Abhandlung: „Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen“, sehe ich mich gezwungen, diese Anschauung aufzugeben. Ich entschloss mich hiezu allerdings um so schwerer, als ich — ein Vollblut-Deutscher — es viel lieber gesehen hätte, wenn es möglich wäre, diese so wichtige Erfindung unserem grossen Volke unbedenklich zuschreiben zu dürfen. Doch der Wahrheit und Gerechtigkeit muss die Vorliebe zu den Stammgenossen weichen.

Bekannt ist es*), dass Michael Stifel, ein gelehrter Dorfprediger in Haberstro, jetzt Haffstrom genannt, bei Königsberg in Preussen, im Jahre 1547 seine Arithmetica integra herausgab, in welcher er (Seite 249) die arithmetische natürliche Reihe der ganzen Zahlen

$$-3,\ -2,\ -1;\ \ 0;\ \ 1,\ 2,\ 3,\ \ 4,\ \ldots$$

mit der geometrischen

$$\tfrac{1}{8},\ \ \tfrac{1}{4},\ \ \tfrac{1}{2};\ \ 1;\ \ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ldots.$$

Glied für Glied unter einander stellte und sich über den Zusammenhang der Paare gleichstelliger Glieder beider Reihen kurz wie folgt äussert:

Qualiacunque facit progressio geometrica
multiplicando et dividendo,
talia facit progressio arithmetica
addendo et subtrahendo.

---

*) Man vergleiche: P. N. L. Egen, Handbuch der allgemeinen Arithmetik. 2. Aufl. 1. Thl. Berlin 1833. §. 164. S. 258. Dr. Gieswald, Justus Byrg als Mathematiker, S. 18, 20 ff.

In Lib. I. pag. 35. sagt er ferner:

Additio in Arithmeticis progressionibus respondet multiplicationi in Geometricis;
Subtractio in Arithmeticis respondet in Geometricis divisioni.
Divisio in Arithmeticis progressionibus respondet extractionibus radicum in progressionibus Geometricis.
Ut dimidiatio in Arithmeticis respondet
extractioni quadratae in Geometricis.
Triplatio in Arithmeticis respondet multiplicationi cubicae in Geometricis.
Quintuplatio in Arithmeticis respondet multiplicationi surdesolidae in Geometricis.
et sic de aliis in infinitum.

In der Vorrede zu dem „Kurtzen Bericht *) der Progress-Tabulen, Wie dieselbigen nutzlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen", welchen Byrg seinen im Jahre 1620 zu Prag herausgegebenen Progress-Tabulen beizudrucken unterlassen hatte, äussert sich derselbe nun wie folgt: „Betrachtent derowegen die eigenschafft und Correspondenz der 2 progressen alß der Arithmetischen mit der Geometrischen, das was in der ist Multipliciren, ist in iener nur Addiern und was in der ist Diuidiren in iener subtrahiern und was in der ist radicem quadratam extrahirn in iener nur ist halbiren, radicem cubicam extrahirn nur in 3 diuidiern, radicem Zensi in 4. Diuidiern, Sursolidam in 5 und also fort in andern quantiteten." Man wird demnach kaum umhin können, diese Erläuterung Byrg's für etwas Anderes als eine Uebersetzung der eben angeführten Stelle aus Stifel's Werk anzusehen.

Seinen Bericht beginnt er mit den Worten:

„Zu diesen Tabulen findet man Zweierley Zahlen, Eine mitt rothen Caractren, welche wie einem ieden leichtlich zu sehen nichts andres dann ein Arithmetischer progress, die andere aber mit schwarzen nichts anders dann ein Geometrischer progress ist, und auf daß wir in dießem desto kurzer durchgehen, Woll wir dorthin den Arithmetischen progress die rothe und den Geometrischen progress die schwarze Zahl nennen, damit auch ein ieder die fundamenta dießer Tabulen grundlicher faße und dieselbigen desto beßer gebrauchen mag, so wollen wir

---

*) Von diesem Berichte hat eben Herr Oberlehrer Dr. Gieswald (1856) in der Stadtbibliothek zu Danzig das Manuscript aufgefunden und dieses in der angeführten Abhandlung von Seite 26 bis 36 abdrucken lassen.

in folgenden Begriff die Eigenschafft dießer 2 progressen für Augen stellen und dieselben mit etlichen Exempeln erklären.

$$\text{Arithmetisch}\ \frac{0.\ 1.\ 2.\ 3.\ \ 4.\ \ 5.\text{“} \ldots\ (\text{roth})}{1.\ 2.\ 4.\ 8.\ 16.\ 32.\text{“} \ldots\ (\text{schwarz})}.$$

Byrg bedient sich also derselben zwei Reihenanfänge zur Erläuterung wie Stifel.

Obschon er nun nirgends ausdrücklich auf dieses Mathematikers Werk hinweist, so erwähnt er doch gleich danach, dass etliche Arithmetici, wie auch Simon Jacob Zons und andere, die angeführten Eigenschaften der beiderlei Reihen berührt haben. Demgemäss kann es sicher keinem Zweifel unterliegen, dass er sich keineswegs für den Erfinder dieses Zusammenhangs der Reihen seiner rothen und schwarzen Zahlen — der jetzigen Logarithmen und Logarithmande — auszugeben gewillt war. Er führt deshalb auch seine Leistung mit den an unser erstes Citat sich anschliessenden Worten seiner Vorrede an:

> „so habe ich nichts nutzlicheres erachtet, alß diese Tabulen also zu continuiern (!), daß alle Zahlen so vorfallen in derselben mögen gefunden werden, auch welcher continuation (!) dieße Tabulen erwachßen“,

wodurch er also seine Tafel nur als eine Fortsetzung oder Weiterausbildung einer bereits vorhanden gewesenen bezeichnet.

Byrg stellte nun in die arithmetische Reihe seiner rothen Zahlen alle nach einander folgenden Anzahlen voller Zehner als

$$0,\ 10,\ 20,\ 30, \ldots\ 100,\ 110,\ 120, \ldots;$$

das allgemeine Glied dieser seiner Reihe war demnach

$$R = n\,.\,10.$$

Der rothen Zahl 0 schrieb er in seiner geometrischen Reihe
die schwarze Zahl 100000000
und der rothen Zahl 10
die schwarze Zahl 100010000
zu; also ist der Quotient seiner geometrischen Reihe 1·0001 und das allgemeine Glied der schwarzen Zahlen:

$$S = 100000000\,.\,(1{\cdot}0001)^n.$$

Sieht man demnach — was erlaubt bleibt — die Schlussnulle der rothen Zahlen nur als Zehntel an, so hat man:

$$\frac{R}{10} = n,$$

folglich die rothen Zahlen blos in natürlicher Reihung

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots n$$

fortlaufend; und sieht man in den schwarzen Zahlen die letzten 8 Ziffern als Dezimalen an oder zählt man mit diesen Zahlen nicht Einer, sondern Hundertmilliontel (des Einers), so ist:

$$\frac{S}{100000000} = (1{\cdot}0001)^n,$$

folglich sind die ihr entsprechenden Glieder der geometrischen Reihe seiner schwarzen Zahlen:

$$1,\ 1{\cdot}0001,\ 1{\cdot}00020001, \ldots (1{\cdot}0001)^n \ldots$$

Byrg nahm demnach, genau besehen, als arithmetische Reihe der rothen Zahlen, gerade so wie Stifel, die natürliche Zahlenreihe mit dem Ausgangsgliede 0; ferner machte er auch wie Stifel die 1 zum entsprechenden Ausgangsgliede der geometrischen Reihe der schwarzen Zahlen; nur nahm er, während Stifel für sein erläuterndes Beispiel zum Quotienten dieser geometrischen Reihe die möglich kleinste ganze Zahl 2 gewählt hatte, die nur um $\frac{1}{10000}$ vergrösserte Eins zum Quotienten an, damit die geometrische Reihe sich an die möglich meisten ganzen Zahlen thunlichst nahe anschliessen möchte. Gegenwärtig würden wir, nach unserer mehr ausgebildeten Zahlenlehre, eigentlich kurz sagen: so wie Stifel in seinem zur Erläuterung beigebrachten Beispiele die natürlich aufsteigenden Potenzen von 2 nach einander gereiht hatte, ebenso reihte Byrg in seiner Tafel die Potenzen von 1·0001 in natürlicher Ordnung steigend; und somit hat er eigentlich blos zu Stifel's Täfelchen eine erweiterte Tafel von Potenzen einer andern Zahl geliefert.

Wollte man demnach — was jedoch bisher noch Niemand ernstlich unternommen hat — das Wesen der Erfindung der Logarithmen ersehen:

1. in der Entdeckung des Zusammenhangs zwischen den Paaren entsprechender oder gleichvielter Glieder einer arithmetischen und geometrischen Reihe, so wie
2. in der Auffindung der Möglichkeit und Weise, die schwierigeren Rechnungen, das Multipliziren, Dividiren u. s. w. durch die leichtern des Addirens, Subtrahirens u. s. w. zu ersetzen;

so könnte durchaus nicht mehr bestritten werden, dass nicht erst Byrg um's oder kurz vor dem Jahre 1620, sondern bereits Stifel mindestens kurz vor dem Jahre 1544 die Logarithmen erfunden habe.

Allein genauer besehen hat **Byrg**, dem allerdings das Ziel vorschwebte, die bequemen logarithmischen Rechnungen mittels genügend ausgedehnter Tafeln zu ermöglichen, seine Aufgabe umgestülpt oder auf den Kopf gestellt. Denn bei den gewöhnlichen praktischen Rechnungen in besonderen Zahlen sind ja gerade die mit einander zu multiplizirenden, durch einander zu theilenden, so wie die zu potenzirenden und zu radicirenden (in letzter Instanz ganzen) Zahlen das **Gegebene**, und ihre Logarithmen das aus den Tafeln Auszuhebende oder die mittels dieser Tafeln in die Rechnung einzuführenden Zwischenhilfszahlen, also das vermittelnde Unbekannte. Man bedarf demnach einer Tafel, welche zur natürlich genugsam ausgedehnten Reihe der ganzen Zahlen die Logarithmen gibt. **Byrg's** Potenzentafel gab aber umgekehrt zur natürlichen Reihe der ganzzahligen Logarithmen die angehörigen, fast immer ungemein weit in Decimalen auslaufenden Zahlen. Durchgeht man für sich in Gedanken oder nach **Byrg's** „Bericht" den Zug von Rechnungen, den man mit **Byrg's** Potenzentafel an der Hand durchzumachen gezwungen ist, so ist man sicher zum Geständniss nothgedrungen, dieser Rechnungszug sei weit schwieriger und länger, als jene gewöhnlichen Rechnungen, welche man erleichtern oder abkürzen wollte; und somit muss man eingestehen, dass **Byrg's** Potenzentafel ihren Zweck verfehlt hat und völlig unpraktisch (zweckwidrig, unanwendbar) ist.

Ganz anders ist **Neper's** Kanon der Logarithmen angelegt. Ihm schwebte bei seiner und der zeitgenössischen Gelehrten wissenschaftlichen Richtung als Ziel vor, die schwierigen astronomischen Rechnungen mit den Sinus und Tangenten der in Graden und Minuten gemessenen Kreisbogen zu erleichtern. Dazu schuf er mit einer, für seine beschränkten analytischen Hilfsmittel wahrlich staunenswerthen Mühe zu den von Minute zu Minute im Kreisquadranten natürlich fortschreitenden Bogen die Reihe der Logarithmen ihrer Sinus und Tangenten, so dass man zu jedem in Graden und Minuten angegebenen Bogen sogleich, ohne aufhaltende Zwischenrechnung, den Logarithmus seines Sinus oder seiner Tangente herauslesen oder herausschreiben konnte. Sein Kanon war demnach keine Potenzentafel, wie jene **Byrg's**, sondern wahrhaft eine **Logarithmentafel**, dienlich und förderlich dem vorgesetzten Rechnungszwecke.

Nun ist es ein längst ausgemachter Grundsatz, dass als Erfinder eines praktischen Gegenstandes oder Verfahrens nur derjenige Mann gilt, welcher den hierauf beziehlichen Gedanken und Erkenntnissen seiner Vorgänger den eigentlichen Geist und das wahre Leben der Praxis (Anwendung) einhauchte: **mithin** ist es

unumstösslich entschieden, dass weder unser geistreicher Mathematiker Stifel, noch unser findiger Praktiker Byrg, **sondern blos der scharfsinnige schottische Gelehrte Neper, und nur er allein, für den Erfinder der Logarithmen angesehen werden kann und muss.**

Daraus kann nun freilich der deutsche Freund der Wissenschaft nur mit Bedauern entnehmen, dass des sonst so hoch schätzbaren kaiserlichen Hof-Kammer-Uhrmachers Byrg Tafeln sammt Gebrauchsanweisung nur wenig über die, um 76 Jahre früher von Stifel ausgesprochenen Grundgedanken hinausgegangen sind, dass selbe ohne Verwechselung ihres Arguments oder ihrer Eingangszahl sich kaum Bahn zu brechen vermocht, also erst noch eines kräftigern und regeren Geistes bedurft hätten, der sie belebt und wirksam gemacht hätte. Aus dieser ihrer Unvollkommenheit in der Anordnung dürfte sich zugleich begreifen lassen, warum der so geistreiche und anregsame Mathematiker und Astronom Kepler, wenn er in der That lange vor dem Jahre 1618, wo ihm Neper's Tafeln zukamen, von Byrg's Arbeit volle Kenntniss besessen hätte — wie des Letztern Schüler und Verwandter Bramer nachher öffentlich erklärte — selbe nicht umständlich durchforscht und mit aller Kraft seines Geistes eben so wie Neper's Leistungen gefördert habe. Denn zugestehen muss man, dass, gleichwie Brigg's die neue Erfindung Neper's, durch die Annahme der logarithmischen Grundzahl 10 und durch Berechnung entsprechender Tafeln für die Zahlen und Winkelfunktionen, erst in's richtige Geleis nützlicher Verwendung einlenkte, Kepler auf dem Felde der Theorie zu ihrer Verdeutlichung, Begründung und Verbreitung mannhaft und erfolgreich mitwirkte.

XXIII.

Nachtrag zu dem Aufsatze über die Fläche des sphärischen Vierecks Thl. XXXIV. Nr. III. S. 12.

Von

Herrn Professor Dr. *J. F. König*

am Kneiphöf'schen Gymnasio zu Königsberg i. Pr.

Setzt man, mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung Bd. 34. S. 12. ff.,

$$\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\sin\frac{s-c}{2}\sin\frac{s-d}{2}=P,$$

$$\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}\cos\frac{s-d}{2}=P';$$

dann ist:

$$\cos\frac{e}{2}^2=\cos\frac{a+b}{2}^2+\sin a\sin b\cos\frac{B}{2}^2$$

und auch

$$=\cos\frac{c+d}{2}^2+\sin c\sin d\cos\frac{D}{2}^2;$$

also, wenn man die halbe Summe nimmt und entwickelt:

$$\cos\frac{e}{2}^2=1-\frac{\cos\frac{a}{2}^2+\cos\frac{b}{2}^2+\cos\frac{c}{2}^2+\cos\frac{d}{2}^2}{2}$$

$$+\cos\frac{a}{2}^2\cos\frac{b}{2}^2+\cos\frac{c}{2}^2\cos\frac{d}{2}^2+\tfrac{1}{4}\sin a\sin b\cos B+\tfrac{1}{4}\sin c\sin d\cos D$$

$$=2P-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}-\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}$$

$$+\cos\frac{a}{2}^2\cos\frac{b}{2}^2+\cos\frac{c}{2}^2\cos\frac{d}{2}^2+\tfrac{1}{4}\sin a\sin b\cos B+\tfrac{1}{4}\sin c\sin d\cos D.$$

Zieht man nun den am angef. Orte S. 16. gefundenen Ausdruck für $\cos\frac{e^2}{2}\cos\frac{F}{2}$ von $\cos\frac{e^2}{2}$ ab, so entsteht:

$$2\cos\frac{e^2}{2}\sin\frac{F^2}{4}=2P+(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2})^2$$

$$+(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2})(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos B-\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos D)$$

$$-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos\frac{B+D^2}{2},$$

oder, da

$$\sin a\sin b\cos B-\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos D$$

$$=(\cos\gamma-\cos\delta)-(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2})$$

ist,

$$=2P+(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2})(\cos\gamma-\cos\delta)$$

$$-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos\frac{B+D^2}{2}$$

$$=2P+m.$$

Auf ähnliche Weise erhält man, wenn man $\cos\frac{e^2}{2}\cos\frac{F}{2}$ zu $\cos\frac{e^2}{2}$ addirt:

$$2\cos\frac{e^2}{2}\cos\frac{F^2}{4}=2P'+(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2})(\cos\gamma+\cos\delta)$$

$$+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos\frac{B+D^2}{2}-4P'$$

$$=2P'+n;$$

und durch Division beider Ausdrücke:

$$\operatorname{tg}\frac{F^2}{4}=\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}\operatorname{tg}\frac{s-d}{2}+\frac{mP'-nP}{P'(2P'+n)}.$$

Die Werthe für m und n eingesetzt geben den Zähler des Bruches

$$Z=(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\gamma+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\delta)(P'-P)$$

$$+4PP'-(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\delta+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\gamma$$

$$+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos\frac{B+D^2}{2})(P+P').$$

Da

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\gamma=\frac{\cos a+\cos b+\cos e+1}{4},$$

$$\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\delta=\frac{\cos c+\cos d+\cos e+1}{4},$$

also

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\gamma+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\delta$$

$$=\frac{\cos a+\cos b+\cos c+\cos d}{4}+\cos\frac{e^2}{2}=(P'-P)+\cos\frac{e^2}{2}$$

und

$$4PP'=(P+P')^2+(P'-P)^2$$

ist, so wird:

$$Z=(P'-P)\cos\frac{e^2}{2}-\{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\delta+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\gamma-(P+P')$$
$$+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos\frac{B+D^2}{2}\}(P+P'),$$

und weil

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\delta+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\gamma$$

$$=\cos\gamma\cos\delta-(\cos\gamma-\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2})(\cos\delta-\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2})$$
$$+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}$$

$$=\cos\gamma\cos\delta-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos B\cos D+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}$$

und

$$P+P'=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}$$

ist,

$$=(P'-P)\cos\frac{e^2}{2}-(\cos\gamma\cos\delta-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\sin B\sin D)(P+P').$$

Die Substitution von m und n giebt den Nenner:

$$N=P'\{(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2})(\cos\gamma+\cos\delta)$$
$$-2P'+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\cos\frac{B+D^2}{2}\},$$

oder wenn man für

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\gamma+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\delta$$

und für

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\delta+\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\cos\gamma$$

die vorigen Werthe und für $2P'$ den Werth

$$\frac{\cos a+\cos b+\cos c+\cos d}{4}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}$$

setzt,

$$=P'(\cos\frac{e^2}{2}+\cos\gamma\cos\delta-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\sin B\sin D).$$

Das Endresultat ist also:

$$\operatorname{tg}\frac{F^2}{4}=\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}\operatorname{tg}\frac{s-d}{2}$$

$$+\frac{(P'-P)\cos\frac{e^2}{2}-(\cos\gamma\cos\delta-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\sin B\sin D)(P+P')}{P'(\cos\frac{e^2}{2}+\cos\gamma\cos\delta-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2}\sin B\sin D)},$$

wo noch für P', $(P+P')$ und $(P'-P)$ die schon angeführten Werthe zu setzen sind.

Für $d=0$, also $e=c$ und $\delta=\frac{c}{2}$, wird der Zähler des Bruches $=0$, d. h. die Formel geht für diesen Fall in die des S. Lhuilier für die Fläche des sphärischen Dreiecks über.

XXIV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Zu beweisende Lehrsätze.

Von Herrn Rector Dr. C. H. **Nagel** an der Real-Anstalt zu Ulm.

Allbekannt sind folgende Lehrsätze über das Dreieck, welche sich in vielen Sammlungen finden:

1. Die drei von den Winkelspitzen auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel schneiden sich in einem einzigen Punkte (Punkt I.).
2. Die drei in den Halbirungspunkten der Seiten errichteten Perpendikel schneiden sich in einem einzigen Punkte (Punkt II.).
3. Die drei von den Winkelspitzen nach den Halbirungspunkten der Seiten gezogenen geraden Linien schneiden sich in einem einzigen Punkte (bekanntlich der **Schwerpunkt** des Dreiecks).
4. Die genannten drei Punkte liegen so in gerader Linie, dass der Schwerpunkt zwischen Punkt I. und Punkt II., und zwar doppelt so weit von I., als von II. entfernt liegt.

Es gibt übrigens noch folgende analoge Satzreihen in Beziehung auf das Dreieck, die von mir vor längerer Zeit in einem Programme mitgetheilt, doch, wie wir scheint, weniger bekannt geworden sind, und die ich daher für weitere Kreise hier mittheile. Vielleicht können sie als Uebungsaufgaben für vorgerücktere Schüler dienen. Ich bediene mich dabei folgender, sich von selbst erklärender Ausdrücke: **Innerer Berührungskreis** heisse der im Dreieck liegende Kreis, der die drei Seiten des Dreiecks selbst berührt; die drei Berührungspunkte heissen **innere Berührungspunkte**. **Aeussere Berührungskreise** heissen die so an dem Dreieck liegenden drei Kreise, dass sie je eine



Seite selbst und die Verlängerungen der beiden andern berühren; der auf der Seite selbst liegende Berührungspunkt eines solchen Kreises heisse der äussere Berührungspunkt dieser Seite.

A. 1. Die drei geraden Linien, welche von den Winkelspitzen eines Dreiecks nach den äussern Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, schneiden sich in einem einzigen Punkte.

2. Dieser Punkt, der Mittelpunkt des innern Berührungskreises und der Schwerpunkt des Dreiecks liegen ebenfalls so in gerader Linie, dass der Schwerpunkt zwischen Punkt I. und II., und zwar doppelt so weit von I. als von II. entfernt liegt.

B. 1. Die drei geraden Linien, welche von den Winkelspitzen nach den innern Berührungspunkten der Gegenseiten gezogen werden, schneiden sich in einem einzigen Punkte (Punkt I.).

2. Die drei von den Mittelpunkten der äussern Berührungskreise an die Halbirungspunkte der zugehörigen Seiten gezogenen geraden Linien schneiden sich verlängert in einem einzigen Punkte (Punkt II.).

3. Diese beiden Punkte und der Schwerpunkt liegen ebenfalls so in gerader Linie, dass der Schwerpunkt zwischen Punkt I. und II., und zwar doppelt so weit von I., als von II. entfernt liegt.

C. 1. Die drei von den Mittelpunkten der äussern Berührungskreise auf die zugehörigen Seiten gefällten Perpendikel schneiden sich, nöthigerweise verlängert, in einem einzigen Punkte, der von den drei erstern Mittelpunkten gleichweit entfernt ist.

2. Dieser Punkt, der Mittelpunkt des innern Berührungskreises und der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises liegen so in einer geraden Linie, dass der letztere Punkt zwischen den beiden erstern und zwar gleichweit von beiden entfernt liegt.

D. 1. Wenn man von den Mittelpunkten zweier äusseren Berührungskreise auf die diesen Kreisen zugehörigen Seiten, und zwar je von dem einen auf die dem andern zugehörige Seite ihrer Verlängerung und ebenso vom Mittelpunkt des innern Berührungskreises auf die dritte Seite Perpendikel fällt, so schneiden sich diese gehörig verlängert in einem einzigen Punkte, der von den drei genannten Mittelpunkten gleichweit entfernt ist.

2. Dieser Punkt, der Mittelpunkt des zu seiner Bestimmung nicht gebrauchten dritten äusseren Berührungskreises und der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises liegen so in einer geraden Linie, dass der letztere Punkt zwischen den beiden erstern und zwar gleichweit von beiden entfernt liegt.

E. 1. Wenn man von zwei Winkelspitzen aus je nach demjenigen Berührungspunkte der Gegenseite, welcher auf der über die dritte Winkelspitze hinausgehenden Verlängerung liegt, zwei gerade Linien, und von dieser dritten Winkelspitze nach dem inneren Berührungspunkte der Gegenseite eine dritte gerade Linie zieht, so schneiden sich diese drei Linien in einem einzigen Punkte.

2. Dieser Punkt, der Mittelpunkt des zu der Seite, auf welcher der innere Berührungspunkt liegt, gehörigen äusseren Berührungskreises und der Schwerpunkt des Dreiecks liegen so in gerader Linie, dass der Schwerpunkt zwischen beiden erstgenannten Punkten, und zwar doppelt so weit vom ersten, als vom zweiten entfernt liegt.

Von Herrn Alexander Löffler in Wien.

Die Buchstaben A, B, C bezeichnen in Nachfolgendem beliebige Functionen der unabhängig Veränderlichen x.

1) Es soll das Integral in geschlossener Form der Differentialgleichung $y'' + (A' - A^2)y = 0$ angegeben werden.

2) Es soll gezeigt werden, dass, wenn $y = u$ ein Genüge leistender Werth der Differential-Gleichung $Ay'' + By' + Cy = 0$ ist, das vollständige Integral dann durch die Formel

$$y = u[a_1 + a_2 \int \frac{dx}{u^2 e^{\int \frac{Bdx}{A}}}]$$

repräsentirt wird.

3) Die Differentialgleichung

$$Ay'' + (ax \pm b)y' = ay$$

soll integrirt werden.

4) Es ist die Beziehung zwischen y und x aufzustellen, welche den Ausdruck

$$U=\int_a^b dx[Ay''+By+(B'-A'')y]$$

zu einem Minimum macht, wenn die Grenzwerthe von y bekannt sind.

5) Wird mit m eine beliebige Function von A bezeichnet, so ist das Integral der Differentialgleichung

$$y''+Ay'+[mA+\frac{dm}{dA}A'-m^2]y=0$$

in geschlossener Form anzugeben.

Von Herrn Franz Unferdinger an der k. k. Marine-Sternwarte zu Triest.

1) Es soll aus folgender Gleichung die Unbekannte x bestimmt werden:

$$(1+x^2)(1-x)^2=c^2x^2.$$

Resultat:

$$x_1=\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1+c^2})+\sqrt{(1+\sqrt{1+c^2})^2-4}\},$$

$$x_2=\tfrac{1}{2}\{1-\sqrt{1+c^2})+\sqrt{(1-\sqrt{1+c^2})^2-4}\},$$

$$x_3=\tfrac{1}{2}\{(1+\sqrt{1+c^2})-\sqrt{(1+\sqrt{1+c^2})^2-4}\},$$

$$x_4=\tfrac{1}{2}\{(1-\sqrt{1+c^2})-\sqrt{(1-\sqrt{1+c^2})^2-4}\}.$$

2) Man soll aus folgenden zwei Gleichungen die Unbekannten x und y bestimmen:

$$ax-by=x^2-y^2,$$
$$bx+ay=4xy.$$

Resultat:

$$x=\frac{1}{4}\frac{\sqrt[3]{(a+b)^4}-\sqrt[3]{(a-b)^4}}{\sqrt[3]{(a+b)}-\sqrt[3]{(a-b)}},\quad y=\frac{1}{4}\frac{\sqrt[3]{(a+b)^4}-\sqrt[3]{(a-b)^4}}{\sqrt[3]{(a+b)}+\sqrt[3]{(a-b)}}.$$

3) Das Quadrat einer geraden Zahl $2z$ lässt sich so oft als die Differenz zweier Quadratzahlen darstellen, als sich z^2 in zwei ungleiche Factoren zerlegen lässt. Warum?

Beispiel. $6^2=36$ lässt sich auf vier Arten als Product ungleicher Factoren darstellen, 1.36, 2.18, 3.12, 4.9; daher lässt sich $(2.6)^2=12^2$ auf vier Arten und nicht mehr als die Differenz zweier Quadrate darstellen. In der That hat man:

$$12^2=37^2-35^2=20^2-16^2=15^2-9^2=13^2-5^2.$$

4) **Wenn sich eine Zahl auf n verschiedene Arten in zwei Factoren zerlegen lässt, so kann man aus diesen Zerlegungen immer $\frac{1}{2}n(n-1)$ neue Zahlen finden, welche sich auf zwei verschiedene Arten in die Summe zweier Quadrate zerlegen lassen.** So ist z. B.

$$48=1.48=2.24=3.16=4.12=6.8,$$

und hiermit findet man:

$$\begin{aligned}
2885&=47^2+26^2=49^2+22^2,\\
2570&=47^2+19^2=49^2+13^2,\\
2465&=47^2+16^2=49^2+8^2,\\
2405&=47^2+14^2=49^2+2^2,\\
845&=22^2+19^2=26^2+13^2,\\
740&=22^2+16^2=26^2+8^2,\\
680&=22^2+14^2=26^2+2^2,\\
425&=13^2+16^2=19^2+8^2,\\
365&=13^2+14^2=19^2+2^2,\\
260&=\ 8^2+14^2=16^2+2^2;
\end{aligned}$$

ebenso ist $36=1.36=2.18=3.12=4.9=6.6$, und man erhält hiermit:

$$\begin{aligned}
1625&=37^2+16^2=35^2+20^2,\\
1450&=37^2+\ 9^2=35^2+15^2,\\
1394&=37^2+\ 5^2=35^2+13^2.\\
1369&=37^2+\ 0^2=35^2+12^2,\\
481&=20^2+\ 9^2=16^2+15^2,\\
425&=20^2+\ 5^2=16^2+13^2,\\
400&=20^2+\ 0^2=16^2+12^2,\\
250&=15^2+\ 5^2=\ 9^2+13^2,\\
225&=15^2+\ 0^2=\ 9^2+12^2,\\
169&=13^2+\ 0^2=\ 5^2+12^2.
\end{aligned}$$

5) Es soll die folgende Relation, in welcher a, b, c die drei Seiten und A, B, C die gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreieckes bezeichnen, nachgewiesen werden:

$$\frac{\mathrm{Sin}^2 A}{\mathrm{Sin}^2 a}=\frac{\mathrm{Sin}^2 B}{\mathrm{Sin}^2 b}=\frac{\mathrm{Sin}^2 C}{\mathrm{Sin}^2 c}=\frac{1+\mathrm{Cos}\,A\,\mathrm{Cos}\,B\,\mathrm{Cos}\,C}{1-\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Cos}\,c}.$$

Von Herrn F. Unferdinger an der k. k. Marine-Sternwarte zu Triest.

Auf der Richtung eines Durchmessers eines gegebenen Kreises liegen zwei feste Punkte A und B, der eine ausserhalb, der andere innerhalb des gegebenen Kreises auf derselben Seite vom Mittelpunkt, und so, dass die mittlere geometrische Proportionale ihrer Abstände von diesem Mittelpunkt dem Radius des gegebenen Kreises gleich ist. Verbindet man irgend einen Punkt M des gegebenen Kreises mit A und B und verlängert die Verbindungslinien nöthigenfalls, bis sie den Kreis noch in zwei anderen Punkten A_1 und B_1 schneiden, so ist die Sehne A_1B_1 stets auf der Richtung AB senkrecht, wie auch der Punkt M gewählt werden mag. Warum?

XXV.

Miscellen.

Ueber Gouzy's Methode zur Bestimmung der mittleren Proportionallinie.

Von Herrn Doctor Völler zu Saalfeld.

Ein der Gouzy'schen Methode *), „zwischen zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionallinie zu suchen", beizufügen-

*) Nouvelles Annales de Mathematiques. Tome XVI. Mars 1857. p. 125. — Archiv der Mathematik und Physik. Thl. XXXI. Hft. 4. p. 476.

der Beweis lässt sich auch mittelst der Aehnlichkeit der Dreiecke auf folgende Weise führen.

Wenn auf einer beliebigen geraden Linie MN (Taf. I. Fig. 9.) $AB=b$, $AC=a$ und auch $BD=a$ abgetragen, hierauf mit der Zirkelöffnung a aus C und D als Mittelpunkten zwei sich in E schneidende Kreisbögen, dann noch die Linien EA und EB gezogen werden, so ist jede dieser beiden Linien die gesuchte mittlere Proportionale zwischen a und b.

Es ist nehmlich zunächst, wie leicht erhellet, $\Delta DAE \cong \Delta CBE$, folglich ΔABE gleichschenklig und somit ähnlich dem Dreieck DBE, weil $\angle ABE = \angle DBE$ und $\angle BAE = \angle DEB$. Daher verhält sich:

$$DB:BE=BE:AB,$$

d. i.

$$a:BE=BE:b.$$

Folglich:

$$BE^2=ab,$$

w. z. b. w.

Schreiben des Herrn F. Unferdinger an der k. k. Marine-Sternwarte zu Triest an den Herausgeber.

Vor einigen Tagen erhielt ich das erste Heft des XXXIV. Theils Ihres geschätzten Archivs, in welchem Sie von einem Schreiben des Herrn Dr. Zehfuss in Heidelberg berichten, betreffend meinen in Thl. XXXIII. S. 104. abgedruckten Aufsatz über das Rationalmachen des Neuners in Brüchen von der Form:

$$\frac{Z}{a_1+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\ldots.\sqrt{a_n}}.$$

Obgleich mir der Inhalt der genannten Zuschrift des Herrn Dr. Zehfuss zur Zeit noch unbekannt ist, so bin ich doch gerne bereit, auf die von Ihnen a. a. O. gemachte Anmerkung im Interesse der Wahrheit und Wissenschaft zu antworten, und es soll mich freuen, wenn hiermit zugleich dem Wunsche des Herrn Doctor Zehfuss genügt wird.

Aus der Fassung meines Artikels über den angeregten Gegenstand geht hervor, dass ich nur von jener Methode des Rationalmachens etwas beibringen wollte, welche sich zur Erreichung ihres Zieles eines, nur in den Vorzeichen von dem Nenner des

gegebenen Bruches verschiedenen, multiplicirenden Factors bedient, welche Methode auch gleich am Anfange des Aufsatzes bezeichnet ist; dieses haben bereits Sie selbst in der citirten Anmerkung besonders hervorgehoben *).

Was nun den Schluss meines Aufsatzes betrifft, welcher also lautet: .... „Soll man sich also dem Ziele des Rationalmachens genähert haben, so muss u. s. w.“, so bin ich gerne bereit, ihn in der folgenden schärferen Fassung zu berichtigen, und ich bitte Sie, diese Berichtigung in Ihrem geschätzten Archiv zu veröffentlichen.

.... Alles bisher Gesagte gilt auch noch dann, wenn a_1 eine Wurzelgrösse ist. Soll man sich nun dem Ziele des Rationalmachens genähert haben, so muss, wenn a_1 rational ist, $r(r-1)<2r-1$ oder $r^2<2r$ sein, je nachdem $n=2r$ oder $n=2r+1$ ist. Diess gibt im ersten Falle $r \leqq 2$ und $n \leqq 4$, im zweiten Falle $r \leqq 1$ und $n \leqq 3$, so dass also ein Bruch mit einem Nenner wie

$$a_1+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}$$

auf die besprochene Art noch in einen andern von gleichem Werth und mit rationalem Nenner verwandelt werden kann; ein Bruch hingegen mit einem Nenner wie

$$a_1+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5},$$

sobald a_1 von Null verschieden ist, im Allgemeinen nicht mehr.

Ist a_1 ebenfalls eine zweite Wurzel, d. h. sind sämmtliche n Glieder des Nenners irrational, so muss, wenn man sich dem Ziele des Rationalmachens genähert haben will, $r(r-1)<2r$ oder $r^2<2r+1$ sein, je nachdem $n=2r$ oder $n=2r+1$ ist. Beide Relationen geben mit Leichtigkeit $r \leqq 2$, also im ersten Falle $n \leqq 4$, im zweiten Falle $n \leqq 5$, so dass also in einem Bruch, dessen Nenner die Form

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}$$

---

*) Was ich Herrn Unferdinger schuldig war, da ich von vorn herein vollkommen überzeugt war, dass er bei seinem Aufsatze keinen andern Zweck hatte, als den von mir angegebenen. Eben so glaube ich demselben jetzt schuldig zu sein, unverzüglich diesen seinen Brief abdrucken zu lassen. G.

hat, die Anzahl der Irrationalgrössen des Nenners noch vermindert werden kann. In der That, macht man zum Zweck des Rationalmachens den ersten Schritt, so ist der neue Nenner:

$$(a_1+a_2+a_3-a_4-a_5)+\sqrt{4a_1a_2}+\sqrt{4a_1a_3}+\sqrt{4a_2a_3}-\sqrt{4a_4a_5},$$

welcher nur vier Wurzelgrössen enthält, aber mit jenem obigen

$$a_1+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}$$

einerlei Form hat, so dass also im Allgemeinen auf die bezeichnete Art eine weitere Verminderung der Wurzelgrössen nicht durchführbar ist, und man sieht also, dass die Möglichkeit, einen Bruch von obiger Beschaffenheit mit rationalem Nenner darzustellen, im Allgemeinen nicht mehr vorhanden ist, sobald sein Nenner mehr als vier Glieder hat.

Triest, den 6. März 1860. F. Unferdinger.

Merkwürdige allgemeine analytische Relationen.

Von dem Herausgeber.

I.

Es ist immer:

$$\begin{aligned}&(a_0b_1-b_0a_1)(\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1)\\&+(b_0c_1-c_0b_1)(\beta_0\gamma_1-\gamma_0\beta_1)\\&+(c_0a_1-a_0c_1)(\gamma_0\alpha_1-\alpha_0\gamma_1)\\=\;&(a_0\alpha_0+b_0\beta_0+c_0\gamma_0)(a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1)\\&-(a_0\alpha_1+b_0\beta_1+c_0\gamma_1)(\alpha_0a_1+\beta_0b_1+\gamma_0c_1).\end{aligned}$$

II.

Es ist immer:

$$\begin{aligned}&(a_0^2+b_0^2+c_0^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)\\&-(a_0^2+b_0^2+c_0^2)(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2\\&-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2a_0+b_2b_0+c_2c_0)^2\\&-(a_2^2+b_2^2+c_2^2)(a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1)^2\\&+2(a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1)(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)(a_2a_0+b_2b_0+c_2c_0)\\&=\{a_0(b_1c_2-c_1b_2)+b_0(c_1a_2-a_1c_2)+c_0(a_1b_2-b_1a_2)\}^2,\end{aligned}$$

wo der letzte Ausdruck sich auch noch auf andere Weise schreiben lässt.

Von dem Herausgeber.

In seinen Beiträgen zur Biographie Bessel's (Zeitschrift für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie u. s. w. Band I. Heft 3. S. 151.) führt Wichmann an, dass den Stamm zu der später so reichhaltigen Bibliothek Bessel's die folgenden Bücher bildeten, aus denen er seine erste mathematische und astronomische Ausbildung schöpfte:

Mönnich, Lehrbuch der Mathem. 2 Thle. Berlin 1800–1801.

Bohnenberger, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung. Göttingen 1795.

v. Ende, Geographische Ortsbestimmungen im niedersächsischen Kreise. Celle 1801.

Pfaff, Versuch einer neuen Summations-Methode. Berlin 1788.

Hindenburg, Sammlung combinat. analytischer Abhandlungen. 2 Thle. Leipzig 1796 und 1800.

Kästner, Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. 3. Aufl. Göttingen 1799.

Kästner, Anfangsgründe der höheren Mechanik. 2. Aufl. Göttingen 1793.

Euler, Theorie der Planeten und Cometen. Uebersetzt von Pacassi. Wien 1781.

Scheibel, Astronom. Biblioth. Abschn. 1. 2. Breslau 1784–89.

Fehler

in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln, Stereotyp-Ausgabe von 1860:

Taf. I. S. 29. Fusstafel, Spalte $^{\circ\,\prime\,\prime\prime}$, Z. 1. statt 3.35.40 lies: 0.35.40.

Braunschweig am 27. Februar 1860.

Fr. Vieweg & Sohn.

Berichtigungen.

In Thl. XXXIII. S. 57. statt Thl. XXIX. S. 432. setze man Thl. XXXIII. S. 420.

Im Literarischen Berichte Nr. CXXIX. (Thl. XXXIII.) S. 10. Z. 12. setze man „algebraischer" statt „allgebraischer."



XXVI.

Beiträge zur Tetraedrometrie.

Von

Herrn Dr. G. *Junghan*

in Gotha.

Die Tetraedrometrie scheint seit geraumer Zeit nicht zu denjenigen Feldern zu gehören, die von den Mathematikern mit Vorliebe bebaut werden. Seit Feuerbachs „Grundriss zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide. Nürnberg. 1827." (nur ein Auszug der Resultate ohne Beweise aus dem angekündigten ausführlichen Werke, von dem ich nicht weiss, ob es erschienen ist) scheint kein bedeutendes Werk über den Gegenstand erschienen zu sein. Feuerbach, so wie seine grossen Vorgänger, Lagrange und Carnot, behandeln den Gegenstand durch Coordinatensysteme, also durch Grössen, die dem Tetraeder als solchem fremd sind, indem sie die Gleichungen zwischen den Coordinaten der vier Eckpunkte und denen eines fünften, der zu ihnen in gegebenen Beziehungen steht, untersuchen. Diese grossartigen und von schönen Resultaten gekrönten Untersuchungen machen es aber, wie mir scheint, nicht überflüssig, die Abhängigkeit der verschiedenen Bestimmungsgrössen des Tetraeders von einander unmittelbar, nämlich ohne das Mittel der Coordinaten, aufzusuchen und darzustellen. In diesem Sinne scheint noch wenig gethan zu sein. Das Neueste, was ich kenne, ist die erste Abhandlung im ersten Bande dieses Archivs von Professor Bretschneider und Einiges von demselben Verfasser in seinem „Lehrgebäude der niederen Geometrie. 1844." Die Leser, welche etwas

Bedeutendes darüber aus neuerer Zeit kennen, sind um gefällige Mittheilung gebeten. — Der Hauptgedanke, den ich seit einiger Zeit über diesen Gegenstand verfolge, ist der: dass im Tetraeder die Ecken als solche durch gewisse Functionen, die ich als Eckensinus und polaren Eckensinus bezeichne (s. §. 4. im Folgenden) eben so als selbstständige Rechnungsgrössen zu behandeln sind, wie die Winkel durch ihre Sinus und Cosinus im ebenen und sphärischen Dreieck. Diese Eckenfunctionen sind auch sonst schon bemerkt worden (sie machen sich bei allen das Tetraeder betreffenden Rechnungen geltend), aber die Symbole dafür sind mehr nur als Abkürzungen für eine gewisse Zusammenstellung von ebenen und Flächen-Winkeln behandelt, nicht als Symbole besonderer Rechnungsgrössen, die ihre eigenen Gesetze haben. — Hat man also die Tetraedrometrie einerseits als eine Anwendung der Coordinatengeometrie, andererseits als eine Anwendung der ebenen und sphärischen Trigonometrie betrachtet, so möchte ich den Versuch wagen, sie neben die letzteren als eine eigene Disciplin hinzustellen, deren Rechnungsgrössen sind: Längen, ebene Winkel, Flächenwinkel, ebene Dreieckflächen und dreiseitige Ecken. In diesem Sinne empfehle ich in dem folgenden Aufsatze besonders §. 16. über das Verhalten einer dreigetheilten dreiseitigen Ecke zu den Theilecken und §. 19. über das Verhalten von vier Ecken um einen Punkt der Aufmerksamkeit der geneigten Leser.

§. 1.

Am Tetraeder $OABC$ (Taf. IV. Fig. 1.) bezeichnen wir die drei Seiten der Ecke O mit $a\,b\,c$, ihre Winkel mit $\alpha\,\beta\,\gamma$, ihre Kanten mit $u\,p\,q$, deren Gegenkanten mit $l\,m\,n$, die an ihnen liegenden Flächenwinkel mit $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$. Es heissen die Seiten und Winkel

der Ecke A: $a_1\,b_1\,c_1\,\alpha\,\beta'\,\gamma'$,
der Ecke B: $a_2\,b_2\,c_2\,\alpha'\,\beta\,\gamma'$,
der Ecke C: $a_3\,b_3\,c_3\,\alpha'\,\beta'\,\gamma$.

Es repräsentiren

$l\,m\,n$ die Seiten eines Dreiecks (ABC),
$a_1\,b_2\,c_3$ die Winkel desselben,
$\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ die an einem Dreieck anliegenden Flächenwinkel,
$a\,b\,c$ die Seiten einer Tetraederecke,
$\alpha\,\beta\,\gamma$ die Winkel derselben,



$p\ q$	die Kanten derselben,
$\Delta\ \Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$	bezeichnen die den Ecken O, A, B, C gegenüberliegenden Dreiecke,
$\varrho\ \varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3$	die Radien der ihnen umschriebenen Kreise,
$h\ h_1\ h_2\ h_3$	die auf sie gefällten Höhen,

(K sei ein beliebiger Punkt im Tetraeder),

$r\ r_1\ r_2\ r_3$	bezeichnen die Längen KO, KA, KB, KC,
$\mu\ \nu$	die Winkel der $r_2 r_3$, $r_1 r_3$, $r_1 r_2$, also die Seiten der gegen Δ geöffneten Ecke bei K,
$\pi\ \varkappa$	die Winkel der rr_1, rr_2, rr_3, also solche drei, die einen gemeinsamen Schenkel r haben,
$d\ d_1\ d_2\ d_3$	die von K auf $\Delta\ \Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ gefällten Normalen,
$\mathfrak{T}$	den Inhalt des ganzen Tetraeders,
$\tau\ \tau_1\ \tau_2\ \tau_3$	die vier bei K zusammenstossenden und von $\Delta\ \Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ geschlossenen Theiltetraeder,
$\mathfrak{p}\ \mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3$	dieselben Tetraeder oder Pyramiden, wenn $r = r_1 = r_2 = r_3$ ist.

Bezeichnungen von Winkeln, wie $(r_2 p)$, $(r_2 \Delta)$ u. s. w., als von denjenigen, welche r_2 mit p, resp. r_2 mit Δ bilden, sind selbstverständlich.

§. 2.

Bekanntlich ist

$$2\varrho = \frac{l}{\sin a_1} = \frac{m}{\sin b_2} = \frac{n}{\sin c_3}.$$

Dieser für ein ebenes Dreieck constante Quotient werde der **Modulus des Dreiecks** genannt. Jeder Sinus eines Dreiecks wird also durch Multiplication mit dem Modulus in die Gegenseite, jede Seite durch Division durch denselben in den Sinus des Gegenwinkels verwandelt.

Gleicher Weise werde der Quotient $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ der **Modulus der Ecke** (O)*) genannt und mit M bezeichnet; M_1, M_2, M_3 sind die Moduln der Ecken A, B, C, so dass

---

*) Dieser passende Name für 2ϱ und $\frac{\sin a}{\sin \alpha}$ ist aus Professor Bretschneiders „Lehrgebäude der niederen Geometrie. Jena. Frommann 1844" entlehnt.

$$M \sin\alpha = \sin a, \quad M_1 \sin\alpha = \sin a_1, \quad \frac{\sin a}{M} = \frac{\sin a_1}{M_1} = \sin\alpha.$$

§. 3.

Wir setzen ferner:

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c), \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma),$$

also

$$s - a = \tfrac{1}{2}(b + c - a), \quad \sigma - \alpha = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha),$$

u. s. w. u. s. w.

und

$$e = 180^0 - s\;{}^{*}), \qquad \varepsilon = \sigma - 90^0,$$

also

$$a + e = 180^0 - (s - a), \quad \alpha - \varepsilon = 90^0 - (\sigma - \alpha)$$

u. s. w. u. s. w.

Haben dieselben Buchstaben, unten accentuirt, dieselben Bedeutungen für das Polardreieck, ist also $a_1 = 180^0 - \alpha$, $\alpha_1 = 180^0 - a$ u. s. w., so ist

$$s = 270^0 - \sigma_1, \quad \text{also} \quad 180^0 - s = \sigma_1 - 90^0,$$

also

$$e = \varepsilon_1, \quad s = 180^0 - \varepsilon_1,$$

$$a + e = 180^0 - (\alpha_1 - \varepsilon_1), \quad s - a = \alpha_1 - \varepsilon_1,$$

u. s. w.

ferner

$$\sigma = 270^0 - s_1, \quad \text{also} \quad \sigma - 90^0 = 180^0 - s_1,$$

also

$$\varepsilon = e_1, \quad \sigma = 90^0 + e_1,$$

$$\alpha - \varepsilon = 180^0 - (a_1 + e_1), \quad \sigma - \alpha = a_1 + e_1 - 90^0$$

u. s. w.

---

*) Durch die Einführung der Winkelgrösse $2e$ (des Ueberschusses von 360° über die Seitensumme) neben 2ε (dem sphärischen Excess) gewinnen viele Formeln der sphärischen Trigonometrie an elegantem Ansehen. Ich erlaube mir darüber auf eine kleine Schrift: „Studien über das sphärische Dreieck“ aufmerksam zu machen, welche in der Programmenliteratur begraben liegt (Programm des Luckauer Gymnasiums 1848), und welche die Keime von dem enthält, was ich in der gegenwärtigen Abhandlung etwa Neues und nicht Unfruchtbares darzubieten habe.

§. 3.

Am meisten treten in diesem Aufsatze die bekannten Eckenfunctionen hervor, die hier mit P und Π bezeichnet werden und deren mannigfaltige Zusammensetzung sowohl aus den Seiten resp. Winkeln der Ecke als aus je zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel resp. je zwei Winkeln und der dazwischenliegenden Seite als bekannt vorausgesetzt wird; nämlich:

$$P = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)} \qquad (1^a)$$

$$= \sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} \qquad (2^a)$$

$$= \sqrt{\sin e\sin(a+e)\sin(b+e)\sin(c+e)} \qquad (3^a)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin a\sin b\sin\gamma = \tfrac{1}{2}\sin a\sin c\sin\beta = \tfrac{1}{2}\sin b\sin c\sin\alpha \qquad (4^a)$$

$$= \tfrac{1}{2}M^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad (5^a)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin(u\Delta_1)\sin a = \tfrac{1}{2}\sin(p\Delta_2)\sin b = \tfrac{1}{2}\sin(q\Delta_3)\sin c; \qquad (6^a)$$

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)} \qquad (1^b)$$

$$= \sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)} \qquad (2^b)$$

$$= \sqrt{\sin\varepsilon\sin(\alpha-\varepsilon)\sin(\beta-\varepsilon)\sin(\gamma-\varepsilon)} \qquad (3^b)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\beta\sin c = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\sin\gamma\sin b = \sin\beta\sin\gamma\sin a \qquad (4^b)$$

$$= \tfrac{1}{2}M\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \qquad (5^b)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin(u\Delta_1)\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\sin(p\Delta_2)\sin\beta = \tfrac{1}{2}\sin(q\Delta_3)\sin\gamma. \qquad (6^b)$$

Anmerkung 1. Die Ausdrücke (6) ergeben, dass P constant ist für alle sphärischen Dreiecke auf einerlei Seite a, deren Gipfelpunkte in einem dieser Seite parallelen kleinen Kugelkreise liegen; und dass Π constant ist für alle sphärischen Dreiecke von einerlei Gipfelpunkt und Gipfelwinkel α, deren Gegenseiten a auf demselben grössten Kreise liegen.

Anmerkung 2. Ist im sphärischen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (Taf. IV. Fig. 2.) f ein beliebiger Bogen grössten Kreises, der die Seite a unter dem Winkel φ trifft, so ist

$$2P = \sin f\sin\varphi\sin a, \quad 2\Pi = \sin f\sin\varphi\sin\alpha. \qquad (7)$$

Anmerkung 3. Bekanntlich ist

$$3\mathfrak{C} = \Delta_1 h_1 = \tfrac{1}{2} pq \sin a . u \sin b \sin \gamma = upqP. \qquad (8)$$

Ist also $\alpha\beta\gamma$ (Taf. IV. Fig. 2.) ein sphärisches Dreieck auf der Kugelfläche vom Radius R, so ist $\frac{1}{3}R^3P$ der Inhalt der Pyramide, welche das durch $\alpha\beta\gamma$ gelegte ebene Dreieck zur Grundfläche und den Kugelmittelpunkt zum Gipfel hat. Da nun $\frac{1}{3}R^3$ der Inhalt der entsprechenden Pyramide für das gleichseitige rechtwinklige Dreieck ist, so ist P der Exponent des Verhältnisses dieser beiden Pyramiden und der Ausdruck des Inhaltes der ersteren, wenn die letztere zum körperlichen Raummaass gewählt wird.

Anmerkung 4. Verlängert man an einer Ecke die eine Kante über den Eckpunkt hinaus oder: verlängert man zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks über die dritte Seite hinaus bis zu ihrem Durchschnitt, so wird dadurch ein Nebendreieck bestimmt, welches mit dem vorigen einerlei P und Π hat. (Ueber die Relationen zweier Nebendreiecke ist Mehreres zu finden in dem erwähnten Luckauer Programme von 1848.)

Anmerkung 5. Bedeuten P_1 und Π_1 die entsprechenden Functionen für das Polardreieck, so ist

$$P = \Pi_1, \quad \Pi = P_1, \qquad (9)$$

was sich leicht aus §. 3. und noch leichter aus §. 4. (4) erkennen lässt.

Anmerkung 6. Wir werden (aus einem später erhellenden Grunde) die Function Π mit dem Worte „Eckensinus“ und P als „polaren Eckensinus“ bezeichnen.

§. 5.

Aus (5) geht leicht hervor:

$$\frac{P}{\Pi} = M \quad \text{oder} \quad P = M\Pi, \qquad (10)$$

wonach aus (4) und (5) leicht hervorgeht:

$$\sin a \sin b \sin c = \frac{2P^2}{\Pi} = 2MP, \qquad (11)$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2\Pi^2}{P} = \frac{2\Pi}{M}. \qquad (12)$$

Anmerkung. Beispielsweise eine Anwendung des Modulus M: In vielen Büchern (z. B. Meier Hirsch Sammlung geometrischer Aufgaben II. p. 124., Bretschneider Lehr-

gebäude etc. p. 438.) findet man für den Radius der einem Tetraeder umschriebenen Kugel den Ausdruck entwickelt:

$$4R^2.4P^2 = u^2\sin^2 a + p^2\sin^2 b + q^2\sin^2 c - 2pq(\cos a - \cos b\cos c)$$
$$-2uq(\cos b - \cos a\cos c) - 2up(\cos c - \cos a\cos b).$$

Da nun

$$\cos a - \cos b\cos c = \sin b\sin c\cos\alpha$$

ist u. s. w., so findet man, wenn man dies einsetzt und die ganze Gleichung durch M^2 dividirt, nach §. 2. und §. 5.:

$$4R^2.4\Pi^2 = u^2\sin^2\alpha + p^2\sin^2\beta + q^2\sin^2\gamma - 2pq\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$$
$$-2uq\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta - 2up\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,$$

was man, wie es scheint, noch nicht bemerkt hat.

§. 6.

Aus $l = 2\varrho\sin a_1 = 2\varrho_1\sin a$ folgt:

$$2\varrho M_1\sin\alpha = 2\varrho_1 M\sin\alpha$$

oder

$$\frac{2\varrho}{M} = \frac{2\varrho_1}{M_1}\ ^{*}).$$

Am Tetraeder verhalten sich die Moduli zweier Dreiseite wie die Moduli der gegenüberliegenden Ecken.

Der Quotient

$$\frac{2\varrho}{M} = \frac{2\varrho_1}{M_1} = \frac{2\varrho_2}{M_2} = \frac{2\varrho_3}{M_3} = \mu \qquad (13)$$

ist also als ein Modulus des Tetraeders zu betrachten. — Wir werden sehen, dass am Tetraeder mehrere solche constante Quotienten vorkommen, die gleichen Anspruch auf den Namen Modulus haben.

---

*) Es sei hier ein für allemal bemerkt, dass die den festgesetzten Zeichen unten rechts angehängten Indices, wie P_1, Π_2, M_3, immer etwas den Ecken A, B, C Angehöriges oder ihnen Gegenüberliegendes bezeichnen, während die Buchstaben ohne Index der Ecke O oder dem ganzen Tetraeder angehören.

§. 7.

Es ist

$$\mu = \frac{2\varrho}{M} = \frac{l}{\sin a_1} : \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{l \sin \alpha}{\sin a \sin a_1}$$

oder, wenn man $M \sin \alpha$ statt $\sin a$, $M_1 \sin \alpha$ statt $\sin a_1$ setzt:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu M M_1 \sin \alpha = l, & \mu M_2 M_3 \sin \alpha' = u, \\ \mu M M_2 \sin \beta = m, & \mu M_1 M_3 \sin \beta' = p, \\ \mu M M_3 \sin \gamma = n, & \mu M_1 M_2 \sin \gamma' = q, \\ \hline \mu^3 M^3 M_1 M_2 M_3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = lmn. & \end{array}\right\} \quad (14)$$

Da nun bekanntlich $lmn = 4\varrho\Delta$, so findet man unter Anwendung von (5) und (13) leicht:

$$4\varrho\varrho_1 M_2 M_3 = \frac{\Delta}{\Pi}. \quad (15)$$

Da nun nach (13) das Product links unverändert bleibt, wenn man die vier Indices 0, 1, 2, 3 beliebig permutirt, so ist auch

$$\frac{\Delta}{\Pi} = \frac{\Delta_1}{\Pi_1} = \frac{\Delta_2}{\Pi_2} = \frac{\Delta_3}{\Pi_3} = \mathfrak{M} \quad (16)$$

ein Modulus des Tetraeders, und zwar derjenige, welcher dem Modulus 2ϱ des ebenen Dreiecks am meisten entspricht und die Benennung „Eckensinus" für Π rechtfertigt.

Aus (13) und §. 3. ergeben sich noch leicht die Ausdrücke:

$$\mathfrak{M} = \frac{16\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\mu^2} = \mu^2 M M_1 M_2 M_3. \quad (17)\ (18)$$

§. 8.

Da $\Delta h = \Delta_1 h_1 = 3\mathfrak{T}$, so ist auch nach (16), wenn man durch $\mathfrak{M}$ dividirt:

$$\Pi h = \Pi_1 h_1 = \Pi_2 h_2 = \Pi_3 h_3. \quad (19)$$

Ferner ist:

$$h = u \sin(u\Delta) = u \sin b_1 \sin \gamma'$$

$$= u M_1 \sin \beta' \sin \gamma' = (\text{nach } (14))\ \mu M_1 M_2 M_3 \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma' \quad (20)$$

und weil nach (18)

$$\mu M_1 M_2 M_3 = \frac{\mathfrak{M}}{\mu M} = \frac{\mathfrak{M}}{2\varrho},$$

so ist

$$2\varrho h = \mathfrak{M} \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma', \text{ also auch} \qquad (21)$$

$$2\varrho_1 h_1 = \mathfrak{M} \sin\alpha' \sin\beta \sin\gamma,$$

$$2\varrho_2 h_2 = \mathfrak{M} \sin\alpha \sin\beta' \sin\gamma,$$

$$2\varrho_3 h_3 = \mathfrak{M} \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma'.$$

Multiplicirt man die drei letzten Gleichungen und dividirt durch die erste, setzt links aus (17) $8\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = \frac{\mu^2\mathfrak{M}}{2\varrho}$, rechts aus (12) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{2\Pi}{M}$, hebt auf, und setzt wieder links $\mu^2 M^2 = 4\varrho^2$, so erhält man:

$$h_1 h_2 h_3 = \mathfrak{M}h \,.\, 4\Pi^2 = 4\Delta h\Pi = 12\Pi\mathfrak{T}, \qquad (21^a)$$

also

$$hh_1 h_2 h_3 = 3\mathfrak{T} \,.\, 4\Pi h = 3\mathfrak{T} \,.\, 4\Pi_1 h_1 \text{ u. s. w.} \qquad (22)$$

§. 9.

$$h = u\sin(u\Delta) = p\sin(p\Delta) = q\sin(q\Delta)$$

$$= \frac{2\Pi_1 u}{\sin\alpha} = \frac{2\Pi_2 p}{\sin\beta} = \frac{2\Pi_3 q}{\sin\gamma} \text{ (nach (6))}; \qquad (23)$$

also

$$h^3 = \frac{8\Pi_1\Pi_2\Pi_3 upq}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \text{(nach (12))} \frac{8\Pi_1\Pi_2\Pi_3 upqP}{2\Pi^2},$$

$$h^2 = \frac{4\Pi_1\Pi_2\Pi_3}{\Pi^2} \cdot \frac{3\mathfrak{T}}{h} = \frac{4\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Delta}{\Pi^2};$$

also ist die constante Grösse $\Pi h = \Pi_1 h_1$ u. s. w.

$$= 2\sqrt{\Delta\Pi_1\Pi_2\Pi_3} = 2\sqrt{\Pi\Delta_1\Pi_2\Pi_3} = 2\sqrt{\Pi\Pi_1\Delta_2\Pi_3}$$

$$= 2\sqrt{\Pi\Pi_1\Pi_2\Delta_3} = 2w. \qquad (24)$$

Diesen Ausdruck, welcher in den Formeln häufig erscheint, bezeichnen wir mit $2w$.

Demnach ist also:

$$h = \frac{2w}{\Pi}, \quad h_1 = \frac{2w}{\Pi_1}, \quad h_2 = \frac{2w}{\Pi_2}, \quad h_3 = \frac{2w}{\Pi_3}. \tag{25}$$

Da nun

$$2\Pi_1 = \sin a_1 \sin\beta' \sin\gamma',$$
$$2\Pi_2 = \sin b_2 \sin\alpha' \sin\gamma',$$
$$2\Pi_3 = \sin c_3 \sin\alpha' \sin\beta',$$
$$\varDelta = 2\varrho^2 \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3;$$

so erhält man durch einfache Multiplication:

$$2w = 2\sqrt{\varDelta\Pi_1\Pi_2\Pi_3} = \varrho \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3 \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma'. \tag{26}$$

§. 10.

$$h = u\sin(u\varDelta) = p\sin(p\varDelta) = q\sin(q\varDelta)$$
$$= \frac{2P_1u}{\sin a_1} = \frac{2P_2p}{\sin b_2} = \frac{2P_3q}{\sin c_3}, \tag{27}$$

also

$$h^3 = \frac{8P_1P_2P_3upq}{\sin a_1 \sin b_2 \sin c_3},$$

und, da bekanntlich

$$\sin a_1 \sin b_2 \sin c_3 = \frac{\varDelta}{2\varrho^2}$$

ist,

$$h^3 = \frac{16\varrho^2 P_1P_2P_3upq}{\varDelta} = \frac{16\varrho^2 P_1P_2P_3}{P} \cdot \frac{3\mathfrak{C}}{\varDelta}$$
$$= \frac{16\varrho^2 P_1P_2P_3h}{P},$$

also

$$h = 4\varrho\sqrt{\frac{P_1P_2P_3}{P}}, \quad \frac{Ph}{2\varrho} = 2\sqrt{PP_1P_2P_3}. \tag{28) (29}$$

Aus der Symmetrie des Ausdrucks $2\sqrt{PP_1P_2P_3}$, welchen wir mit $2W$ bezeichnen, geht hervor, dass

$$\frac{Ph}{2\varrho} = \frac{P_1 h_1}{2\varrho_1} = \frac{P_2 h_2}{2\varrho_2} = \frac{P_3 h_3}{2\varrho_3} = 2W. \tag{30}$$

§. 11.

Noch ein Ausdruck für h ist bemerkenswerth. Zieht man vom Fusspunkte von h in Δ drei Normalen auf l, m, n, so sind diese $h\operatorname{ctg}\alpha'$, $h\operatorname{ctg}\beta'$, $h\operatorname{ctg}\gamma'$. Zieht man von demselben Punkte Gerade nach den Punkten A, B, C, so findet man aus den drei Theildreiecken, in welche Δ dadurch zerlegt wird,

$$2\Delta = lh\operatorname{ctg}\alpha' + mh\operatorname{ctg}\beta' + nh\operatorname{ctg}\gamma',$$

also

$$h = \frac{2\Delta}{l\operatorname{ctg}\alpha' + m\operatorname{ctg}\beta' + n\operatorname{ctg}\gamma'}. \tag{31}$$

§. 12.

Ausdrücke für $\mathfrak{T}$ ergeben sich nun leicht aus denen für h, welche man nur mit $\frac{1}{3}\Delta$ zu multipliciren hat. Bemerkenswerth sind folgende:

Aus $\Delta = \mathfrak{M}\Pi$ folgt

$$\Delta h \text{ oder } 3\mathfrak{T} = \mathfrak{M}\Pi h = (\text{nach } (24))\ 2\mathfrak{M}w. \tag{32}$$

Dieser Ausdruck giebt ferner:

(33)

$$3\mathfrak{T} = 2\frac{\Delta}{\Pi}\sqrt{\Delta_1 \Pi \Pi_2 \Pi_3} = 2\sqrt{\frac{\Delta^2 \Delta_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi}{\Pi^2}} = \sqrt{\frac{\Delta\Delta_1 \Pi\Delta_2 \Pi_3 \Pi}{\Pi^2}}$$

$$= \sqrt{\Delta\Delta_1 \Delta_2 \Pi_3} = \sqrt{\Delta\Delta_1 \Pi_2 \Delta_3} = \sqrt{\Delta \Pi_1 \Delta_2 \Delta_3} = \sqrt{\Pi \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}.$$

Ferner: Da $h = \dfrac{2\Pi_1 u}{\sin\alpha}$, so ist:

$$\Delta h = 3\mathfrak{T} = \frac{2\Delta\Pi_1 u}{\sin\alpha} \text{ und ebenso } \frac{2\Delta_3 \Pi_1 p}{\sin\beta} \text{ u. s. w.} \tag{34}$$

Da nun $(3\mathfrak{T})^2 = 4\Delta\Pi_1\Delta_2\Delta_3$, so ergiebt die Division durch (34):

$$3\mathfrak{T} = \frac{2\Delta_2\Delta_3 \sin\alpha}{u} = \frac{2\Delta\Delta_1 \sin\alpha'}{l} \text{ u. s. w.} \tag{25}$$

§. 13.

Aus $h = \frac{2w}{\Pi} = \frac{2\Pi_1 u}{\sin\alpha}$ ((25) und (23)) folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{u}{\sin\alpha} = \frac{w}{\Pi\Pi_1} = \frac{\Pi_2\Delta_3}{w}, & \frac{l}{\sin\alpha'} = \frac{w}{\Pi_2\Pi_3} = \frac{\Pi\Delta_1}{w}, \\ \frac{p}{\sin\beta} = \frac{w}{\Pi\Pi_2} = \frac{\Pi_1\Delta_3}{w}, & \frac{m}{\sin\beta'} = \frac{w}{\Pi_1\Pi_3} = \frac{\Pi\Delta_2}{w}, \\ \frac{q}{\sin\gamma} = \frac{w}{\Pi\Pi_3} = \frac{\Pi_1\Delta_2}{w}, & \frac{n}{\sin\gamma'} = \frac{w}{\Pi_1\Pi_2} = \frac{\Pi\Delta_3}{w}. \end{array}\right\} \quad (36)$$

Daraus wieder:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\Pi\Pi_1 u}{\Pi_2\Pi_3 l}, \text{ dagegen} & \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\Pi_1 u}{\Pi_2 p}, \\ \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{\Pi\Pi_2 p}{\Pi_1\Pi_3 m}, & \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} = \frac{\Pi u}{\Pi_3 m}, \\ \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} = \frac{\Pi\Pi_3 q}{\Pi_1\Pi_2 n}, & \text{u. s. w.}; \end{array}\right\} \quad (37)\ (38)$$

und ferner:

$$\frac{u}{\sin\alpha} \cdot \frac{l}{\sin\alpha'} = \frac{w}{\Pi\Pi_1} \cdot \frac{\Pi\Delta_1}{w} = \frac{\Delta_1}{\Pi_1} = \mathfrak{M},$$

also:

$$\left.\begin{array}{l} ul = \mathfrak{M}\sin\alpha\sin\alpha', \\ pm = \mathfrak{M}\sin\beta\sin\beta', \\ qn = \mathfrak{M}\sin\gamma\sin\gamma'. \end{array}\right\} \quad (39)$$

§. 14.

Nach (4^b) ist:

$$\sin\beta\sin\gamma = \frac{2\Pi}{\sin a}, \quad \sin\beta\sin\gamma' = \frac{2\Pi_2}{\sin a_2},$$

$$\sin\beta'\sin\gamma' = \frac{2\Pi_1}{\sin a_1}, \quad \sin\beta'\sin\gamma = \frac{2\Pi_3}{\sin a_3};$$

also



$$\frac{\Pi\Pi_1}{\sin a \sin a_1} = \frac{\Pi_2\Pi_3}{\sin a_2 \sin a_3} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin a \sin a_1}{\sin a_2 \sin a_3} = \frac{\Pi\Pi_1}{\Pi_2\Pi_3}.$$

Ferner ist

$$P\sin\alpha = \Pi\sin a \quad \text{nach (10)},$$

$$P_1\sin\alpha = \Pi_1\sin a_1;$$

also

$$PP_1\sin^2\alpha = \Pi\Pi_1\sin a \sin a_1,$$

folglich auch

$$P_2P_3\sin^2\alpha' = \Pi_2\Pi_3\sin a_2 \sin a_3,$$

und hieraus:

$$\frac{PP_1}{P_2P_3}\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha'} = \frac{\Pi\Pi_1}{\Pi_2\Pi_3}\cdot\frac{\sin a \sin a_1}{\sin a_2 \sin a_3} = \frac{\Pi^2\Pi^2_1}{\Pi^2_2\Pi^2_3}$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\sqrt{\frac{PP_1}{P_2P_3}} = \frac{\Pi\Pi_1}{\Pi_2\Pi_3}, \tag{40}$$

also auch nach (35):

$$\left.\begin{aligned} PP_1u^2 &= P_2P_3l^2, \\ PP_2p^2 &= P_1P_3m^2, \\ PP_3q^2 &= P_1P_2n^2. \end{aligned}\right\} \tag{40a}$$

Die in §. 13. und §. 14. ausgesprochenen Gleichungen lassen sich oft zur Umwandlung von Formeln verwenden.

§. 15.

Ehe wir zu einem zweiten Abschnitte übergehen, wird es gut sein, den im Fortschritt der Untersuchung erweiterten Begriff eines Tetraeder-Modulus zu recapituliren. Als solcher lässt sich im Grunde jeder Quotient betrachten, der aus Bestimmungsstücken von einerlei Index zusammengesetzt ist, und seinen Werth nicht ändert, wenn man jedem dieser Bestimmungsstücke einen und denselben anderen Index beisetzt; oder, um das Hauptmerkmal nicht als ein nur äusserliches erscheinen zu lassen: jeder Quotient, der aus irgend welchen zusammengehörigen Bestimmungsgrössen des Tetraeders so zusammengesetzt ist, dass er seinen Werth nicht

ändert, wenn man jene Bestimmungsstücke durch je gleichartige ebenso zusammengehörige ersetzt.

Ein Beispiel der Anwendung solcher Moduln giebt die Anmerkung zu §. 5.: Enthält nämlich in irgend einer Gleichung jedes einzelne Glied den Nenner (Zähler) eines Modulus aus verschiedenen Gruppen (mit verschiedenem Index) ein- oder mehrmal als Factor, so kann man durch Multiplication (Division) mit dem Modulus oder einer Potenz desselben den Zähler (Nenner) mit je gleichem Index an dessen Stelle setzen.

Es ist nun klar, dass, wenn Ausdrücke, die in der erwähnten Weise zusammengesetzt sind, nicht in Form von Quotienten, sondern in der von Producten erscheinen, auch diese in ähnlicher Weise anzuwenden sind, indem dann der reciproke Werth des einen Factors den Nenner vertritt, während der andere Factor als Zähler fungirt; weshalb auch die Einschränkung auf die Quotientform aus dem Begriff des Tetraeder-Modulus fallen zu lassen ist. Auch sieht man leicht, dass die angeführte Anwendung nicht die einzige ist, welche die Moduln für die Umformung von Gleichungen und Ausdrücken wichtig macht. Es mögen daher die bis jetzt hervorgetretenen Moduln hier nochmals übersichtlich aufgeführt werden:

$$1)\qquad 2\varrho = \frac{l}{\sin a_1},$$

$$2)\qquad M = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{P}{\Pi},$$

$$3)\qquad \mu = \frac{2\varrho}{M} = \frac{u}{M_2 M_3 \sin \alpha'},$$

$$4)\qquad \mathfrak{M} = \frac{\Delta}{\Pi} = 4\varrho\varrho_1 M_2 M_3 = \frac{16\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}{\mu^2} = \mu^2 M M_1 M_2 M_3$$

$$= \frac{hh_1h_2h_3}{16w^2} = \frac{l \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \alpha'} = \frac{3\mathfrak{T}}{2w} = \frac{4\Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{(3\mathfrak{T})^2},$$

$$5)\qquad 2w = 2\sqrt{\Delta\Pi_1\Pi_2\Pi_3} = \Pi h = \frac{3\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}}$$

$$= \varrho \sin a_1 \sin b_2 \sin c_3 \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma',$$

$$6)\qquad 2W = 2\sqrt{PP_1P_2P_3} = \frac{Ph}{2\varrho},$$

$$7) \quad 3\mathfrak{C} = \Delta h = Pupq = \frac{2\Delta_2\Delta_3 \sin\alpha}{u}$$

$$= 2\mathfrak{M}w = 2\sqrt{\Pi\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = \frac{h_1h_2h_3}{\Pi}$$

$$= 4\varrho\Delta\sqrt{\frac{P_1P_2P_3}{P}} = 2\sqrt{\frac{\Delta\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{\mathfrak{M}}}.$$

§. 16.

Sei $\alpha\beta\gamma$ (Taf. IV. Fig. 3.) ein sphärisches Dreieck, dessen Winkel α, β, γ, die Seiten a, b, c. N sei ein beliebiger Punkt im Dreieck, von dem aus die Bogen d, e, f nach den Punkten α, β, γ, gezogen sind. Die Bezeichnung der dadurch bestimmten Winkel ist aus der Figur klar. Es handelt sich darum, eine Gleichung zwischen P und den P-Functionen der Theildreiecke P', P'', P''' zu finden.

Auflösung:

$$2P = \sin b \sin c \sin\alpha$$

$$= M'' \sin\beta'' M''' \sin\gamma''' \sin(\alpha'' + \alpha''') \;{}^{*})$$

$$= \frac{\sin f}{\sin\alpha''}\sin\beta''\frac{\sin e}{\sin\alpha'''}\sin\gamma'''\sin(\alpha''+\alpha''')$$

$$= \sin e \sin f \sin\beta'' \sin\gamma'''(\operatorname{ctg}\alpha'' + \operatorname{ctg}\alpha''').$$

Nun ist aber

$$\operatorname{ctg}\alpha''\sin\beta'' = -\cos\beta''\cos d + \sin d \operatorname{ctg} f,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha'''\sin\gamma''' = -\cos\gamma'''\cos d + \sin d \operatorname{ctg} e;$$

also

$$\operatorname{ctg}\alpha'' + \operatorname{ctg}\alpha''' = \frac{-\sin(\beta''+\gamma''')\cos d + (\sin\gamma'''\operatorname{ctg} f + \sin\beta''\operatorname{ctg} e)\sin d}{\sin\beta''\sin\gamma'''}$$

und folglich

$$2P = \sin e \sin f \sin\alpha'\cos d + \sin d \sin e \sin\gamma'''\cos f + \sin d \sin f \sin\beta''\cos e,$$

oder

---

*) Die accentuirten Buchstaben M', M'', M''' beziehen sich auf die Theildreiecke $N\beta\gamma$, $N\alpha\gamma$, $N\alpha\beta$.

$$P = P' \cos d + P'' \cos e + P''' \cos f. \qquad (41)$$

Dieser eben so einfache als folgenreiche Satz ist, so viel ich weiss, bisher noch nicht bemerkt worden. Er bildet die Grundlage zu allem Folgenden.

§. 17.

Bedeuten η', η'', η''' die drei von N auf die Seiten gefällten Höhenbogen, so kann man die Gleichung nach (6) auch so ausdrücken:

$$2P = \sin\eta' \sin a \cos d + \sin\eta'' \sin b \cos e + \sin\eta''' \sin c \cos f, \qquad (42)$$

$$2\Pi = \sin\eta' \sin\alpha \cos d + \sin\eta'' \sin\beta \cos e + \sin\eta''' \sin\gamma \cos f. \qquad (43)$$

Es ist $\sin a = M \sin\alpha = M_1 \sin\alpha'$ u s. w., also

$$M = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} M' = \frac{\sin\beta''}{\sin\beta} M'' = \frac{\sin\gamma'''}{\sin\gamma} M'''. \qquad (44)$$

Dividirt man daher (41) durch M, so kommt:

$$\Pi = \frac{\Pi' \sin\alpha' \cos d}{\sin\alpha} + \frac{\Pi'' \sin\beta'' \cos e}{\sin\beta} + \frac{\Pi''' \sin\gamma''' \cos f}{\sin\gamma}. \qquad (45)$$

Noch eine andere Relation ist bemerkenswerth, die sich so ableiten lässt:

$$2P = \sin b \sin c \sin\alpha,$$

$$4P''P''' = \sin b \sin d \sin\alpha'' \sin c \sin d \sin\alpha''';$$

also

$$\frac{2P}{4P''P'''} = \frac{\sin(\alpha'' + \alpha''')}{\sin^2 d \sin\alpha'' \sin\alpha'''} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha'' + \operatorname{ctg}\alpha'''}{\sin^2 d}. \qquad (46)$$

Setzt man nun wieder den oben schon entwickelten Werth von $\operatorname{ctg}\alpha'' + \operatorname{ctg}\alpha'''$ ein, so wird

$$\frac{2P}{4P''P'''} = \frac{\operatorname{ctg} d \sin\alpha' + \operatorname{ctg} e \sin\beta'' + \operatorname{ctg} f \sin\gamma'''}{\sin d \sin\beta'' \sin\gamma'''}.$$

Dividirt man diese Gleichung noch durch $2P' = \sin e \sin f \sin\alpha'$, multiplicirt dann rechts Zähler und Nenner mit $\sin d \sin e \sin f$, so erhält man ebenfalls die Gleichung (41).

§. 18.

Wenn man nun in diese Formeln (41)—(47) $d=e=f$ setzt und dabei berücksichtigt, dass dadurch $\alpha''=\sigma-\beta$, $\alpha'''=\sigma-\gamma$ wird, so erhält man die Bedingung für den dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ umschriebenen kleinen Kugelkreis. — Setzt man dagegen in dieselben Gleichungen $\eta'=\eta''=\eta'''$ und berücksichtigt, dass dadurch die Seite a durch η' in $s-c$ und $s-b$ getheilt wird u. s. w., dass $\alpha''=\alpha'''=\frac{1}{2}\alpha$ u. s. w., so erhält man die Bedingungen für den eingeschriebenen Kreis. Wir versparen jedoch alle ins Einzelne gehende Untersuchungen für spätere Aufsätze, um zunächst diejenigen Lehrsätze mitzutheilen, welche für dieselben als Ausgangspunkte dienen werden. — Ueber den einem sphärischen Dreiecke umschriebenen und eingeschriebenen Kreis enthält übrigens das Luckauer Programm von 1848 einiges Material.

§. 19.

Der Satz (41) führt sehr einfach auf einen anderen über die gegenseitigen Beziehungen von vier Ecken um einen Punkt, d. h. von vier Ecken, die durch vier von einem Punkte ausgehende Strahlen bestimmt werden, wie in Taf. IV. Fig. 1. von KO, KA, KB, KC.

Den Uebergang bildet folgende Betrachtung: Verlängert man den Strahl OK über K hinaus und legt durch die Verlängerung und die drei Strahlen KA, KB, KC, die mit ihr die Winkel 180^0-v, $180^0-\pi$, $180^0-\varkappa$ bilden, drei Ebenen, so wird dadurch die Ecke $KABC$ in drei Theilecken zerlegt, deren jede eine Nebenecke zu einer der drei anderen Ecken um K ist und also nach §. 4. Anmerkung 4. mit derselben sowohl einerlei P als einerlei Π hat. Bezeichnen wir nun für die in Taf. IV. Fig. 1. gegen $\Delta\ \Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3$ geöffneten Ecken um K die polaren Eckensinus der Reihe nach mit $\mathbf{P}\ \mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3$ (die Eckensinus mit $\mathbf{Q}\ \mathbf{Q}_1\ \mathbf{Q}_2\ \mathbf{Q}_3$), so ergiebt sich nach (41) für die vier Ecken um K sofort:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{P}+\mathbf{P}_1\cos v+\mathbf{P}_2\cos\pi+\mathbf{P}_3\cos\varkappa&=0,\\
\mathbf{P}\cos v+\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\cos\nu+\mathbf{P}_3\cos\mu&=0,\\
\mathbf{P}\cos\pi+\mathbf{P}_1\cos\nu+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3\cos\lambda&=0,\\
\mathbf{P}\cos\varkappa+\mathbf{P}_1\cos\mu+\mathbf{P}_2\cos\lambda+\mathbf{P}_3&=0.
\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

(Die drei letzten dieser Gleichungen sind nach dem Muster der ersten gebildet.)

§. 20.

Von Bedeutung ist die Zusammenstellung der so eben gefundenen Gleichungen mit folgenden zwar schon lange bekannten, aber noch nicht von diesem Gesichtspunkte aus betrachteten:

Die einfache Betrachtung der Projectionen der Dreiecke Δ_1, Δ_2, Δ_3 auf Δ ergiebt die Gleichung:

$$\Delta = \Delta_1 \cos\alpha' + \Delta_2 \cos\beta' + \Delta_3 \cos\gamma',$$

welche, durch $\mathfrak{M} = \frac{\Delta}{\Pi}$ dividirt, wird:

$$\left.\begin{array}{l} -\Pi + \Pi_1 \cos\alpha' + \Pi_2 \cos\beta' + \Pi_3 \cos\gamma' = 0, \\ \Pi \cos\alpha' - \Pi_1 + \Pi_2 \cos\gamma + \Pi_3 \cos\beta = 0, \\ \Pi \cos\beta' + \Pi_1 \cos\gamma - \Pi_2 + \Pi_3 \cos\alpha = 0, \\ \Pi \cos\gamma' + \Pi_1 \cos\beta + \Pi_2 \cos\alpha - \Pi_3 = 0; \end{array}\right\} \quad (49)$$

von welchen Gleichungen wieder die drei letzten der ersten nachgebildet sind.

§. 21.

Diese beiden Gruppen von Gleichungen, deren eine die Beziehungen zwischen j e d e n vier Ecken um einen Punkt, die andere die Beziehungen zwischen j e d e n vier Tetraederecken ausspricht, zeigen bei einem vergleichenden Blicke: dass vier Ecken um einen Punkt unter einander dieselben Relationen haben, wie die Polarecken von vier Tetraederecken.

Dass diese Analogie keine zufällige ist, lässt sich durch folgende Betrachtung nachweisen:

Errichtet man auf den Endpunkten der vier Geraden r, r_1, r_2, r_3, die von K ausgehen, normale Ebenen, so schliessen diese ein Tetraeder ein, dessen Ecken offenbar die Polarecken zu den vier Ecken um K sind, und zwar in der Weise, dass die Flächenwinkel der Tetraederecken von den Seiten der vier Ecken um einen Punkt zu 180° ergänzt werden. Da diese Construction jedesmal möglich ist, so müssen sich alle auf die vier Ecken eines Tetraeders bezüglichen Sätze durch Vertauschung von Π mit $\mathfrak{P}$, von P mit $\mathfrak{Q}$, von α', β', γ' mit $180^\circ - v$, $180^\circ - \pi$, $180^\circ - \varkappa$, von α, β, γ mit $18^\circ - \lambda$, $180^\circ - \mu$, $180^\circ - \nu$ auf die vier Ecken um einen Punkt übertragen lassen, und umgekehrt.

§. 22.

Bestimmt man nun auf den vier von K ausgehenden Strahlen vier Längen r, r_1, r_2, r_3, verbindet ihre Endpunkte O, A, B, C durch ebene (Tetraeder-) Dreiecke, und bezeichnet die vier bei K zusammenstossenden Theiltetraeder mit τ, τ_1, τ_2, τ_3, so ist nach (8):

$$\left.\begin{aligned} 3\tau &= \mathbf{P} r_1 r_2 r_3 , \\ 3\tau_1 &= \mathbf{P}_1 r r_2 r_3 , \\ 3\tau_2 &= \mathbf{P}_2 r r_1 r_3 , \\ 3\tau_3 &= \mathbf{P}_3 r r_1 r_2 : \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

also

$$\frac{3r\tau}{\mathbf{P}} = \frac{3r_1\tau_1}{\mathbf{P}_1} = \frac{3r_2\tau_2}{\mathbf{P}_2} = \frac{3r_3\tau_3}{\mathbf{P}_3} = r r_1 r_2 r_3 = R , \quad (51)$$

welche Grösse wieder ein Modulus des Tetraeders ist und mit R bezeichnet werden soll.

Multiplicirt man damit die Gleichung (48), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{c} r\tau + r_1\tau_1 \cos\upsilon + r_2\tau_2 \cos\pi + r_3\tau_3 \cos\varkappa = 0 , \\ \text{nebst den drei anderen.} \end{array}\right\} \quad (52)$$

§. 23.

Das System dieser vier Gleichungen (52) gestattet mit Leichtigkeit viele besondere Bedingungen einzuführen, je nachdem man über die Lage des Punktes K bestimmt.

Für den Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel z. B. braucht man nur die τ durch $\varDelta d$ zu ersetzen und dann $d = d_1 = d_2 = d_3$ zu setzen. Für den Schwerpunkt hat man $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, und die r, r_1, r_2, r_3 sind $\frac{3}{4}$ der Schwerlinien. Am fruchtbarsten für die Betrachtung des Tetraeders überhaupt scheint die Bestimmung zu sein, dass K Mittelpunkt der umschriebenen Kugel, also $r = r_1 = r_2 = r_3$ gemacht wird, und es wird (für die Fortsetzungen dieses Aufsatzes) gut sein, für diesen Fall den τ, τ_1, τ_2, τ_3, welche dann Pyramiden im engeren Sinne werden, besondere Bezeichnungen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ zu geben. Es wird dann aus (50), (51), (52):

$$3\mathfrak{p} = \mathbf{P} r^3 , \quad 3\mathfrak{p}_1 = \mathbf{P}_1 r^3 , \quad 3\mathfrak{p}_2 = \mathbf{P}_2 r^3 , \quad 3\mathfrak{p}_3 = \mathbf{P}_3 r^3 ; \quad (53)$$

$$\frac{3\mathfrak{p}}{\mathbf{P}}=\frac{3\mathfrak{p}_1}{\mathbf{P}_1}=\frac{3\mathfrak{p}_2}{\mathbf{P}_2}=\frac{3\mathfrak{p}_3}{\mathbf{P}_3}=\mathfrak{r}^3, \tag{54}$$

$$\mathfrak{p}+\mathfrak{p}_1\cos v+\mathfrak{p}_2\cos\pi+\mathfrak{p}_3\cos\varkappa=0, \tag{55}$$

nebst den drei anderen.

§. 24.

Der in §. 22. (51) aufgestellte Tetraeder-Modulus $rr_1r_2r_3$ ist unter die Moduln im eigentlichen Sinne so lange nicht zu rechnen, als über die Lage des Punktes K keine Bestimmung getroffen ist, weil er für ein gegebenes Tetraeder bis dahin keinen bestimmten Werth hat. Dagegen entspricht der Modulus $\frac{1}{3}\mathfrak{r}^3=\frac{\mathfrak{p}}{\mathbf{P}}$ (54) durchaus dem Modulus $\mathfrak{M}=\frac{\varDelta}{\Pi}$. Wie nämlich durch Multiplication mit $\frac{1}{3}\mathfrak{r}^3$ aus den Grundgleichungen (48) die Gleichungen (55) hervorgehen, so entspringen aus den Grundgleichungen *) (49) durch Multiplication mit $\mathfrak{M}$ diese:

$$\left.\begin{array}{c}-\varDelta+\varDelta_1\cos\alpha'+\varDelta_2\cos\beta'+\varDelta_3\cos\gamma'=0,\\ \text{nebst den drei anderen.}\end{array}\right\} \tag{56}$$

Diese Gleichungen (56) scheinen bisher vorzugsweise die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen zu haben. So hat z. B. Herr Professor **Bretschneider** in der ersten Abhandlung des ersten Theils dieses Archivs aus ihnen und den folgenden

$$t+t_1\cos v+t_2\cos\pi+t_3\cos\varkappa=0,$$

nebst den drei anderen,

worin t, t_1, t_2, t_3 die von O, A, B, C aus gezogenen Schwerlinien bedeuten, eine Reihe interessanter Gleichungen hergeleitet. Er macht dabei auf die „bemerkenswerthe Reciprocität" aufmerksam, welche freilich ohne die Zurückführung auf unsere Grundgleichungen (48) und (49) nur als eine zufällige erscheinen kann.

---

*) Ich nenne die Gleichungen (49) Grundgleichungen im Vergleich zu (56) darum, weil jene, so wie die Gleichungen (48), das einfachste Verhalten zwischen den Ecken allein und ihren Bestimmungsstücken (ohne Einmischung von Elementen, die den Ecken fremd sind) ergeben. Dass in §. 20. die Gleichungen (49) aus den Gleichungen (56) hergeleitet sind, ist unwesentlich, da (49) nach der Betrachtung in §. 21. auch aus (48) hätte hergeleitet werden können.

Sie erklärt sich nun daraus, dass die Gleichung der Dreiecke (56) der Hauptgruppe derjenigen Gleichungen angehört, die aus der Grundgleichung (49) der Tetraederecken erwachsen, dagegen die Gleichung der Schwerlinien der anderen Hauptgruppe derjenigen, die aus der Grundgleichung (48) der vier Ecken um einen Punkt abzuleiten sind*). Die gegenseitige Polorität beider Hauptgruppen findet ihre Erklärung in dem §. 21. Gesagten.

§. 25.

Da nun die Gleichungen (48) und (49) und ihre nächsten Descendenten (52) und (56) die fruchtbarsten Ausgangspunkte für Untersuchungen über das Tetraeder sind, so mögen die wichtigsten Ableitungen aus (48) und (49) hier folgen:

(49)

$$
\begin{aligned}
-\Pi + \Pi_1\cos\alpha' + \Pi_2\cos\beta' + \Pi_3\cos\gamma' &= 0, \quad \text{I.}\\
\Pi\cos\alpha' - \Pi_1 + \Pi_2\cos\gamma + \Pi_3\cos\beta &= 0, \quad \text{II.}\\
\Pi\cos\beta' + \Pi_1\cos\gamma - \Pi_2 + \Pi_3\cos\alpha &= 0, \quad \text{III.}\\
\Pi\cos\gamma' + \Pi_1\cos\beta + \Pi_2\cos\alpha - \Pi_3 &= 0; \quad \text{IV.}
\end{aligned}
$$

(48)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} + \mathbf{P}_1\cos v + \mathbf{P}_2\cos\pi + \mathbf{P}_3\cos\varkappa &= 0, \quad \text{I.}\\
\mathbf{P}\cos v + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\cos\nu + \mathbf{P}_3\cos\mu &= 0, \quad \text{II.}\\
\mathbf{P}\cos\pi + \mathbf{P}_1\cos\nu + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3\cos\lambda &= 0, \quad \text{III.}\\
\mathbf{P}\cos\varkappa + \mathbf{P}_1\cos\mu + \mathbf{P}_2\cos\lambda + \mathbf{P}_3 &= 0. \quad \text{IV.}
\end{aligned}
$$

---

*) Um das Letztere deutlicher nachzuweisen, als in §. 23. andeutungsweise schon geschehen ist, denke man K als Schwerpunkt, und von O aus die Schwerlinie t gezogen. Dann ist bekanntlich das Stück von t, welches innerhalb des Theiltetraeders τ fällt, $\frac{1}{4}t$; offenbar aber ist das Verhältniss $\tau:\mathfrak{T}$, da beide auf der Grundfläche Δ stehen, gleich dem Verhältniss dieses Stückes zur ganzen t, also $\tau=\frac{1}{4}\mathfrak{T}$, ebenso $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\frac{1}{4}\mathfrak{T}$, was, in die Gleichung (52) gesetzt, ergiebt:

$$r+r_1\cos v+r_2\cos\pi+r_3\cos\varkappa=0,$$

und weil offenbar $r=\frac{3}{4}t$ u. s. w. auch

$$t+t_1\cos v+t_2\cos\pi+t_3\cos\varkappa=0.$$

Setzt man die Werthe von $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ aus II., III., IV. in I. oder die Werthe von $\cos v$, $\cos\pi$, $\cos\varkappa$ aus II., III., IV. in I., so erhält man:

(57)

$$\Pi^2 = \Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 - 2\Pi_2\Pi_3\cos\alpha - 2\Pi_1\Pi_3\cos\beta - 2\Pi_1\Pi_2\cos\gamma,$$

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + \mathbf{P}_3^2 + 2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\cos\lambda + 2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3\cos\mu + 2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\cos v.$$

Durch Elimination von $\cos\gamma'$ aus I. und IV. und $\cos\gamma$ aus II., III. von $\cos\varkappa$ aus I., IV. und von $\cos v$ aus II., III.:

(58)

$$\Pi^2 + \Pi_1^2 - 2\Pi\Pi_1\cos\alpha' = \Pi_2^2 + \Pi_3^2 - 2\Pi_2\Pi_3\cos\alpha,$$

nebst zwei anderen;

$$\mathbf{P}^2 + \mathbf{P}_1^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{P}_1\cos v = \mathbf{P}_2^2 + \mathbf{P}_3^2 + 2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\cos\lambda,$$

nebst zwei anderen.

Setzt man in (58) links den Factor $\Pi - 2\Pi_1\cos\alpha'$ aus I. $= -\Pi_1\cos\alpha' + \Pi_2\cos\beta' + \Pi_3\cos\gamma'$ und dem Factor $\mathbf{P} + 2\mathbf{P}_1\cos v$ $= \mathbf{P}_1\cos v - \mathbf{P}_2\cos\pi - \mathbf{P}_3\cos\varkappa$:

(59)

$$2\Pi_2\Pi_3\cos\alpha = -\Pi_1(\Pi_1 - \Pi\cos\alpha') + \Pi_2(\Pi_2 - \Pi\cos\beta') + \Pi_3(\Pi_3 - \Pi\cos\gamma'),$$

nebst zwei anderen;

$$2\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\cos\lambda = \mathbf{P}_1(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}\cos v) - \mathbf{P}_2(\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}\cos\pi) - \mathbf{P}_3(\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}\cos\varkappa),$$

nebst zwei anderen.

Setzt man in IV. den Werth von Π resp. von $\mathbf{P}$ aus I., so führt dies auf:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} a_1 &= \frac{-\Pi_1^2\sin^2\alpha' + \Pi_2^2\sin^2\beta' + \Pi_3^2\sin^2\gamma'}{4\Pi_1\Pi_2\Pi_3}, \\ \operatorname{ctg}(\pi\varkappa) &= \frac{\mathbf{P}_1^2\sin^2 v - \mathbf{P}_2^2\sin^2\pi - \mathbf{P}_3^2\sin^2\varkappa}{4\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3} \text{*)}. \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Eliminirt man aus I. und II., I. und III., I. und IV. Π resp. $\mathbf{P}$, dann wieder Π_1 und $\mathbf{P}_1$, so erhält man:

---

*) $(\pi\varkappa)$ bedeutet den Flächenwinkel, den die Ebenen der Winkel π und $\varkappa$ mit einander bilden.

(61)

$$\sin^2\alpha'\sin^2\beta'\sin^2\gamma' = (\cos\alpha+\cos\beta'\cos\gamma')^2\sin^2\alpha'$$
$$+(\cos\beta+\cos\alpha'\cos\gamma')^2\sin^2\beta'+(\cos\gamma+\cos\alpha'\cos\beta')^2\sin^2\gamma'$$
$$+(\cos\alpha+\cos\beta'\cos\gamma')(\cos\beta+\cos\alpha'\cos\gamma')(\cos\gamma+\cos\alpha'\cos\beta'),$$

$$\sin^2\upsilon\sin^2\pi\sin^2\varkappa = (\cos\lambda-\cos\pi\cos\varkappa)^2\sin^2\upsilon$$
$$+(\cos\mu-\cos\upsilon\cos\varkappa)^2\sin^2\pi+(\cos\nu-\cos\upsilon\cos\pi)^2\sin^2\varkappa$$
$$-(\cos\lambda-\cos\pi\cos\varkappa)(\cos\mu-\cos\upsilon\cos\varkappa)(\cos\nu-\cos\upsilon\cos\pi).$$

Diese Gleichungen, weiter entwickelt, ergeben:

(62)

$$1 = \cos^2\alpha+\cos^2\alpha'-\cos^2\alpha\cos^2\alpha'+2\cos\beta\cos\beta'\cos\gamma\cos\gamma'$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$+\cos^2\beta+\cos^2\beta'-\cos^2\beta\cos^2\beta'+2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\gamma\cos\gamma'$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta'\cos\gamma'$$
$$+\cos^2\gamma+\cos^2\gamma'-\cos^2\gamma\cos^2\gamma'+2\cos\alpha\cos\alpha'\cos\beta\cos\beta'$$
$$+2\cos\alpha'\cos\beta\cos\gamma'+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

$$1 = \cos^2\lambda+\cos^2\upsilon-\cos^2\lambda\cos^2\upsilon+2\cos\mu\cos\pi\cos\nu\cos\varkappa$$
$$-2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu$$
$$+\cos^2\mu+\cos^2\pi-\cos^2\mu\cos^2\pi+2\cos\lambda\cos\upsilon\cos\nu\cos\varkappa$$
$$-2\cos\lambda\cos\pi\cos\varkappa$$
$$+\cos^2\nu+\cos^2\varkappa-\cos^2\nu\cos^2\varkappa+2\cos\lambda\cos\upsilon\cos\mu\cos\pi$$
$$-2\cos\upsilon\cos\mu\cos\varkappa-2\cos\upsilon\cos\nu\cos\pi.$$

Bei den Eliminationen, wodurch die Gleichungen (61) gefunden werden, kommt man auch auf folgende Gleichungen:

(63)

$$4\Pi_2\Pi_3 = (\cos\beta+\cos\alpha'\cos\gamma')(\cos\gamma+\cos\alpha'\cos\beta')$$
$$+(\cos\alpha+\cos\beta'\cos\gamma')\sin^2\alpha',$$

$$4\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = (\cos\mu-\cos\upsilon\cos\varkappa)(\cos\nu-\cos\upsilon\cos\pi)$$
$$+(\cos\lambda-\cos\pi\cos\varkappa)\sin^2\upsilon.$$

Da $4\Pi_2\Pi_3$ eine Function aller Flächenwinkel ausser α und $4\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ eine Function aller Seitenwinkel (der vier Ecken um K) ausser λ ist: so bieten die Gleichungen (63) die Werthe von $\cos\alpha$ und $\cos\lambda$ durch die je fünf anderen Flächen- resp. Seitenwinkel ausgedrückt, dar, was aus den Gleichungen (61) oder (62) unendlich mühsam zu erreichen wäre.

Für manche Untersuchungen sind auch folgende Umformungen der Grundgleichungen brauchbar, die man erhält, indem man $\cos\alpha'$ mit $1-2\sin^2\frac{1}{2}\alpha'$ und mit $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha'-1$ u. s. w. vertauscht und ebenso mit $\cos v$ u. s. w. verfährt:

(64)

$$\tfrac{1}{2}(-\Pi+\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3)=\Pi_1\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha'+\Pi_2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta'+\Pi_3\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma',$$

$$\tfrac{1}{2}(\Pi+\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3)\quad=\Pi_1\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha'+\Pi_2\cos^2\tfrac{1}{2}\beta'+\Pi_3\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma',$$

$$\tfrac{1}{2}(-\mathbf{P}+\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3)=\mathbf{P}_1\cos^2\tfrac{1}{2}v+\mathbf{P}_2\cos^2\tfrac{1}{2}\pi+\mathbf{P}_3\cos^2\tfrac{1}{2}\varkappa,$$

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{P}+\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_3)\quad=\mathbf{P}_1\sin^2\tfrac{1}{2}v+\mathbf{P}_2\sin^2\tfrac{1}{2}\pi+\mathbf{P}_3\sin^2\tfrac{1}{2}\varkappa;$$

wozu die je drei anderen analogen Gleichungen leicht zu bilden sind.

Durch Verbindung derselben und Anwendung der Gaussischen Formeln kommt man noch auf:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi+\Pi_1 &= \quad\Pi_2\frac{\sin(b_3+c_3)}{\sin a_3}+\Pi_3\frac{\sin(b_2+c_2)}{\sin a_2},\\
\Pi-\Pi_1 &= -\Pi_2\frac{\sin(b_3-c_3)}{\sin a_3}+\Pi_3\frac{\sin(b_2-c_2)}{\sin a_2},\\
0 &= \mathbf{P}+\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\frac{\sin(v\nu+v\pi)}{\sin(\pi\nu)}+\mathbf{P}_3\frac{\sin(v\varkappa+v\mu)}{\sin(\varkappa\mu)},\\
0 &= \mathbf{P}-\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2\frac{\sin(v\nu-v\pi)}{\sin(\pi\nu)}-\mathbf{P}_3\frac{\sin(v\varkappa-v\mu)}{\sin(\varkappa\mu)};
\end{aligned}\right\}\quad(65)$$

woraus ferner hervorgeht:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi \sin\alpha' &= \Pi_2 \cos b_3 \sin\gamma + \Pi_3 \cos c_2 \sin\beta, \\
\Pi \sin\beta' &= \Pi_1 \cos a_3 \sin\gamma + \Pi_3 \cos c_1 \sin\alpha, \\
\Pi \sin\gamma' &= \Pi_1 \cos a_2 \sin\beta + \Pi_2 \cos b_1 \sin\alpha; \\
\mathbf{P} \sin v + \mathbf{P}_2 \cos(\nu v) \sin\nu + \mathbf{P}_3 \cos(\mu v) \sin\mu &= 0, \\
\mathbf{P} \sin\pi + \mathbf{P}_1 \cos(\nu\pi) \sin\nu + \mathbf{P}_3 \cos(\lambda\pi) \sin\lambda &= 0, \\
\mathbf{P} \sin\varkappa + \mathbf{P}_1 \cos(\mu\varkappa) \sin\mu + \mathbf{P}_2 \cos(\lambda\varkappa) \sin\lambda &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

In allen Gleichungen dieses §. 25. können die Π mit den Δ, die $\mathbf{P}$ mit $3r\tau$ oder mit $\mathfrak{p}$ vertauscht werden.

§. 26.

Einen Ausgangspunkt für viele Untersuchungen über das Tetraeder bietet auch die Anwendung des Satzes (41) in §. 16. auf die vier Ecken des Tetraeder dar. Werden nämlich von dem beliebigen Punkte K im Innern des Tetraeders nach den Ecken die Geraden r, r_1, r_2, r_3 gezogen und Ebenen durch sie gelegt, so werden durch die letzteren auch die Tetraederecken in je drei Theilecken zerlegt, deren Eckensinus und polare Eckensinus so bezeichnet werden sollen: Die rechts angehängten Indices bezeichnen wie bisher diejenige der vier Tetraederecken, welcher die Theilecke angehört, die oberen Accente ($P_2' \, P_2'' \, P_2'''$) deuten die Theilecken an, und zwar in der Art, dass diejenige Theilecke, welche die Seite a_2 mit der Hauptecke gemeinschaftlich hat, einmal, diejenige welche mit ihr b_2 gemein hat, zweimal, die, welche mit ihr c_2 gemein hat, dreimal accentuirt ist.

Wir haben demnach aus (41):

$$\left.\begin{aligned}
P &= P' \cos(ru) + P'' \cos(rp) + P''' \cos(rq), \\
P_1 &= P_1' \cos(r_1 u) + P_1'' \cos(r_1 m) + P_1''' \cos(r_1 n), \\
P_2 &= P_2' \cos(r_2 l) + P_2'' \cos(r_2 p) + P_2''' \cos(r_2 n), \\
P_3 &= P_3' \cos(r_3 l) + P_3'' \cos(r_3 m) + P_3''' \cos(r_3 q).
\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Diese Gleichungen sprechen aber noch nicht aus, dass die von O, A, B, C ausgehenden vier Geraden r, r_1, r_2, r_3 in einem Punkte zusammentreffen. Je nach der Art und Weise, wie diese Bedingung eingeführt wird, nehmen die Gleichungen (67) sehr verschiedene Formen an.

§. 27.

Wendet man z. B. die Gleichung (41) in der Form (43)*) auf die vier Tetraederecken an, multiplicirt mit r, r_1, r_2, r_3 und ersetzt $r \sin \eta'$, $r \sin \eta_1'$ u. s. w. durch d_1, d u. s. w., so erhält man

(68)

$$2\Pi r = d_1 \sin\alpha \cos(ru) + d_2 \sin\beta \cos(rp) + d_3 \sin\gamma \cos(rq),$$

$$2\Pi_1 r_1 = d \sin\alpha \cos(r_1 u) + d_2 \sin\gamma' \cos(r_1 n) + d_3 \sin\beta' \cos(r_1 m),$$

nebst zwei anderen.

Hierin lassen sich noch die 12 Winkel (ru), (rp), $(r_1 u)$ u. s. w. auf die 6 Winkel v, π, $\varkappa$, λ, μ, ν und 6 Kanten u, p, q, l, m, n bringen, indem

$$\cos(ru) = \frac{r - r_1 \cos v}{u}, \quad \cos(r_1 u) = \frac{r_1 - r \cos v}{u}, \text{ u. s. w.}$$

Dadurch wird:

(69)

$$2\Pi r = \frac{d_1 \sin\alpha}{u}(r - r_1 \cos v) + \frac{d_2 \sin\beta}{p}(r - r_2 \cos\pi) + \frac{d_3 \sin\gamma}{q}(r - r_3 \cos\varkappa),$$

$$2\Pi_1 r_1 = \frac{d \sin\alpha}{u}(r_1 - r \cos v) + \frac{d_2 \sin\gamma'}{n}(r_1 - r_2 \cos\nu) + \frac{d_3 \sin\beta'}{m}(r_1 - r_3 \cos\mu),$$

nebst zwei anderen.

Anmerkung. Wenn man in eine dieser Gleichungen nach (36) $\frac{\sin\alpha}{u} = \frac{\Pi\Pi_1}{w}$ u. s. w. setzt, und nach (50) $d = \frac{3\mathfrak{r}}{\Delta} = \frac{\mathbf{P} r_1 r_2 r_3}{\Delta}$, so kommt man auch auf diesem Wege zu der Gleichung (48).

§. 28.

Am fruchtbarsten ist dieser Ausgangspunkt (Gleichung (68)), wenn man für K den Mittelpunkt der umschriebenen Kugel wählt,

---

*) Man wird die Form (43) im Allgemeinen der Form (42) vorziehen, weil diese 12 Kantenwinkel a, b, c; a_1, b_1 u. s. w. in die 4 Gleichungen bringt, während jene statt deren nur die 6 Flächenwinkel α, β, γ, α', β', γ' einführt.

also $r = r_1 = r_2 = r_3$, $\cos(ru) = \cos(r_1 u) = \sin\frac{1}{2}v$ u. s. w. setzt. Dann gewinnen unsere Gleichungen die Form:

(70)

$$2\Pi r = d_1 \sin\alpha \sin\tfrac{1}{2}v + d_2 \sin\beta \sin\tfrac{1}{2}\pi + d_3 \sin\gamma \sin\tfrac{1}{2}\varkappa,$$

$$2\Pi_1 r = d \sin\alpha \sin\tfrac{1}{2}v + d_2 \sin\gamma' \sin\tfrac{1}{2}\nu + d_3 \sin\beta' \sin\tfrac{1}{2}\mu,$$

$$2\Pi_2 r = d \sin\beta \sin\tfrac{1}{2}\pi + d_1 \sin\gamma' \sin\tfrac{1}{2}\nu + d_3 \sin\alpha' \sin\tfrac{1}{2}\mu,$$

$$2\Pi_3 r = d \sin\gamma \sin\tfrac{1}{2}\varkappa + d_1 \sin\beta' \sin\tfrac{1}{2}\mu + d_2 \sin\alpha' \sin\tfrac{1}{2}\lambda;$$

oder, wenn man sie noch mit $2r$ multiplicirt, und dann $2r\sin\frac{1}{2}v = u$ setzt, u. s. w.:

$$\left.\begin{aligned} 4\Pi r^2 &= d_1 u \sin\alpha + d_2 p \sin\beta + d_3 q \sin\gamma, \\ 4\Pi_1 r^2 &= d u \sin\alpha + d_2 n \sin\gamma' + d_3 m \sin\beta', \\ &\text{nebst zwei anderen.} \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich durch Eliminationen und durch Substitutionen, die zum Theil schon aus der Figur leicht ablesbar sind, zahllose neue Relationen zwischen den Bestimmungsgrössen des Tetraeders gewinnen.

Zu bemerken ist noch über (71), dass die Producte $u\sin\alpha$.... ....$l\sin\alpha'$ sich nach (36) einestheils durch $\frac{w\sin^2\alpha}{\Pi\Pi_1}\cdots\frac{w\sin^2\alpha'}{\Pi_2\Pi_3}$, anderntheils durch $\frac{\Pi\Pi_1 u^2}{w}\cdots\frac{\Pi_2\Pi_3 l^2}{w}$ ersetzen lassen. Letzteres z. B. giebt:

$$4r^2 w = \Pi_1 d_1 u^2 + \Pi_2 d_2 p^2 + \Pi_3 d_3 q^2,$$

$$4r^2 w = \Pi d u^2 + \Pi_1 d_1 n^2 + \Pi_3 d_3 m^2,$$

nebst zwei anderen,

woraus durch einfache Eliminationen interessante Resultate zu gewinnen sind.

Auch lassen sich leicht die Producte je zweier Gegenkanten einführen: Multiplicirt man die erste der Gleichungen (71) mit M, so wird

$$4Pr^2 = d_1 u \sin a + d_2 p \sin b + d_3 q \sin c.$$

Da nun $\sin a = \frac{l}{2\varrho_1}$, $\sin b = \frac{m}{2\varrho_2}$, $\sin c = \frac{n}{2\varrho_3}$, so ist:

$$8Pr^2 = ul\frac{d_1}{\varrho_1} + pm\frac{d_2}{\varrho_2} + qn\frac{d_3}{\varrho_3}, \tag{72}$$

wonach die drei anderen leicht zu bilden sind. Offenbar ist (da wir ja in diesem §. 28. unter K den Mittelpunkt der umschriebenen Kugel verstehen) $\frac{d_1}{\varrho_1}$ die Cotangente des sphärischen Radius des dem Δ_1 umschriebenen kleinen Kugelkreises. Bezeichnen wir diese mit $\operatorname{ctg}\varrho_1$ (eine Verwechselung des sphärischen Radius ϱ_1 mit dem linearen ϱ_1 ist nicht zu besorgen), so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
8Pr^2 &= ul\operatorname{ctg}\varrho_1 + pm\operatorname{ctg}\varrho_2 + qn\operatorname{ctg}\varrho_3,\\
8P_1r^2 &= ul\operatorname{ctg}\varrho + pm\operatorname{ctg}\varrho_3 + qn\operatorname{ctg}\varrho_2,\\
8P_2r^2 &= ul\operatorname{ctg}\varrho_3 + pm\operatorname{ctg}\varrho + qn\operatorname{ctg}\varrho_1,\\
8P_3r^2 &= ul\operatorname{ctg}\varrho_2 + pm\operatorname{ctg}\varrho_1 + qn\operatorname{ctg}\varrho.
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Eliminirt man aus der ersten und vierten, so wie aus der zweiten und dritten qn, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{ul}{4r^2} &= \frac{P\operatorname{ctg}\varrho + P_1\operatorname{ctg}\varrho_1 - P_2\operatorname{ctg}\varrho_2 - P_3\operatorname{ctg}\varrho_3}{\operatorname{ctg}\varrho\operatorname{ctg}\varrho_1 - \operatorname{ctg}\varrho_2\operatorname{ctg}\varrho_3},\\
\frac{pm}{4r^2} &= \frac{P\operatorname{ctg}\varrho - P_1\operatorname{ctg}\varrho_1 + P_2\operatorname{ctg}\varrho_2 - P_3\operatorname{ctg}\varrho_3}{\operatorname{ctg}\varrho\operatorname{ctg}\varrho_2 - \operatorname{ctg}\varrho_1\operatorname{ctg}\varrho_3},\\
\frac{qn}{4r^2} &= \frac{P\operatorname{ctg}\varrho - P_1\operatorname{ctg}\varrho_1 - P_2\operatorname{ctg}\varrho_2 + P_3\operatorname{ctg}\varrho_3}{\operatorname{ctg}\varrho\operatorname{ctg}\varrho_3 - \operatorname{ctg}\varrho_1\operatorname{ctg}\varrho_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

§. 29.

Der Verfasser hat in den obigen 28 Paragraphen aus einer grossen Menge von Einzelnheiten, die sich bei ihm angehäuft haben, diejenigen zusammengestellt, die ihm theils als Grundlagen für die Darstellung anderer Gruppen dienlich scheinen, theils geeignet, diesem verhältnissmässig noch wenig entwickelten Zweige der Wissenschaft Aufmerksamkeit und Arbeit zuzuwenden. — Zur Aufstellung eines organischen Systems fehlt ihm noch so viel Material, dass es nicht rathsam scheint, bis zur vollendeten Herbeischaffung und Verarbeitung desselben mit der Veröffentlichung mancher immerhin für sich interessanter Einzelnheiten zu warten. Besonders würde es ihn freuen, wenn ihm der obige Aufsatz einige Mitarbeiter gewönne.

XXVII.

Summation zweier unendlicher Reihen auf elementarem Wege.

Von

Herrn *Julius Bode*,

wissenschaftlichem Hülfslehrer am Gymnasium zu Dortmund.

Lejeune Dirichlet fand *), dass der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho}{n^{1+\varrho}}$$

sich unendlich der Einheit als Grenze nähere, „lorsque la variable positive ϱ devient moindre que toute grandeur donnée.“ Herr Schlömilch indess glaubt **), dass dies auch noch für den Grenzfall $\varrho=0$ gelte, und führt hierzu zwei Beweise an, einen elementaren und einen zweiten ausführlicheren als Dirichlet mit Hülfe der Gammafunktion. Was zunächst den elementaren Beweis angeht, so dürfte es nicht schwer sein, nachzuweisen, dass derselbe einen Irrthum enthält, durch dessen Beseitigung sich darthun lässt, dass der fragliche Ausdruck für $\varrho=0$ ebenfalls genau gleich Null ist.

Herr Schlömilch folgert aus

$$f(\varrho)=\frac{\varrho}{1^{1+\varrho}}+\frac{\varrho}{2^{1+\varrho}}+\frac{\varrho}{3^{1+\varrho}}+\dots \qquad (1^a)$$

und der hieraus abgeleiteten Gleichung

$$\frac{2}{2^{1+\varrho}}f(\varrho)=\frac{2\varrho}{2^{1+\varrho}}+\frac{2\varrho}{4^{1+\varrho}}+\frac{2\varrho}{6^{1+\varrho}}+\dots$$

offenbar in Uebereilung die Relation

$$\frac{2^\varrho-1}{2^\varrho}f(\varrho)=\frac{\varrho}{1^{1+\varrho}}-\frac{\varrho}{2^{1+\varrho}}+\frac{\varrho}{3^{1+\varrho}}-+\dots \qquad (2^a)$$

---

*) Crelle's Journal. Bd. IXX. p. 326.

**) Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1858. Litzg. p. 99. und 1860. p. 132. ff.

Denn es ist wohl keinem Zweifel unterworfen, dass die Gleichung (1^a) auch in der Form

$$f(\varrho)=\varrho\left[\frac{1}{1^{1+\varrho}}+\frac{1}{2^{1+\varrho}}+\dots+\frac{1}{(n-1)^{1+\varrho}}+\frac{1}{n^{1+\varrho}}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{1}{(2n-2)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(2n-1)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(2n)^{1+\varrho}}\right] \quad (1^b)$$

geschrieben werden darf, in welcher $\frac{\varrho}{n^{1+\varrho}}$ das allgemeine Glied der Reihe bezeichnet und diese stets mit dem Gliede $\frac{\varrho}{(2n)^{1+\varrho}}$ endigend gedacht wird. Doch ist, wie sich zeigen wird, für die Schlussbetrachtung gleichgültig, ob das letzte Glied $\frac{\varrho}{(2n)^{1+\varrho}}$ oder $\frac{\varrho}{(2n+1)^{1+\varrho}}$ sein soll.

Demnach wird:

$$\frac{2}{2^{1+\varrho}}f(\varrho)=\varrho\left[\left(\frac{2}{2^{1+\varrho}}+\frac{2}{4^{1+\varrho}}+\dots+\frac{2}{(2n-2)^{1+\varrho}}+\frac{2}{(2n)^{1+\varrho}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^\varrho}\left(\frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}}+\dots+\frac{1}{(2n)^{1+\varrho}}\right)\right]_{n=\infty}$$

und

$$\frac{2^\varrho-1}{2^\varrho}f(\varrho)=\varrho\left[\left(\frac{1}{1^{1+\varrho}}-\frac{1}{2^{1+\varrho}}+-\dots+\frac{1}{(2n-1)^{1+\varrho}}-\frac{1}{(2n)^{1+\varrho}}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2^\varrho}\left(\frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}}+\dots+\frac{1}{(2n)^{1+\varrho}}\right)\right]_{n=\infty} \quad (2^b)$$

oder

$$f(\varrho)=$$
$$\frac{2^\varrho}{\frac{2^\varrho-1}{\varrho}}\left[\left(\frac{1}{1^{1+\varrho}}-\frac{1}{2^{1+\varrho}}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^{1+\varrho}}-\frac{1}{(2n)^{1+\varrho}}\right)-\frac{1}{2^\varrho}\sum_{m=n+1}^{m=2n}\frac{1}{m^{1+\varrho}}\right]_{n=\infty}.$$

Geht man in dieser Gleichung links und rechts nach ϱ zur Grenze über, so folgt:

$$(3)$$
$$f(0)=\frac{1}{l2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)\right]_{n=\infty}.$$

Da nunmehr der Werth der eckigen Klammer, welcher mit E bezeichnet werden möge, für jeden positiven ganzen Werth von n, auch für $n=\infty$, genau Null ist, wie bewiesen werden wird, so ergibt sich ganz streng nach der von Herrn **Schlömilch** selbst angegebenen elementaren Methode des Beweises $f(0)=0$.

Bezeichnet nämlich n irgend eine positive ganze Zahl, so erhält E drei Glieder mehr, wenn in (3) das n von n auf $n+1$ wächst, und zwar erhält die erste runde Klammer mehr die Glieder $+\frac{1}{2n+1}$ und $-\frac{1}{2n+2}$, die zweite runde Klammer dagegen verliert das Glied $\frac{1}{n+1}$, wofür sie erhält die beiden neuen Glieder $+\frac{1}{2n+1}$ und $+\frac{1}{2n+2}$, so dass die Gesammtänderung des E beträgt:

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=0,$$

d. h. E ändert sich nicht mit n. Nun aber ist E für $n=3$ identisch mit Null, also auch für $n=4$, $n=5$, $n=6$, $n=7$,...., d. i. auch für $n=\infty$.

Hätte man die Reihe in (1^b) nicht mit $\frac{\varrho}{(2n)^{1+\varrho}}$ schliessen lassen, sondern mit $\frac{\varrho}{(2n+1)^{1+\varrho}}$, so würde E allerdings nicht für endliche n gleich Null sein können, gewiss aber für $n=\infty$ unendlich klein sein müssen, wie leicht zu sehen. Immer ist demnach für $n=\infty$:

$$f(0)=\frac{E}{l2}=0 \qquad (I)$$

und

(II)

$$\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}\right]_{n=\infty}=\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-+....-\frac{1}{2n}\right]_{n=\infty}=l2.$$

Es scheint nicht, dass das vorhergehende Raisonnement angegriffen werden könne, es sei denn, dass die Gleichung (3) insofern bestritten werde, als sie aus der ihr vorausgehenden dadurch abgeleitet ward, dass für die Grenze der Summe der unendlichen Reihe gesetzt ward die Summe der Grenzen ihrer einzelnen Glieder — beides in Bezug auf ϱ. Allein dies thut auch Herr Schlömilch und ist auch gewiss statthaft, wie ich im Zusammenhange mit anderen dahin gehörigen Untersuchungen demnächst nachweisen werde. Aus dem vorhergehenden Ergebniss folgt indess nicht, dass $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\varrho}{n^{1+\varrho}}$ für alle unendlich kleine ϱ ebenfalls unendlich klein sei, vielmehr nähert sich der Werth dieses Ausdrucks mit unendlich klein werdendem ϱ allerdings einer diskreten Grösse grösser als Null, er nimmt aber wieder continuirlich ab und zwar bis Null, wenn ϱ von einem gewissen unendlich kleinen Werth an noch

weiter und zwar bis Null abnimmt. Diese merkwürdige Eigenschaft, welche sich als eine bis jetzt wenig beachtete Continuitätsweise ergibt, kommt der Summe sehr vieler und wichtiger unendlicher Reihen zu und wird ebenfalls demnächst ausführlich erörtert werden.

XXVIII.

Ueber den Cartesischen Satz bezüglich der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung.

Von

Herrn Dr. *G. Zehfuss*,

Privatdocenten in Heidelberg.

Der Cartesische Satz: Eine algebraische Gleichung mit reellen Coefficienten kann, falls sie vollständig ist, höchstens ebensoviele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel, und höchstens ebensoviele negative Wurzeln, als Zeichenfolgen darbieten, erscheint zwar, obgleich selbst Gauss (Crelle's Journal III.) es nicht verschmäht hat, einen Beweis desselben zu liefern, für die Zwecke der numerischen Auflösung der Gleichungen seit dem Bekanntwerden des Sturm'schen Satzes von untergeordneterer Wichtigkeit; allein trotzdem wird man sich mannichfacher Anwendungen desselben erinnern, weshalb es nicht ungerechtfertigt erscheinen dürfte, einen auf neue Principien gegründeten Beweis desselben zu veröffentlichen, besonders, da sich dabei auch bezüglich der unvollständigen Gleichungen einige neue Bemerkungen ergeben.

Der Mechanismus des Beweises beruht auf der bekannten Bernoulli'schen Schlussart, nach welcher man zeigt, dass der Satz für eine Gleichung $n$ten Grades gelte, sobald er für die je unmittelbar niedere Derivirte sattfindet, wodurch die Entscheidung nach $n-1$ Derivationen zuletzt von der Giltigkeit des Satzes bei der Gleichung des ersten Grades abhängig gemacht ist, bei welcher er bekanntlich zutrifft.

I. Untersuchung des Kennzeichens der positiven Wurzeln.

Die Anzahl der positiven, also von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

sei gleich r, die Anzahl der Wechsel sei gleich v. Ebenso sei r' die Anzahl der positiven Wurzeln der Derivirten

$$f'(x) = nax^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1},$$

und v' die Anzahl ihrer Wechsel. Alsdann hat man immer entweder $v' = v$, oder $v' = v - 1$, jenachdem a_n und a_{n-1} gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Untersuchen wir, in welchem Zusammenhange diess mit der Anzahl der positiven Wurzeln beider Gleichungen steht. Es sind verschiedene Fälle dabei zu unterscheiden.

α) Wenn a_{n-1} und a_n beide positiv sind, ist $v' = v$. Die durch $y = f(x)$ dargestellte Curve schneidet wegen $a_n = f(0)$ die Ordinatenachse oberhalb der Abscissenachse, und steigt wegen $f'(0) = a_{n-1} > 0$ anfangs aufwärts, bietet also, ehe sie noch die Abscissenachse trifft, einen Maximalpunkt oder eine Wurzel von $f'(x) = 0$ dar. Nach dem Rolle'schen, leicht aus der Betrachtung der Curve folgenden Satze, kann nun zwischen je zwei Wurzeln von $f'(x) = 0$ höchstens eine einzige von $f(x) = 0$ liegen; nur die grösste positive Wurzel von $f(x) = 0$ braucht nicht zwischen zwei Wurzeln von $f'(x) = 0$ zu liegen. — Eine möglichst grosse Anzahl r von positiven Wurzeln der Gleichung ergibt sich demnach, wenn man die $r' - 1$ zwischen je zwei der r' Wurzeln von $f'(x) = 0$ etwa möglichen Werthe noch um die grösste Wurzel von $f(x)$ vermehrt, wodurch im Ganzen $r' - 1 + 1 = r'$ entsteht. Also ist $r \leqq r'$. Diess, zusammen mit $v' = v$, ergibt: $r - v \leqq r' - v'$.

β) Wenn $a_n > 0$ und $a_{n-1} < 0$, ist $v = v' + 1$, und die Curve schneidet die Ordinatenachse oberhalb der Abscissenachse und beginnt fallend, wegen $f'(0) = a_{n-1} < 0$. Eine möglichst grosse Anzahl von Wurzeln ergibt sich demnach für $f(x) = 0$, wenn die Curve sofort die Abscissenachse durchschneidet, ehe sie einen einer Wurzel von $f'(x)$ entsprechenden Minimalpunkt erreicht, und dann wie unter α) zwischen je zwei der r' Wurzeln von $f'(x) = 0$ eine positive, und zuletzt noch eine ausserhalb der r'

Wurzeln von $f'(x)$ gelegene grösste Wurzel ergibt. Die grösste Anzahl der Wurzeln von $f(x)=0$ ist sonach $r \overline{\overline{<}} 1+(r'-1)+1 \overline{\overline{<}} r'+1$. Zusammen mit $v=v'+1$ ergibt sich $r-v \leqq r'-v'$.

γ) Die Fälle $a_{n-1}<0$, $a_n<0$ und $a_{n-1}>0$, $a_n<0$ lassen eine den Fällen α) und β) analoge Behandlung zu und ergeben gleichfalls $r-v \leqq r'-v'$.

δ) Wenn $a_n=0$, $a_{n-1}=0$, so berührt die Curve im Ursprunge die Abscissenachse und entfernt sich dann von ihr, indem sie eher eine Wurzel von $f'(x)=0$, als eine solche von $f(x)=0$ darbietet. Abgesehen von der grössten, müssen demnach die Wurzeln der letzteren sämmtlich zwischen solchen von $f'(x)=0$ liegen, ihre grösste Anzahl ist mithin $r \leqq (r'-1)+1$, d. h. $r \leqq r'$, und da unter der Voraussetzung δ) auch $v=v'$ ist, so entsteht wieder $r-v \leqq r'-v'$.

ε) Wenn $a_n=0$, $a_{n-1} \gtrless 0$, so ist $v=v'$ *). Die Curve geht durch den Ursprung und entfernt sich dann von der Abscissenachse; die weitere Betrachtung ist wie unter δ). Es entsteht wieder $r-v \leqq r'-v'$.

ζ) Wenn $a_n>0$ und $a_{n-1}=0$ ist, so schneidet die Curve oberhalb der Abscissenachse in die Ordinatenachse ein und geht daselbst horizontal, wendet sich jedoch alsdann aufwärts oder abwärts, jenachdem der erste der Coefficienten a_{n-2}, a_{n-3}, ..., der nicht verschwindet, positiv oder negativ ist, weil dann eine der Ordinate $f(0)=a_n$ nächstanliegende Ordinate $f(x)=f(0)+a_{n-\mu}x^\mu+....$ augenscheinlich nur durch das die nachfolgenden kleinen Glieder in $x^{\mu+1}$.... beherrschende $a_{n-\mu}x^\mu$ von $f(0)=a_n$ unterschieden ist. — Wendet sich die Curve aufwärts, so ist die Betrachtung wie unter α), wendet sie sich abwärts, so ist sie analog β), in beiden Fällen resultirt daher $r-v \leqq r'-v'$.

---

*) Hier wie unter δ) soll, wie überhaupt, bei Beurtheilung der Anzahl der Zeichenwechsel auf verschwindende Glieder keine Rücksicht genommen werden, sondern es gelten nur die von Null verschiedenen Glieder als massgebend. Einige Schriftsteller ersetzen die Nullen nach Willkühr durch ein fingirtes + oder —.

η) Analog ζ) entsteht auch, wenn $a_n < 0$, $a_{n-1} = 0$ ist, $r - v \leqq r' - v'$.

Nach Betrachtung aller dieser Fälle ergibt sich, dass selbst wenn in den Coefficienten Lücken vorhanden sind, d. h. die Gleichung unvollständig ist, immer $r - v \leqq r' - v'$ sei, wenn nur bei Zählung der Zeichenwechsel die Lücken gänzlich vernachlässigt werden. Da der Grad der Gleichung ohne Einfluss auf die Allgemeinheit der Betrachtung war, so lässt sich die letzte Ungleichheit auch auf alle Derivirten ausdehnen, d. h. man hat:

$$r - v \leqq r' - v' \leqq r'' - v'' \ldots \leqq r^{(n-1)} - v^{(n-1)}.$$

Da aber die $(n-1)$te Derivirte vom ersten Grade und für sie also der Cartesische Satz richtig ist, so hat man $r^{(n-1)} - v^{(n-1)} = 0$, also ist $r - v \leqq 0$ oder $r \leqq v$, womit der Satz bewiesen ist.

II. Untersuchung des Kennzeichens der negativen Wurzeln.

Im Vorhergehenden ist die Giltigkeit des Kennzeichens der positiven Wurzeln selbst für den Fall der unvollständigen Gleichung $n$ten Grades bewiesen worden, wenn man nur bei Beurtheilung der Anzahl der Zeichenwechsel die Lücken nicht mit in Betracht zieht. Hieraus würde sich durch Transformation von x in $-x$ eine leichte Regel für die Anzahl der negativen Wurzeln für alle Fälle herleiten lassen, wie bekannt. Allein wir wenden uns zu der an die Zeichenfolgen gebundenen Regel für die höchste Anzahl der negativen Wurzeln, und werden beweisen, dass sie bei der vollständigen Gleichung $n$ten Grades immer statt habe, dass aber im Falle der unvollständigen Gleichung die Grenze der Anzahl der negativen Wurzeln um eben so viele Einheiten zu erweitern ist, als Lücken mit ungerader Anzahl von Nullen zwischen zwei Gliedern von entgegengesetzten Zeichen vorhanden sind, vorausgesetzt, dass die Lücken beim Zählen der Zeichenwechsel nicht berücksichtigt werden. — Die nöthige Discussion der einzelnen Fälle ist durchaus ähnlich derjenigen der Fälle unter I., weshalb wir uns darauf beschränken wollen, bei der vollständigen Gleichung nur zu discutiren den Fall,

$$\text{wo } a_n > 0 \text{ und } a_{n-1} > 0.$$

Bezeichnet man durch p die Anzahl der Folgen von $f(x)$, durch p' diejenige der Folgen von $f'(x)$, und bezeichnen r und r' die Anzahlen der negativen (von Null verschiedenen) Wurzeln von $f(x)$ und $f'(x)$, so ist zunächst klar, dass für $a_n > 0$ und $a_{n-1} > 0$ $f'(x)$ eine Folge weniger darbietet als $f(x)$, d. h. es ist $p = p' + 1$. — Ferner schneidet die Curve oberhalb der Ordinatenachse in die Abscissenachse ein und senkt sich von da wegen $a_{n-1} > 0$ gegen die Seite der negativen Abscissen hin, woselbst eine möglichst grosse Anzahl negativer Wurzeln von $f(x) = 0$ entstehen kann, wenn zunächst die Curve die Abscissenachse schneidet, ehe sie in einem Minimalpunkte eine Wurzel von $f'(x) = 0$ darbietet. Es ist dann ferner zwischen je zweien der r' Wurzeln von $f'(x)$ nur höchstens eine solche von $f(x) = 0$ möglich, und endlich kann noch eine absolut grösste negative Wurzel von $f(x) = 0$ vorhanden sein, die nicht zwischen zwei solchen von $f'(x) = 0$ eingeschlossen ist. Die Anzahl der negativen Wurzeln ist also höchstens $1 + (r' - 1) + 1$, d. h. $r \leqq r' + 1$. Diess zusammen mit $p = p' + 1$ ergibt $r - p \leqq r' - p'$.

Dasselbe Resultat ergibt sich im Falle der vollständigen Gleichungen bei allen übrigen zu unterscheidenden Fällen, also erhält man wie unter 1.:

$$r - p \leqq r' - p' \leqq r'' - p'' \ldots \leqq r^{(n-1)} - p^{(n-1)},$$

und da $r^{(n-1)} - p^{(n-1)} = 0$ ist, so kommt $r \leqq p$, d. h. bei der vollständigen Gleichung ist die Anzahl der negativen Wurzeln derjenigen der Folgen höchstens gleich.

Falls Lücken auftreten, ergibt sich gleichfalls immer das Resultat $r - p \leqq r' - p'$, ausgenommen den Fall, wo

$$a_n \gtrless 0 \text{ und } a_{n-1} = 0$$

ist. Sei z. B. $a_n > 0$, $a_{n-1} = 0$; die Curve schneidet, indem sie horizontal geht, oberhalb der Abscissenachse in die Ordinatenachse, und steigt nach der Seite der negativen x, oder fällt, jenachdem der erste der Coefficienten $a_{n-2}, a_{n-3} \ldots$, welcher nicht verschwindet, positiv und von gerader Ordnung, negativ und von ungerader Ordnung, oder umgekehrt ist. Man findet wie oben in

diesen Fällen $r-p \leqq r'-p'$, ausgenommen, wenn $a_{n-\mu}$ von gerader Ordnung und negativ, also eine Lücke von ungerader Gliederzahl zwischen einem Zeichenwechsel auftritt. Man sieht leicht, dass $r \leqq 1+r'$, weil sich die Curve der Achse nähert, gerade wie im Falle $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$. Aber es ist $v = v'$, also nicht

$$r - v = r' - v',$$

sondern

$$r - v \leqq 1 + r' - v'.$$

Dieses Hinzutreten einer Einheit wiederholt sich so oft mal, als derartige Lücken nach genügender Anzahl von Derivationen an das Ende der Gleichung treten, d. h. so oftmal, als solche Lücken vorhanden sind. Bezeichnet man ihre Anzahl durch μ, so ergibt sich durch Addition der Ungleichungen:

$$r - v \leqq 1 + r' - v',$$

$$r' - v' \leqq r'' - v'',$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$r^{(r)} - v^{(r)} \leqq 1 + r^{(r+1)} - v^{(r+1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r^{(n-2)} - v^{(n-2)} \leqq r^{(n-1)} - v^{(n-1)} \leqq 0,$$

dass $r - v \leqq \mu$, was dem Anfangs unter II. ausgesagten Theoreme entspricht. Ein einfaches Beispiel bietet $x^{2n} - a = 0$.

XXIX.

Die Ellipse und Hyperbel als einhüllende Kurven eines Systems von Kreissehnen.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*

an der k. k. Marine-Sternwarte zu Triest.

---

§. 1.

Das Problem, mit dessen Erledigung durch die Hilfsmittel der analytischen Geometrie sich der vorliegende Aufsatz beschäftigt, ist, was seine geometrische Anschaulichkeit betrifft, sehr einfach und lautet folgendermaassen:

Es sind in einer Ebene (Taf. IV. Fig. 4.) zwei feste Punkte A und B und ein Kreis gegeben. Verbindet man diese zwei Punkte mit einem beliebigen Punkte M des Kreises, so werden diese Verbindungslinien, nöthigenfalls verlängert, den Kreis noch in zwei anderen Punkten A_1 und B_1 schneiden, und die Lage der durch diese Punkte A_1, B_1 gelegten Geraden ist für jeden Punkt M eine bestimmte. Man soll die krumme Linie bestimmen, welche die Gerade A_1B_1 beschreibt, während der Punkt M die Peripherie des gegebenen Kreises durchläuft.

§. 2.

Nehmen wir den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises zum Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems und bezeichnen wir die laufenden Coordinaten mit x, y, so ist die Gleichung des gegebenen Kreises vom Radius r:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Coordinaten der zwei festen Punkte A und B in der Ebene des gegebenen Kreises seien beziehungsweise a, b und a', b'. Legen wir nun durch irgend einen Punkt (xy) des gegebenen Kreises und durch den Punkt (ab) eine Gerade, so wird diese den Kreis noch in einem zweiten Punkte treffen, die Coordinaten dieses Punktes seien u und v. Ebenso bezeichnen u' und v' die Coordinaten desjenigen Punktes des gegebenen Kreises, in welchen die durch die Punkte (xy) und $(a'b')$ geführte Gerade den Kreis zum zweiten Male schneidet. Zur Bestimmung von u, v, u', v' dienen die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} u^2 + v^2 = r^2, \\ u = Lv + M, \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} u'^2 + v'^2 = r^2, \\ u' = L'v' + M'; \end{cases}$$

wobei

$$(4) \quad L = \frac{y-b}{x-a}, \quad M = \frac{bx - ay}{x-a}, \quad L' = \frac{y-b'}{x-a'}, \quad M' = \frac{b'x - a'y}{x-a'}$$

ist. Betrachtet man x als unabhängige Variable, so ist ersichtlich, dass sowohl y, als auch u, v, u', v' als Functionen von x zu betrachten sind. Legt man endlich durch die Punkte (uv) und $(u'v')$ eine dritte Gerade, so ist, wenn man Kürze halber

$$(5) \qquad U = \frac{v-v'}{u-u'}, \quad V = \frac{uv' - u'v}{u-u'}$$

setzt, die Gleichung derselben:

$$(6) \qquad y = Ux + V.$$

Gehen wir, x um Δx ändernd, von dem Punkte (xy) des gegebenen Kreises zu einem benachbarten Punkte desselben über, so werden sich auch die Grössen U und V entsprechend ändern, und die Gerade (6) wird eine andere Lage erhalten. Bezeichnen wir die Aenderungen von U und V mit ΔU und ΔV, so ist die Gleichung der neuen Geraden:

$$(7) \qquad y = (U + \Delta U)x + V + \Delta V,$$

und die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden (6) und (7) sind:

$$x = -\frac{\Delta V}{\Delta U}, \quad y = -\frac{\Delta V}{\Delta U} U + V;$$

oder auch:

$$x = -\frac{\frac{\Delta V}{\Delta x}}{\frac{\Delta U}{\Delta x}}, \quad y = -\frac{\frac{\Delta V}{\Delta x}}{\frac{\Delta U}{\Delta x}} U + V.$$

Dieser Durchschnittspunkt wird offenbar zu einem Punkte der gesuchten einhüllenden Kurve, wenn wir Δx sich der Null nähern lassen, und da in diesem Falle

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{dU}{dx}, \quad \text{Lim}\,\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx}$$

wird, so hat man, wenn $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ die Coordinaten eines Punktes der gesuchten einhüllenden Kurve bezeichnen:

$$(8) \qquad \mathbf{x} = -\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dU}{dx}}, \quad \mathbf{y} = -\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dU}{dx}} U + V.$$

Werden die in diesen Gleichungen angedeuteten Differenziationen ausgeführt und aus ihnen in Verbindung mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ die Coordinaten x, y eliminirt, so ist die Eliminationsgleichung, welche nur mehr die Coordinaten $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und die Constanten r, a, b, a', b' enthalten wird, die Gleichung der gesuchten einhüllenden Kurve.

Wir haben hiermit in Kürze die Methode angedeutet, welche wir zur Lösung der vorgelegten Aufgabe verwenden werden, und es kommt nunmehr darauf an, die hier nur angedeuteten Operationen wirklich auszuführen, was uns zu einigen längeren Rechnungs-Entwickelungen nöthigen wird, worauf ich den Leser gleich am Eingange aufmerksam mache. Die vielseitige Transformationsfähigkeit der hierbei auftretenden Ausdrücke, die schliessliche Einfachheit der Resultate werden einigermaassen für die Länge der Rechnung entschädigen.

§. 3.

Wenn man in den Gleichungen (5) U und V nach x differenzirt und die Werthe von $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dV}{dx}$ in die Gleichungen (8) substituirt, so findet man:



(9)

$$x = \frac{(u-u')\left(u'\frac{dv}{dx} - u\frac{dv'}{dx}\right) - (v-v')\left(u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}\right)}{(u-u')\left(\frac{dv}{dx} - \frac{dv'}{dx}\right) - (v-v')\left(\frac{du}{dx} - \frac{du'}{dx}\right)},$$

$$y = \frac{v-v'}{u-u'} \cdot \frac{(u-u')\left(u'\frac{dv}{dx} - u\frac{dv'}{dx}\right) - (v-v')\left(u'\frac{du}{dx} - u\frac{du'}{dx}\right)}{(u-u')\left(\frac{dv}{dx} - \frac{dv'}{dx}\right) - (v-v')\left(\frac{du}{dx} - \frac{du'}{dx}\right)} + \frac{uv'-u'v}{u-u'};$$

woraus ersichtlich wird, dass es zunächst auf die Berechnung von u, v, u', v', $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{du'}{dx}$, $\frac{dv'}{dx}$ ankommt. Die Werthe von u, v und u', v' sind aus den Gleichungen (2) und (3) herzuleiten, und da aus den Gleichungen (4) hervorgeht, dass sich die Ausdrücke von L', M' von jenen L, M nur dadurch unterscheiden, dass a', b' an der Stelle von a, b steht, so werden sich auch die Ausdrücke für u', v', $\frac{du'}{dx}$, $\frac{dv'}{dx}$ aus jenen für u, v, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ einfach dadurch ableiten lassen, dass man a', b' an die Stelle von a, b treten lässt, so dass man also nur die ersteren vier Grössen u, v, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ zu berechnen hat, wozu wir nun übergehen. Eliminirt man aus den Gleichungen (2) einmal v und einmal u, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$(1+L^2)u^2 + 2LMu + M^2 - r^2 = 0,$$
$$(1+L^2)v^2 + 2Mv + M^2 - r^2L^2 = 0.$$

Die erste Gleichung gibt die zwei Abscissen der beiden Durchschnittspunkte der Geraden (xy), (ab) mit dem gegebenen Kreis. Da aber der eine Durchschnittspunkt (xy) ist, so muss die erste der vorstehenden Gleichungen identisch erfüllt werden, wenn man x an die Stelle von u setzt. Aus gleichen Gründen muss auch die zweite Gleichung identisch erfüllt werden, wenn man y an die Stelle von v setzt. Man erhält hierdurch:

$$(1+L^2)x^2 + 2LMx + M^2 - r^2 = 0,$$
$$(1+L^2)y^2 - 2My + M^2 - r^2L^2 = 0.$$

Zieht man diese zwei Gleichungen der Ordnung nach von den zwei vorhergehenden ab und zerlegt in Factoren, so ergibt sich:

$$(u-x)\{(1+L^2)(u+x)+2LM\}=0,$$
$$(v-y)\{(1+L^2)(v+y)-2M\}\;\;=0;$$

da aber der Voraussetzung gemäss u und v von x und y verschieden sind, so können die vorstehenden Gleichungen nur erfüllt werden, wenn

$$(1+L^2)(u+x)+2LM=0, \quad (1+L^2)(v+y)-2M=0,$$

und hieraus folgt:

$$u+x=-\frac{2LM}{1+L^2}=-\frac{2(y-b)(bx-ay)}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$
$$v+y=\;\;\frac{2M}{1+L^2}=\;\;\frac{2(x-a)(bx-ay)}{(x-a)^2+(y-b)^2};$$

mithin:

$$u=-\frac{x\{(x-a)^2+(y-b)^2\}+2(y-b)(bx-ay)}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$
$$v=-\frac{y\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-2(x-a)(bx-ay)}{(x-a)^2+(y-b)^2};$$

oder auch, weil

$$-x\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-2(y-b)(bx-ay)$$
$$=a\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(x+a)\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-2(y-b)\{b(x-a)-a(y-b)\}$$
$$=a\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(x-a)\{x^2-a^2+2b(y-b)\}-(y-b)^2(x-a)$$
$$=a\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(x-a)(r^2-a^2-b^2)$$

und

$$-y\{(x-a)^2+(y-b)^2\}+2(x-a)(bx-ay)$$
$$=b\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(y+b)\{(x-a)^2+(y-b)^2\}+2(x-a)\{b(x-a)-a(y-b)\}$$
$$=b\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(y-b)\{y^2-b^2+2a(x-a)\}-(x-a)^2(y-b)$$
$$=b\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(y-b)(r^2-a^2-b^2)$$

ist:

$$(10)\qquad\left\{\begin{aligned} u&=\frac{a\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(x-a)(r^2-a^2-b^2)}{(x-a)^2+(y-b)^2},\\ v&=\frac{b\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(y-b)(r^2-a^2-b^2)}{(x-a)^2+(y-b)^2}.\end{aligned}\right.$$

Nimmt man jetzt Rücksicht auf die am Eingange dieses Paragraphen in Betreff der Ableitung von u', v' aus u, v gemachte Bemerkung, so hat man unmittelbar:

$$(11)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{a'\{(x-a')^2+(y-b')^2\}-(x-a')(r^2-a'^2-b'^2)}{(x-a')^2+(y-b')^2}, \\[2ex] v' = \dfrac{b'\{(x-a')^2+(y-b')^2\}-(y-b')(r^2-a'^2-b'^2)}{(x-a')^2+(y-b')^2}. \end{cases}$$

§. 4.

Weil nach der Gleichung (1)

$$(12)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ist, so wird:

$$\frac{d}{dx}\{(x-a)^2+(y-b)^2\} = \frac{2(bx-ay)}{y}.$$

$$\frac{d}{dx}\,(\text{Zähler von } u) = \frac{2a(bx-ay)-y(r^2-a^2-b^2)}{y},$$

$$\frac{d}{dx}\,(\text{Zähler von } v) = \frac{2b(bx-ay)+x(r^2-a^2-b^2)}{y},$$

und hiermit nach den gewöhnlichen Regeln der Differenziation der Zähler von $\dfrac{du}{dx}$

$$\begin{aligned}
&= \{x-a)^2+(y-b)^2\}\frac{2a(bx-ay)-y(r^2-a^2-b^2)}{y} \\
&\quad -[a\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(x-a)(r^2-a^2-b^2)]\frac{2(bx-ay)}{y} \\
&= -(r^2-a^2-b^2)\frac{y\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-2(x-a)(bx-ay)}{y} \\
&= (r^2-a^2-b^2)\frac{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}v}{y};
\end{aligned}$$

der Zähler von $\dfrac{dv}{dx}$

$$\begin{aligned}
&= \{(x-a)^2+(y-b)^2\}\frac{2b(bx-ay)+x(r^2-a^2-b^2)}{y} \\
&\quad -[b\{(x-a)^2+(y-b)^2\}-(y-b)(r^2-a^2-b^2)]\frac{2(bx-ay)}{y} \\
&= (r^2-a^2-b^2)\frac{x\{(x-a)^2+(y-b)^2\}+2(y-b)(bx-ay)}{y} \\
&= -(r^2-a^2-b^2)\frac{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}u}{y}.
\end{aligned}$$

Da endlich $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dx}$ die zweite Potenz von $(x-a)^2+(y-b)^2$ zum gemeinschaftlichen Nenner haben, so wird:

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{r^2-a^2-b^2}{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}y}v, \\ \frac{dv}{dx} = -\frac{r^2-a^2-b^2}{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}y}u. \end{cases}$$

Wird auch hier wieder die Bemerkung am Eingange des §. 3. berücksichtiget, so erhält man:

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{du'}{dx} = \frac{r^2-a'^2-b'^2}{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}y}v, \\ \frac{dv'}{dx} = -\frac{r^2-a'^2-b'^2}{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}y}u. \end{cases}$$

§. 5.

Wenn wir zur Vereinfachung der Rechnung

$$(15)\quad h=\frac{r^2-a^2-b^2}{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}y}, \quad h'=\frac{r^2-a'^2-b'^2}{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}y}$$

setzen, so wird mit Rücksicht auf die Bemerkung des §.3. in Bezug auf die Ableitung von $\frac{du'}{dx}$, $\frac{dv'}{dx}$ aus $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$:

$$(16)\quad \frac{du}{dx}=hv, \quad \frac{dv}{dx}=-hu, \quad \frac{du'}{dx}=h'v', \quad \frac{dv'}{dx}=-h'u';$$

und diese Werthe wollen wir nun in die Gleichungen (9) substituiren. Weil

$$u'\frac{dv}{dx}-u\frac{dv'}{dx}=-(h-h')uu', \quad u'\frac{du}{dx}-u\frac{du'}{dx}=hu'v-h'uv',$$

ferner

$$\frac{dv}{dx}-\frac{dv'}{dx}=-h(u-u'), \quad \frac{du}{dx}-\frac{du'}{dx}=h(v-v');$$

so wird der Zähler von **x** gleich

$$-(h-h')uu'(u-u')-(v-v')(hu'v-h'uv').$$

oder wenn man die Glieder mit hu' und die Glieder mit $h'u$, je für sich, zusammenfasst und dabei bedenkt, dass $u^2+v^2=u'^2+v'^2=r^2$ ist, auch gleich

$$-(hu'+h'u)(r^2-uu'-vv').$$

Der Nenner von $\mathbf{x}$ hingegen wird gleich

$$-(hu-h'u')(u-u')-(hv-h'v')(v-v'),$$

oder, wenn man die Glieder mit dem Factor h und jene mit dem Factor h', je für sich, zusammenfasst und wieder mittelst der Relation $u^2+v^2=u'^2+v'^2=r^2$ reducirt, auch gleich

$$-(h+h')(r^2-uu'-vv');$$

mithin wird

$$\mathbf{x}=\frac{hu'+h'u}{h+h'}. \tag{17}$$

Wird dieser Werth bei der zweiten der Gleichungen (9) berücksichtiget, so gibt dieselbe:

$$\mathbf{y}=\frac{(hu'+h'u)(v-v')+(h+h')(uv'-u'v)}{(h+h')(u-u')};$$

der Zähler dieses Bruches kann jedoch leicht, wenn man die Glieder mit u und u' je für sich zusammenfasst, auf die Form

$$(hv'+h'v)(u-u')$$

gebracht werden, so dass

$$\mathbf{y}=\frac{hv'+h'v}{h+h'} \tag{18}$$

wird.

§. 6.

Um aus den Gleichungen (17) und (18), welche nunmehr an die Stelle der Gleichungen (9) treten, die Werthe von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ als Functionen von x und y zu erhalten, ist nur nöthig, für u und v die Werthe aus (10), für u' und v' die Werthe aus (11), für h und h' die Werthe aus (15) zu setzen. Nehmen wir zu besserer Uebersicht

$$t^2=(x-a)^2+(y-b)^2,\quad t'^2=(x-a')^2+(y-b')^2, \tag{19}$$

so wird:

$$hu' + h'u = \frac{r^2 - a^2 - b^2}{yt^2} \frac{a't'^2 - (x - a')(r^2 - a'^2 - b'^2)}{t'^2}$$

$$+ \frac{r^2 - a'^2 - b'^2}{yt'^2} \frac{at^2 - (x - a)(r^2 - a^2 - b^2)}{t^2}$$

$$= \frac{a't'^2(r^2 - a^2 - b^2) + at^2(r^2 - a'^2 - b'^2) - (r^2 - a^2 - b^2)(r^2 - a'^2 - b'^2)(2x - a - a')}{yt^2t'^2},$$

$$hv' + h'v = \frac{r^2 - a^2 - b^2}{yt^2} \frac{b't'^2 - (y - b)(r^2 - a'^2 - b'^2)}{t'^2}$$

$$+ \frac{r^2 - a'^2 - b'^2}{yt'^2} \frac{bt^2 - (y - b)(r^2 - a^2 - b^2)}{t^2}$$

$$= \frac{b't'^2(r^2 - a^2 - b^2) + bt^2(r^2 - a'^2 - b'^2) - (r^2 - a^2 - b^2)(r^2 - a'^2 - b'^2)(2y - b - b')}{yt^2t'^2}$$

und

$$h + h' = \frac{t'^2(r^2 - a^2 - b^2) + t^2(r^2 - a'^2 - b'^2)}{yt^2t'^2};$$

folglich ist:

(20) $\mathbf{x} =$

$$\frac{at^2(r^2 - a'^2 - b'^2) + a't'^2(r^2 - a^2 - b^2) - (r^2 - a^2 - b^2)(r^2 - a'^2 - b'^2)(2x - a - a')}{t^2(r^2 - a'^2 - b'^2) + t'^2(r^2 - a^2 - b^2)},$$

$\mathbf{y} =$

$$\frac{bt^2(r^2 - a'^2 - b'^2) + b't'^2(r^2 - a^2 - b^2) - (r^2 - a^2 - b^2)(r^2 - a'^2 - b'^2)(2y - b - b')}{t^2(r^2 - a'^2 - b'^2) + t'^2(r^2 - a^2 - b^2)};$$

in welchen Ausdrücken man sich für t^2, t'^2 die Werthe aus (19) zu denken hat.

§. 7.

Wenn man in den zweiten Theilen der Gleichungen (19) entwickelt und alsdann berücksichtiget, dass $x^2 + y^2 = r^2$ ist, so wird:

(21)

$$t^2 = r^2 + a^2 + b^2 - 2ax - 2by, \quad t'^2 = r^2 + a'^2 + b'^2 - 2a'x - 2b'y,$$

und wenn man sich diese Werthe für t^2 und t'^2 in die Gleichungen (20) eingeführt denkt, so wird einleuchtend, dass diese Gleichungen in Bezug auf x und y vom ersten Grade sind. Indem



wir beabsichtigen, Zähler und Nenner in den zweiten Theilen dieser Gleichungen in Bezug auf die Coordinaten x und y zu ordnen, machen wir folgende, zur Vereinfachung der Transformation dienliche Vorbereitung. Es ist identisch:

$$(a^2+b^2)(r^2-a'^2-b'^2)=-(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+r^2(r^2-a'^2-b'^2),$$
$$(a'^2+b'^2)(r^2-a^2-b^2)=-(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+r^2(r^2-a^2-b^2);$$

wird die erste Gleichung mit a, die zweite mit a' multiplicirt, und werden alsdann beide Gleichungen addirt, wird ferner dasselbe Manöver mittelst der Multiplicatoren b und b' ausgeführt, so erhält man:

(22)

$$a(a^2+b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+a'(a'^2+b'^2)(r^2-a^2-b^2)$$
$$=-(a+a')(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\},$$
$$b(a^2+b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+b'(a'^2+b'^2)(r^2-a^2-b^2)$$
$$=-(b+b')(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\};$$

hiermit wird der Zähler von **x**

$$\begin{aligned}
= \quad & r^2\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}+a(a^2+b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\\
& \qquad +a'(a'^2+b'^2)(r^2-a^2-b^2)\\
& -2a(ax+by)(r^2-a'^2-b'^2)-2a'(a'x+b'y)(r^2-a^2-b^2)\\
& -(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(2x-a-a')\\
= \quad & 2r^2\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}\\
& -2x\{a^2(r^2-a'^2-b'^2)+a'^2(r^2-a^2-b^2)+(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\}\\
& -2y\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\}\\
= \quad & 2r^2\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}\\
& -2x\{(r^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+a'^2(r^2-a^2-b^2)\}\\
& -2y\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\},
\end{aligned}$$

und der Zähler von **y**

$$\begin{aligned}
= \quad & r^2\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}+b(a^2+b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\\
& \qquad +b'(a'^2+b'^2)(r^2-a^2-b^2)\\
& -2b(ax+by)(r^2-a'^2-b'^2)-2b'(a'x+b'y)(r^2-a^2-b^2)\\
& -(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(2y-b-b')\\
= \quad & 2r^2\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}\\
& -2y\{b^2(r^2-a'^2-b'^2)+b'^2(r^2-a^2-b^2)+(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\}\\
& -2x\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\}\\
= \quad & 2r^2\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}\\
& -2y\{(r^2-a^2)(r^2-a'^2-b'^2)+b'^2(r^2-a^2-b^2)\}\\
& -2x\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2).
\end{aligned}$$



Der **x** und **y** gemeinschaftliche Nenner wird

$$= (r^2-a'^2-b'^2)(r^2+a^2+b^2-2ax-2by)$$
$$+ (r^2-a^2-b^2)(r^2+a'^2+b'^2-2a'x-2b'y)$$
$$= \{(r^2-a'^2-b'^2)(r^2+a^2+b^2)+(r^2-a^2-b^2)(r^2+a'^2+b'^2)\}$$
$$-2x\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}$$
$$-2y\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}$$
$$= 2\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}$$
$$-2x\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}$$
$$-2y\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\},$$

und man hat daher endlich:

(23)

$$\mathbf{x} = \frac{\left\{\begin{array}{c} r^2\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\} \\ -\{(r^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+a'^2(r^2-a^2-b^2)\}x \\ -\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\}y \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c} \{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}-\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}x \\ -\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}y \end{array}\right\}},$$

$$\mathbf{y} = \frac{\left\{\begin{array}{c} r^2\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\} \\ -\{(r^2-a^2)(r^2-a'^2-b'^2)+b'^2(r^2-a^2-b^2)\}y \\ -\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\}x \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c} \{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}-\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}x \\ -\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}y \end{array}\right\}}.$$

§. 8.

Diese Gleichungen (23) treten an die Stelle der Gleichungen (20) oder schliesslich an die Stelle der Gleichungen (9), und es ist daher, um zur Gleichung der gesuchten einhüllenden Kurve zu gelangen, jetzt nothwendig, aus diesen in Verbindung mit der Gleichung

$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2$$

die laufenden Coordinaten x, y zu eliminiren. Diese Elimination soll im Folgenden einfach dadurch bewerkstelliget werden, dass wir x und y aus den Gleichungen (23) bestimmen und die gefundenen Werthe in die Gleichung (1) substituiren. Die resultirende

Gleichung wird ausser den Coordinaten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ nur noch die Constanten r, a, b, a', b' enthalten und als die verlangte Gleichung der einhüllenden Kurve alle Aufschlüsse über die Natur, die Lage und die Dimensionen dieser Kurve geben. — Werden die Gleichungen (23) in Bezug auf die Coordinaten x, y geordnet, so erhalten dieselben, wie ohne Weiteres einleuchtet, die Form:

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l}(A_0+B_0\mathbf{x})+(A_1+B_1\mathbf{x})x+(A_2+B_2\mathbf{x})y=0,\\ (A_0'+B_0'\mathbf{y})+(A_1'+B_1'\mathbf{y})x+(A_2'+B_2'\mathbf{y})y=0;\end{array}\right.$$

und zwar ist:

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{ll}A_0 &= -r^2\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\},\\ B_0 &= \quad r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2),\\ A_1 &= \quad (r^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+a'^2(r^2-a^2-b^2),\\ B_1 &= -\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\},\\ A_2 &= \quad ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2),\\ B_2 &= -\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\},\\ A_0' &= -r^2\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\},\\ B_0' &= \quad r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2),\\ A_1' &= \quad ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2),\\ B_1' &= -\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\},\\ A_2' &= \quad (r^2-a^2)(r^2-a'^2-b'^2)+b'^2(r^2-a^2-b^2),\\ B_2' &= -\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\};\end{array}\right.$$

woraus man die Relationen entnimmt:

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{ll}A_0=r^2B_1=r^2B_1', & B_0=B_0',\\ A_2=A_1', & B_1=B_1',\\ A_0'=r^2B_2=r^2B_2', & B_2=B_2'.\end{array}\right.$$

Multiplicirt man, in der Absicht y zu eliminiren, die erste der Gleichungen (24) mit $A_2'+B_2'\mathbf{y}$, die zweite mit $A_2+B_2\mathbf{x}$ und subtrahirt die Producte, multiplicirt man ferner, in der Absicht x zu eliminiren, die erste Gleichung in (24) mit $A_1'+B_1'\mathbf{y}$, die zweite mit $A_1+B_1\mathbf{x}$ und subtrahirt die Producte ebenfalls, so ergeben sich sofort zur Bestimmung von x und y folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{l}\{(A_0+B_0\mathbf{x})(A_2'+B_2'\mathbf{y})-(A_0'+B_0'\mathbf{y})(A_2+B_2\mathbf{x})\}\\ \qquad +\{(A_1+B_1\mathbf{x})(A_2'+B_2'\mathbf{y})-(A_1'+B_1'\mathbf{y})(A_2+B_2\mathbf{x})\}x=0,\\ \{(A_0+B_0\mathbf{x})(A_1'+B_1'\mathbf{y})-(A_0'+B_0'\mathbf{y})(A_1+B_1\mathbf{x})\}\\ \qquad +\{(A_2+B_2\mathbf{x})(A_1'+B_1'\mathbf{y})-(A_2'+B_2'\mathbf{y})(A_1+B_1\mathbf{x})\}y=0;\end{array}$$

welche, wenn man die in den Klammern enthaltenen Ausdrücke entwickelt, in Bezug auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ordnet und dabei berücksichtiget, dass vermöge der Relationen (26)

$$B_0B_2'-B_0'B_2=0,\quad B_0B_1'-B_0'B_1=0,\quad B_1B_2'-B_1'B_2=0,$$
$$B_2B_1'-B_2'B_1=0$$

ist, in die beiden folgenden übergehen:

$$\{(A_0A_2'-A_0'A_2)+(B_0A_2'-B_2A_0')\mathbf{x}+(A_0B_2'-A_2B_0')\mathbf{y}\}$$
$$+\{(A_1A_2'-A_2A_1')+(B_1A_2'-B_2A_1')\mathbf{x}+(A_1B_2'-A_2B_1')\mathbf{y}\}x=0,$$

$$\{(A_0A_1'-A_1A_0')+(B_0A_1'-B_1A_0')\mathbf{x}+(A_0B_1'-A_1B_0')\mathbf{y}\}$$
$$-\{(A_1A_2'-A_2A_1')+(B_1A_2'-B_2A_1')\mathbf{x}+(A_1B_2'-A_2B_1')\mathbf{y}\}y=0;$$

und setzt man endlich zur Abkürzung:

$$(27)$$
$$\mathfrak{A}=A_0A_2'-A_2A_0',\quad \mathfrak{A}'=A_0A_1'-A_1A_0',\quad \mathfrak{A}_1=A_1A_2'-A_2A_1',$$
$$\mathfrak{B}=B_0A_2'-B_2A_0',\quad \mathfrak{B}'=B_0A_1'-B_1A_0',\quad \mathfrak{B}_1=B_1A_2'-B_2A_1',$$
$$\mathfrak{C}=A_0B_2'-A_2B_0',\quad \mathfrak{C}'=A_0B_1'-A_1B_0',\quad \mathfrak{C}_1=A_1B_2'-A_2B_1';$$

so geben die vorhergehenden Gleichungen:

$$x=-\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathbf{x}+\mathfrak{C}\mathbf{y}}{\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1\mathbf{x}+\mathfrak{C}_1\mathbf{y}},\quad y=\frac{\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'\mathbf{x}+\mathfrak{C}'\mathbf{y}}{\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1\mathbf{x}+\mathfrak{C}_1\mathbf{y}};$$

und man hat durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung

$$(1)\qquad x^2+y^2=r^2$$

als Gleichung der gesuchten einhüllenden Kurve:

$$\left\{\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathbf{x}+\mathfrak{C}\mathbf{y}}{\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1\mathbf{x}+\mathfrak{C}_1\mathbf{y}}\right\}^2+\left\{\frac{\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'\mathbf{x}+\mathfrak{C}'\mathbf{y}}{\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1\mathbf{x}+\mathfrak{C}_1\mathbf{y}}\right\}^2=r^2$$

oder

$$(28)\quad (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathbf{x}+\mathfrak{C}\mathbf{y})^2+(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'\mathbf{x}+\mathfrak{C}'\mathbf{y})^2=r^2(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1\mathbf{x}+\mathfrak{C}_1\mathbf{y})^2.$$

Da diese Gleichung in Bezug auf die Coordinaten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ vom zweiten Grade ist, so schliesst man daraus zunächst, dass die gesuchte einhüllende Kurve ein Kegelschnitt ist. Um weiter über die besondere Natur dieses Kegelschnitts, über die Richtung und Grösse seiner Hauptaxen entscheiden zu können, ist die Berechnung der mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, u. s. w. bezeichneten Grössen mittelst der Gleichungen (27) und (25) nothwendig.



§. 9.

Durch Anwendung der Relationen (26) auf die Gleichungen (27) überzeugt man sich mit Leichtigkeit, dass

$$\mathfrak{A} = r^2\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{A}' = -r^2\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{B}' = -\mathfrak{C} \tag{29}$$

ist; man hat daher von den neun Grössen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}', \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ nur die sechs $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ zu rechnen, um sodann die übrigen drei unmittelbar hinschreiben zu können.

Die Werthe aus (25) in dem Ausdruck für $\mathfrak{B}$ in (27) substituirt geben unmittelbar:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = & -r^2\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}^2 \\ & +\{(r^2-a^2)(r^2-a'^2-b'^2)+b'^2(r^2-a^2-b^2)\}\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\} \\ = & -2bb'r^2(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2) \\ & -(r^2-a^2-b^2)[r^2b'^2(r^2-a^2-b^2)-b'^2\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}] \\ & -(r^2-a'^2-b'^2)[r^2b^2(r^2-a'^2-b'^2)-(r^2-a^2)\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}],\end{aligned}$$

oder weil

$$r^2b'^2(r^2-a^2-b^2)-b'^2\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\} = -b'^2(a^2+b^2)(r^2-a'^2-b'^2),$$

$$\begin{aligned}r^2b^2(r^2-a'^2-b'^2)-(r^2-a^2)\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\} \\ = (r^2-a^2-b^2)\{a^2(a'^2+b'^2)-r^4\}\end{aligned}$$

ist,

$$\mathfrak{B} = (r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{-2bb'r^2+b'^2(a^2+b^2)-a^2(a'^2+b'^2)+r^4\},$$

oder, wie man nun leicht findet:

$$\mathfrak{B} = (r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(r^2-aa'-bb')(r^2+aa'-bb').$$

Ebenso wird:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = \; & r^2\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\} \\ & -\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\}\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\} \\ = \; & r^2(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(ab'+a'b) \\ & +(r^2-a^2-b^2)a'b'[r^2(r^2-a^2-b^2)-\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}] \\ & +(r^2-a'^2-b'^2)ab[r^2(r^2-a'^2-b'^2)-\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}],\end{aligned}$$

oder weil

$$r^2(r^2-a^2-b^2)-\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}=-(a^2+b^2)(r^2-a'^2-b'^2),$$
$$r^2(r^2-a'^2-b'^2)-\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}=-(a'^2+b'^2)(r^2-a^2-b^2)$$

ist,

$$\mathfrak{C}=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{r^2(ab'+a'b)-a'b'(a^2+b^2)-ab(a'^2+b'^2)\},$$

oder auch:

$$\mathfrak{C}=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(r^2-aa'-bb')(ab'+a'b).$$

Ferner findet man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}'= &\; r^2\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}\\ &-\{(r^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+a'^2(r^2-a^2-b^2)\}\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}\\ = &\; 2aa'r^2(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\\ &+(r^2-a^2-b^2)[a'^2r^2(r^2-a^2-b^2)-a'^2\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}]\\ &+(r^2-a'^2-b'^2)[a^2r^2(r^2-a'^2-b'^2)-(r^2-b^2)\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}]\end{aligned}$$

oder weil

$$a'^2r^2(r^2-a^2-b^2)-a'^2\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}=-(r^2-a'^2-b'^2)a'^2(a^2+b^2),$$
$$a^2r^2(r^2-a'^2-b'^2)-(r^2-b^2)\{r^4-(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)\}=(r^2-a^2-b^2)\{b^2(a'^2+b'^2)-r^4\}$$

ist, so wird

$$\mathfrak{C}'=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{2aa'r^2-a'^2(a^2+b^2)+b^2(a'^2+b'^2)-r^4\}$$

oder auch, wie man sich alsbald überzeugt:

$$\mathfrak{C}'=-(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(r^2-aa'-bb')(r^2-aa'+bb').$$

Wir gehen nun über zur Berechnung der Constanten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$. Zunächst erhält man:

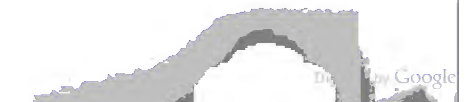
$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1= &\; \{(r^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)+a'^2(r^2-a^2-b^2)\}\{(r^2-a^2)(r^2-a'^2-b'^2)\\ &\qquad+b'^2(r^2-a^2-b^2)\}\\ &-\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\}^2\\ = &\; (r^2-a'^2-b'^2)^2\{(r^2-a^2)(r^2-b^2)-a^2b^2\}\\ &+(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{(r^2-b^2)b'^2+(r^2-a^2)a'^2-2aa'bb'\}\end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1= &\; r^2(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)^2\\ &+(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{(r^2-b^2)b'^2+(r^2-a^2)a'^2-2aa'bb'\}\\ = &\; (r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{r^2(r^2-a'^2-b'^2)+r^2(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2\}\end{aligned}$$

oder

$$\mathfrak{A}_1=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{r^4-(aa'+bb')^2\}.$$



Ebenso ist

$$\mathfrak{B}_1 = -\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}\{(r^2-a^2)(r^2-a'^2-b'^2) + b'^2(r^2-a^2-b^2)\}$$
$$+\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\}$$
$$= (r^2-a'^2-b'^2)^2\{-a(r^2-a^2)+ab^2\}$$
$$-(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{ab'^2+a'(r^2-a^2)-a'bb'-abb'\}$$
$$= -(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{a(r^2-a'^2-b'^2)+ab'^2 + a'(r^2-a^2)-a'bb'-abb'\},$$

und, wie man mit Leichtigkeit findet:

$$\mathfrak{B}_1 = -(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(r^2-aa'-bb')(a+a').$$

Endlich ist

$$\mathfrak{C}_1 = -\{b(r^2-a'^2-b'^2)+b'(r^2-a^2-b^2)\}\{(r^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2) + a'^2(r^2-a^2-b^2)\}$$
$$+\{a(r^2-a'^2-b'^2)+a'(r^2-a^2-b^2)\}\{ab(r^2-a'^2-b'^2)+a'b'(r^2-a^2-b^2)\}$$
$$= (r^2-a'^2-b'^2)\{-b(r^2-b^2)+a^2b\}$$
$$-(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{a'b^2+b'(r^2-b^2)-aa'b-aa'b\}$$
$$= -(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)\{b(r^2-a'^2-b'^2)+a'^2b+b'(r^2-b^2) - aa'b'-aa'b\},$$

oder, wie man sich ebenfalls ohne Schwierigkeit überzeugt:

$$\mathfrak{C}_1 = -(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(r^2-aa'-bb')(b+b').$$

Hiermit sind die sechs Constanten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ berechnet und wir haben mit Rücksicht auf die Relationen (29), indem wir zu besserer Uebersicht

$$H = (r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b'^2)(r^2-aa'-bb')$$

setzen, folgende Zusammenstellung:

$$(30)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -Hr^2(a+a'), \\ \mathfrak{B} = H(r^2+aa'-bb'), \\ \mathfrak{C} = H(ab'+a'b), \\ \mathfrak{A}' = Hr^2(b+b'), \\ \mathfrak{B}' = -H(ab'+a'b), \\ \mathfrak{C}' = -H(r^2-aa'+bb'), \\ \mathfrak{A}_1 = H(r^2+aa'+bb'), \\ \mathfrak{B}_1 = -H(a+a'), \\ \mathfrak{C}_1 = -H(b+b'). \end{cases}$$



§. 10.

Die Werthe der Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, u. s. w. wären nun in die Gleichung (28) des gesuchten einhüllenden Kegelschnittes zu substituiren; da aber diese Constanten sämmtlich den Factor H gemeinschaftlich haben, so sieht man, dass nach geschehener Substitution die genannte Gleichung den Factor H^2 in beiden Theilen enthalten wird, durch welchen man also abkürzen kann. Wir haben ferner, um der Rechnung die Vortheile einer symmetrischen Darstellung zu erhalten, bisher die Richtung der Coordinatenaxen ganz unabhängig von der Lage der beiden Punkte (ab) und $(a'b')$ gelassen; es ist jedoch, ohne der Allgemeinheit der Untersuchung irgendwie zu schaden, immerhin erlaubt, eine der beiden Axen, z. B. die Axe der x, parallel mit der Verbindungslinie der beiden festen Punkte (ab) und $(a'b')$ anzunehmen; hierdurch wird $b=b'$. Wir wollen also von nun an unter $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ dasjenige verstehen, was aus den Werthen in (30) wird, wenn man erstens allenthalben den gemeinschaftlichen Factor H weglässt, und zweitens $b=b'$ setzt. Hierdurch wird:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= -r^2(a+a'),\\
\mathfrak{B} &= r^2+aa'-b^2,\\
\mathfrak{C} &= b(a+a'),\\
\mathfrak{A}' &= 2br^2,\\
\mathfrak{B}' &= -b(a+a'),\\
\mathfrak{C}' &= -(r^2-aa'+b^2),\\
\mathfrak{A}_1 &= r^2+aa'+b^2,\\
\mathfrak{B}_1 &= -(a+a'),\\
\mathfrak{C}_1 &= -2b;
\end{aligned}\right.$$

und die Gleichung des einhüllenden Kegelschnittes ist nach wie vor:

$$(28)\quad (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathbf{x}+\mathfrak{C}\mathbf{y})^2+(\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'\mathbf{x}+\mathfrak{C}'\mathbf{y})^2=r^2(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1\mathbf{x}+\mathfrak{C}_1\mathbf{y})^2,$$

oder wenn man entwickelt, in Bezug auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ordnet und dabei berücksichtiget, dass, wie man sich mittelst der Werthe aus (31) sogleich überzeugt:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'-r^2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1=0$$

ist, dass also die Glieder in $\mathbf{xy}$ verschwinden:

(32)

$$(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}'^2-r^2\mathfrak{A}_1{}^2)+(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'-r^2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)2\mathbf{x}+(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}'^2-r^2\mathfrak{B}_1{}^2)\mathbf{x}^2$$
$$+(\mathfrak{A}\mathfrak{C}+\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'-r^2\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1)2\mathbf{y}+(\mathfrak{C}^2+\mathfrak{C}'^2-r^2\mathfrak{C}_1{}^2)\mathbf{y}^2=0,$$

wobei die constanten Coefficienten durch Substitution aus den Gleichungen (31) noch zu berechnen sind. Um dieses auf dem bequemsten Wege zu bewerkstelligen, d. h. um am Schnellsten zu den einfachsten Formen zu gelangen, welche diese Ausdrücke annehmen können, verlassen wir die Ordnung der Aufeinanderfolge und beginnen mit dem Coefficienten von $\mathbf{x}^2$. Es ist

(33)

$$\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}'^2-r^2\mathfrak{B}_1{}^2=(r^2+aa'-b^2)^2+b^2(a+a')^2-r^2(a+a')^2,$$

oder wenn man bezüglich r^2-b^2 die Entwickelung des ersten Gliedes mit den beiden folgenden ordnet:

(34)

$$\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}'^2-r^2\mathfrak{B}_1{}^2=(r^2-b^2)^2-(a^2+a'^2)(r^2-b^2)+a^2a'^2$$
$$=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2).$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit von der Richtigkeit der beiden folgenden Gleichungen:

(35)

$$r^2(a+a')^2-4b^2r^2+(r^2+aa'+b^2)^2=(a-a')^2b^2-(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2),$$

$$b^2(a+a')^2-4b^2r^2+(r^2-aa'+b^2)^2=(a-a')^2r^2+(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2);$$

denn aus unserer Transformation von (33) auf (34) folgt, dass

(36)

$$(r^2+aa'-b^2)^2+b^2(a+a')^2-r^2(a+a')^2=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2)^2$$

oder

$$(r^2+aa'+b^2)^2-4b^2(r^2+aa')+b^2(a+a')^2-r^2(a+a')^2$$
$$=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2),$$

$$(r^2-aa'+b^2)^2+4r^2(aa'-b^2)+b^2(a+a')^2-r^2(a+a')^2$$
$$=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2),$$

oder

$$(r^2+aa'+b^2)^2-4b^2r^2+b^2(a-a')^2-r^2(a+a')^2=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2),$$

$$(r^2-aa'+b^2)^2-4b^2r^2-r^2(a-a')^2+b^2(a+a')^2=(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2),$$

welche zwei Gleichungen durch schlichtes Transportiren der Glieder unmittelbar in die zu beweisenden übergehen. — Kraft dieser Gleichungen (35) wird:

$$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}'^2-r^2\mathfrak{A}_1{}^2=r^2\{(a-a')^2b^2-(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2)\},$$

$$\mathfrak{C}^2+\mathfrak{C}'^2-r^2\mathfrak{C}_1{}^2=\quad(a-a')^2r^2+(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2).$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'-r^2\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1=r^2\{-(a+a')(r^2+aa'-bb')+(a+a')(r^2+aa'+bb')$$
$$-(b+b')(ab'+a'b)\}$$
$$=r^2\{(a+a')2bb'+(b+b')(ab'+a'b)\}=0,$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C}+\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'-r^2\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1=-br^2(a+a')^2-2br^2(r^2-aa'+b^2)+2br^2(r^2+aa'+b^2)$$
$$=-br^2\{(a+a')^2-4aa'\}=-br^2(a-a')^2.$$

§. 11.

Die Gleichung (32) der gesuchten einhüllenden Kurve hat also die Form:

$$(37)\qquad -\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\mathfrak{x}^2+2\mathfrak{P}\mathfrak{y}+\mathfrak{Q}\mathfrak{y}^2=0,$$

wobei die Constanten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ folgende Werthe haben:

$$(38)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}= r^2\{(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2)-(a-a')^2b^2\},\\ \mathfrak{N}= (r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2),\\ \mathfrak{P}=-br^2(a-a')^2,\\ \mathfrak{Q}= (r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2)+(a-a')^2r^2 \end{cases}$$

oder

$$(39)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}= r^2\{\mathfrak{N}-(a-a')^2b^2\},\\ \mathfrak{N}= (r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2),\\ \mathfrak{P}=-br^2(a-a')^2,\\ \mathfrak{Q}= \mathfrak{N}+(a-a')^2r^2. \end{cases}$$

Die Gleichung (37) der gesuchten einhüllenden Kurve kann endlich noch durch die Annahmen

$$(40)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}=0,\\ \mathfrak{y}=-\dfrac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{Q}}, \end{cases}$$

$$(41) \qquad \begin{cases} A^2 = \dfrac{\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{M}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{N}\mathfrak{Q}}, \\[2ex] B^2 = \dfrac{\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{M}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^2} \end{cases}$$

auf die einfachste Form:

$$(42) \qquad \frac{x^2}{A^2} + \frac{(y - \mathfrak{y})^2}{B^2} = 1$$

gebracht werden, und unser letztes Rechnungsgeschäft wird nun darin bestehen, die Grössen $\mathfrak{y}$, A^2, B^2 unmittelbar durch die Constanten des Problems, nämlich r, a, a', b auszudrücken, um alsdann unverzüglich zu den aus unseren Gleichungen ableitbaren geometrischen Folgerungen überzugehen.

Aus den Gleichungen (39) erhält man:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{Q} = r^2 \{ \mathfrak{N}^2 + (r^2 - b^2)(a - a')^2 \mathfrak{N} - (a - a')^4 b^2 r^2 \},$$

mithin ist

$$\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{M}\mathfrak{Q} = r^2 \mathfrak{N} \{ \mathfrak{N} + (a - a')^2 (r^2 - b^2) \},$$

oder, da aus der Gleichung (36) mit Rücksicht auf die Bedeutung der Grösse $\mathfrak{N}$

$$(r^2 - aa' - b^2)^2 + 4aa'(r^2 - b^2) + b^2 (a + a')^2 - r^2 (a + a')^2 = \mathfrak{N},$$

$$(r^2 - aa' - bb')^2 + b^2 (a - a')^2 - r^2 (a - a')^2 = \mathfrak{N},$$

$$\mathfrak{N} + (a - a')^2 (r^2 - b^2) = (r^2 - aa' - b^2)^2$$

folgt,

$$\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{M}\mathfrak{Q} = r^2 \mathfrak{N} (r^2 - aa' - b^2)^2.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{N} + (a - a')^2 r^2 = (r^2 - aa' - b^2)^2 + (a - a')^2 b^2,$$

und in Folge dessen:

$$(43) \qquad \begin{cases} x = 0, \\[1ex] \mathfrak{y} = \dfrac{b r^2 (a - a')^2}{(r^2 - aa' - b^2)^2 + (a - a')^2 b^2}, \end{cases}$$

(44)

$$A^2 = r^2 \frac{(r^2 - aa' - b^2)^2}{(r^2 - aa' - b^2)^2 + (a - a')^2 b^2},$$

$$B^2 = r^2 \frac{(r^2 - aa' - b^2)^2}{\{ (r^2 - aa' - b^2)^2 + (a - a')^2 b^2 \}^2} (r^2 - a^2 - b^2)(r^2 - a'^2 - b^2).$$

§. 12.

Da die Gleichung der gesuchten einhüllenden Kurve vom zweiten Grade ist, so ist dieselbe ein Kegelschnitt, wie wir bereits in §. 8. bemerkt haben. Die Form der Gleichung (42) deutet auf eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem das Product

$$(45) \qquad (r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2),$$

welches in (44) in dem Ausdruck für B^2 erscheint, das Vorzeichen + oder — hat, oder je nachdem die beiden Factoren $r^2-a^2-b^2$, $r^2-a'^2-b^2$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Der Punkt $(\mathfrak{r}\mathfrak{y})$ ist der Mittelpunkt und A, B sind die Halbaxen des einhüllenden Kegelschnittes. — Ist gleichzeitig $r^2>a^2+b^2$, $r^2>a'^2+b^2$, oder ist gleichzeitig $r^2<a^2+b^2$, $r^2<a'^2+b^2$, so haben die beiden Factoren in (45) gleiche Vorzeichen. In diesem Falle liegen aber die beiden festen Punkte A und B beide zugleich innerhalb oder beide zugleich ausserhalb des gegebenen Kreises. Ist hingegen $r^2<a^2+b^2$ und $r^2>a'^2+b^2$ oder umgekehrt, so haben die Factoren in (45) ungleiche Vorzeichen, und einer der beiden Punkte A und B liegt innerhalb, der andere ausserhalb des gegebenen Kreises. Wir können daher sagen: L i e g e n d i e b e i d e n f e s t e n P u n k t e A u n d B b e i d e z u g l e i c h i n n e r h a l b o d e r b e i d e z u g l e i c h a u s s e r h a l b d e s g e g e b e n e n K r e i s e s, s o i s t d i e g e s u c h t e e i n h ü l l e n d e K u r v e e i n e E l l i p s e; l i e g t e i n e r d i e s e r P u n k t e i n n e r h a l b, d e r a n d e r e a u s s e r h a l b d e s g e g e b e n e n K r e i s e s, s o i s t d i e g e s u c h t e e i n h ü l l e n d e K u r v e e i n e H y p e r b e l. Aus der Form der Gleichung (42) erhellet ferner, dass die Richtung der ersten *) Hauptaxe A der gesuchten einhüllenden Ellipse oder Hyperbel stets mit der Richtung der Axe der $\mathfrak{x}$ oder, was dasselbe ist, mit der Verbindungslinie AB der beiden festen Punkte parallel ist. Der Mittelpunkt der einhüllenden Ellipse oder Hyperbel liegt stets in der Senkrechten, welche man vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises auf die Richtung der Verbindungslinie AB der zwei festen Punkte fällen kann, weil, wie man aus (43) ersieht, $\mathfrak{y}$ stets mit b dasselbe Vorzeichen hat.

---

*) Denn A ist immer reell, und für den Fall, dass auch B reell ist ist wegen

$$\frac{A^2}{B^2}=1+\frac{(a-a')^2 r^2}{(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2)}$$

stets $A>B$.

Bezeichnen wir für den Fall der Hyperbel den spitzen Winkel, welchen eine der beiden Asymptoten derselben mit der Axe der x einschliesst, mit α, so ist:

$$(46) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{-\mathrm{B}^2}}{\mathrm{A}} = \frac{\sqrt{-(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2)}}{\sqrt{(r^2-aa'-b^2)^2+(a-a')^2b^2}}.$$

Wir wollen nun über die Lage der zwei festen Punkte A und B verschiedene specielle Annahmen machen und untersuchen, von welcher besonderen Art die entsprechende einhüllende Ellipse oder Hyperbel ist.

§. 13.

Sind die beiden festen Punkte A und B gleichweit vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises entfernt, so hat man $a'=-a$ zu setzen, die einhüllende Kurve ist wegen der positiven Beschaffenheit des Productes (45), welches sich alsdann in ein vollständiges Quadrat verwandelt, stets eine Ellipse, die beiden Punkte A und B mögen innerhalb oder ausserhalb des gegebenen Kreises liegen und die Gleichungen (43) und (44) geben alsdann:

$$(47) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = 0, \\ \mathfrak{y} = \dfrac{4a^2br^2}{(r^2+a^2-b^2)^2+4a^2b^2}, \end{cases}$$

$$(48) \quad \begin{cases} \mathrm{A}^2 = r^2 \dfrac{(r^2+a^2-b^2)^2}{(r^2+a^2-b^2)^2+4a^2b^2}; \\ \mathrm{B}^2 = r^2 \dfrac{\{(r^2-b^2)^2-a^4\}^2}{\{(r^2+a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}^2}. \end{cases}$$

Ist in diesem Falle überdiess $b=0$, d. h. liegen die beiden festen Punkte A und B gleichweit vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises, und geht die Verbindungslinie AB durch diesen Punkt, so wird $\mathfrak{x}=0$, $\mathfrak{y}=0$, es fällt also der Mittelpunkt der einhüllenden Ellipse mit dem letzteren zusammen, und man hat ferner:

$$(49) \quad \mathrm{A}=r, \quad \mathrm{B}=r\frac{r^2-a^2}{r^2+a^2},$$

woraus man sieht, dass die grosse Halbaxe dem Radius des gegebenen Kreises gleich ist.

Setzt man in den allgemeinen Gleichungen (43) und (44) $b=0$, wodurch man voraussetzt, dass die Verbindungslinie AB

der beiden festen Punkte A und B durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht, während sonst ihre Lage willkürlich ist, so ergibt sich:

$$(50)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}=0, \\ \mathfrak{y}=0; \end{cases}$$

$$(51)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}=r, \\ \mathrm{B}=r\,\dfrac{\sqrt{(r^2-a^2)(r^2-a'^2)}}{r^2-aa'}, \end{cases}$$

so dass also auch in diesem Falle der Mittelpunkt der einhüllenden Ellipse oder Hyperbel mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises zusammenfällt und die erste Hauptaxe dem Radius dieses Kreises gleich ist. Die Kurve ist eine Ellipse, wenn gleichzeitig $r^2>a^2$, $r^2>a'^2$ oder gleichzeitig $r^2<a^2$, $r^2<a'^2$ ist, d. h. wenn A und B beide gleichzeitig innerhalb oder gleichzeitig ausserhalb des gegebenen Kreises liegen. Ist hingegen $r^2>a^2$ und $r^2<a'^2$ oder umgekehrt, so ist die einhüllende Kurve eine Hyperbel. Diese letztere kann sogar in ein System zweier paralleler Geraden übergehen, wenn a und a' gleiche Vorzeichen haben (d. h. wenn A und B beide auf derselben Seite des Kreismittelpunktes liegen) und $r^2=aa'$ ist. In der That gibt hierfür die Gleichung (42) zur Bezeichnung der einhüllenden Kurve:

$$(51^*)\qquad \mathrm{x}^2=r^2 \quad \text{oder} \quad \mathrm{x}=\pm r.$$

Setzt man in den Gleichungen (50) und (51) $a'=\infty$, womit man voraussetzt, dass von den zwei festen Punkten A und B, welche beide auf der Richtung eines Durchmessers des gegebenen Kreises liegen, der eine in der Unendlichkeit liegt, so wird:

$$(52)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}=0, \\ \mathfrak{y}=0; \end{cases}$$

$$(53)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}^2=r^2, \\ \mathrm{B}^2=-r^2\,\dfrac{r^2-a^2}{a^2}; \end{cases}$$

die Kurve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $r^2<a^2$ oder $r^2>a^2$, d. h. je nachdem der Punkt A ausserhalb oder innerhalb des gegebenen Kreises liegt.

Liegen beide Punkte A und B in unendlicher Entfernung, aber in gegebenen Richtungen, so hat man $a=\infty$, $a'=\infty$, $b=\infty$,

$\frac{b}{a}=t$, $\frac{b}{a'}=t'$ zu setzen, wo t und t' die trigonometrischen Tangenten der Winkel bezeichnen, welche die gegebenen festen Richtungen mit der Axe der $\mathbf{x}$ einschliessen. Da unter dieser Voraussetzung

$$\frac{(a-a')^2 b^2}{(r^2-aa'-b^2)^2}=\frac{(t-t')^2}{(1+tt')^2}, \quad \text{folglich} \quad \frac{(a-a')^2 b}{(r^2-aa'-b^2)^2}=0$$

wird, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man Zähler und Nenner in den ersten Theilen dieser Gleichungen durch b^4 dividirt, so wird $\eta=0$ und

$$\text{(54)} \qquad A^2=r^2\frac{1}{1+\frac{(t-t')^2}{(1+tt')^2}},$$

welche Resultate man erhält, wenn man in den Ausdrücken für η und A^2 Zähler und Nenner vorher durch $(r^2-aa'-b^2)^2$ dividirt. Ferner geben die allgemeinen Gleichungen (44):

$$\frac{A^2}{B^2}=\frac{(r^2-aa'-b^2)^2+(a-a')^2 b^2}{(r^2-a^2-b^2)(r^2-a'^2-b^2)};$$

geht man hiermit auf den vorliegenden Fall über, indem man vorher Zähler und Nenner durch b^4 dividirt, berücksichtigend, dass $\frac{a}{b}=\frac{1}{t}$, $\frac{a'}{b}=\frac{1}{t'}$ ist, so findet man:

$$\frac{A^2}{B^2}=\frac{(1+tt')^2+(t-t')^2}{(1+t^2)(1+t'^2)}=1;$$

die einhüllende Kurve ist also ein mit dem gegebenen concentrischer Kreis, dessen Radius durch die Gleichung (54) bestimmt wird. Bezeichnen α und α' die Winkel, welche die gegebenen Richtungen der Lage der beiden festen Punkte A und B mit der $\mathbf{x}$-Axe einschliessen, so ist nach dem oben Bemerkten $\operatorname{tg}\alpha=t$, $\operatorname{tg}\alpha'=t'$, und wenn ω den Winkel bezeichnet, welchen die gegebenen Richtungen unter sich einschliessen, so ist $\omega=\alpha-\alpha'$ und $\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha-\alpha')=\frac{t-t'}{1+tt'}$, folglich:

$$A^2=r^2\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\omega}=r^2\operatorname{Cos}^2\omega$$

oder

$$\text{(55)} \qquad A=r\operatorname{Cos}\omega,$$

der Radius A des einhüllenden Kreises ist also gleich der Projection des Radius r des gegebenen Kreises unter dem Winkel ω, welchen die gegebenen Richtungen der Lage der zwei festen Punkte A und B mit einander einschliessen.

Anmerkung. Hiermit ist das in §. 1. aufgestellte Problem nach der Methode der analytischen Geometrie gelöst, und die hierbei gewonnenen Resultate geben auch die Mittel an die Hand, den einer gegebenen Lage der zwei festen Punkte A und B entsprechenden Kegelschnitt zu construiren; wir werden in einem späteren Aufsatze diese Constructionen, so wie eine Anwendung derselben zur Lösung der Aufgabe mittheilen: In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, dessen drei Seiten durch drei gegebene Punkte gehen, eine Aufgabe, welche durch die bedeutenden Männer (Pappus, Castillon, Lagrange, Euler, Fuss, Lexell, ...), die sich mit ihrer Lösung beschäftigten, so wie nicht minder durch die einfache Erledigung, welche sie von dem jungen Neapolitaner Ottaiano gefunden hat, eine gewisse Berühmtheit erlangte. Nach unserer Methode ergeben sich im Allgemeinen zwei Dreiecke, welche den gegebenen Bedingungen genügen. — Auch das Problem des Alhazen, die Glanzpunkte des Kreises betreffend, kann mittelst dieser, ein Sehnensystem des Kreises einhüllenden Kegelschnitte gelöst werden.

Schliesslich sei bemerkt, dass wir die Lösung des analogen Problems von der Kugel, welches folgendermaassen lautet:

> Es sind im Raume drei feste Punkte A, B, C und eine Kugel gegeben. Verbindet man diese drei Punkte mit einem beliebigen Punkte M der Kugel, so werden diese Verbindungslinien, nöthigenfalls verlängert, die Kugeloberfläche noch in drei anderen Punkten A_1, B_1, C_1 schneiden und die Lage der durch diese Punkte A_1, B_1, C_1 gelegten Ebene ist für jeden Punkt M der Kugel eine bestimmte. Man soll die krumme Oberfläche ermitteln, welche diese Ebene beschreibt, während der Punkt M die Kugeloberfläche beschreibt,

zur Veröffentlichung in dieser Zeitschrift vorbereiten. Beide Probleme sind noch einer bedeutenden Verallgemeinerung insofern fähig, als man an die Stelle von Kreis und Kugel eine beliebige Linie oder Fläche der zweiten Ordnung treten lässt.

XXX.

Die logarithmische Linie als Curve der rückwirkenden Festigkeit, nachgewiesen im Anlauf des Pfeilers, der Säule und des Pyramidalkörpers mit quadratischem Querschnitt. *)

Von dem

Königlichen Sections-Ingenieur Herrn *v. Stokar*

zu Lichtenfels in Ober-Franken, Bayern.

Der Pfeileranlauf.

Von einem Prisma, dessen Querschnitt und Ansicht von oben in Fig. 1. ersichtlich, seien folgende Eigenschaften bekannt:

1) die Ober- und Unterfläche desselben seien horizontal;
2) nach der rechtseitigen Längenrichtung sei dasselbe von einer senkrechten Wand begrenzt;
3) die Länge desselben betrage 1.00′ Einen Fuss, eben so viel seine obere Breite, und sei zugleich Ein Fuss für die Längeneinheit angenommen;
4) das Eigengewicht der Prismenmasse für Einen Cubikfuss sei mit p, die reciproke Festigkeit derselben für Einen Quadratfuss mit w bezeichnet.

Welches wird die nach links den Querschnitt des Prismas begrenzende Curve sein, wenn in jedem seiner Horizontalschnitte genau den Ansprüchen der reciproken Festigkeit bezüglich des überlagernden Prismentheiles genügt werden soll, das heisst: der jeweilige Gesammtzuwachs an Breite, durch die Krümmung der Curve erzeugt, und mit der Länge 1.00′ eine Fläche bildend, mittelst der letzteren hinreichend sein soll, eben diesen Prismentheil zu tragen.

---

*) Die zu diesem Aufsatz gehörende Figurentafel s. auf Taf. IV.

Diese Bedingung bezeichnet sich analytisch, wenn der Coordinatennullpunkt bei A liegt, längs AB die Abscissen und auf ihnen senkrecht die Ordinaten gemessen werden, in der Gleichung:

$$w\partial y = py\partial x,$$

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{p}{w}\,\partial x,$$

woraus durch Integration:

$$x = \frac{w}{p}\,\text{Log. nat. } y$$

und

$$y = e^{\frac{p\,.\,x}{w}}$$

entsteht, wobei e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

$$\text{Für } x = 0.00' \text{ ist } y = e^{\frac{p\,.\,0}{w}} = 1.00',$$

$$\text{für } y = 0.00' \text{ ist } x = \frac{w}{p}\,\text{Log. nat. } 0 = -\infty.$$

Mit Berücksichtigung der oben verlangten Eigenschaft der Curve und des gefundenen Resultates, dass ihre Ordinate am Coordinatennullpunkt $= 1.00'$ sein muss, kennzeichnet sich dieselbe nun in der Gleichung:

$$\frac{\int_x^0 y\partial x}{y-1} = \frac{w}{p};$$

nun aber ist

$$\int e^{\frac{px}{w}}\,\partial x = \frac{e^{\frac{px}{w}}}{\text{Log. nat. } e^{\frac{p}{w}}};$$

weil $\text{Log. nat. } e = 1.00$ ist, so ist auch:

$$\int e^{\frac{px}{w}}\,\partial x = \frac{y}{\frac{p}{w}};$$

$\int_x^0 y\partial x$ ist aber $\int e^{\frac{px}{w}}\,\partial x - C = \frac{y}{\frac{p}{w}} - C$, woselbst C dem Werthe des Flächenintegrals für $x = 0$ gleich ist.

Wird ferner betrachtet, dass schon die Fläche, entstanden durch die Multiplication der Ordinate am Coordinatennullpunkt mit der Länge des Prismas 1.00′, ein über diesem ruhendes Rechteck von der Breite $=1.00'$, der Höhe $=\frac{w}{p}$, der Länge $=1.00'$ und dem Gewicht von p für Einen Cubikfuss tragen kann, so ist $C=\frac{w}{p}$, daher nun:

$$\frac{\int_x^0 y\partial x}{y-1}=\frac{\frac{y}{p}-\frac{w}{p}}{y-1}=\frac{w}{p},$$

was zu beweisen war.

Die Fig. 1. giebt den graphischen Beweis für die Richtigkeit der vorhergehenden Sätze, und ist für dieses Beispiel $w=100$ Zentner, $p=1$ Zentner angenommen worden.

Die nachstehende Tabelle bedarf keiner Erläuterung, und erleichtert die allenfalls wünschenswerthe Bekräftigung der gelösten Aufgabe mittelst eines Zahlenbeispiels.

Abscissen.	Ordinaten.	Jeweiliger Ordinatenzuwachs.	Gesammtzuwachs der Ordinaten.
Fusse.	*Fusse.*	*Fusse.*	*Fusse.*
0.000	1.000		
10.000	1.105	0.105	0.105
20.000	1.221	0.116	0.221
30.000	1.350	0.129	0.350
40.000	1.492	0.142	0.492
50.000	1.649	0.157	0.649
60.000	1.825	0.176	0.825
70.000	2.014	0.189	1.014
80.000	2.226	0.212	1.226
90.000	2.459	0.233	1.459
100.000	2.718	0.259	1.718
110.000	3.004	0.286	2.004
120.000	3.320	0.316	2.320
130.000	3.669	0.349	2.669
140.000	4.056	0.387	3.056
150.000	4.482	0.426	3.482
160.000	4.953	0.471	3.953
170.000	5.473	0.520	4.473
180.000	6.050	0.577	5.050
190.000	6.686	0.636	5.686
200.000	7.390	0.704	6.390

Es sei $y=4.056'$, und soll beispielsweise diese Dimension zugleich die obere halbe Breite eines Pfeilers bezeichnen, so wird sich aus der Gleichung $x=\frac{w}{p}$ Log. nat. y und aus der vorstehenden Tabelle $x=140.00'$ ergeben. Ferner wird:

$$\int_x^{\circ} y\partial x=(y-1)\frac{w}{p}=3.056'.100=305.60\square'$$

sein; der Vorsprung bei $x=140{,}00'$ ist aber auch $y-1=4.056'$. $-1.000'$, $=3.056'$, und kann daher die Fläche, welche 3.056' zur Breite und 1.000' zur Länge hat, den Prismentheil, dessen Länge ebenfalls 1.00' und dessen Schnittfläche 305.60□' ist, tragen, wenn, wie schon angenommen, $p=1$ Zentner, $w=100$ Zentner gesetzt wird.

Soll bei gegebener oberer halber Pfeilerbreite und ebenfalls bestimmter Pfeilerhöhe die untere halbe Breite gesucht werden, so geschieht diess nach obigem Verfahren:

Es sei beispielsweise zur oberen halben Breite $=4.056'$ die Pfeilerhöhe $=10.000'$ gegeben.

Aus $x=140.00'$ wird nun $x=140.00'+10.00'=150.00'$, und bestimmt sich y aus der Gleichung $y=e^{\frac{px}{w}}$ mit 4.482'.

Die Fläche mit der Differenz $4.482'-4.056'=0.426'$ zur Breite und 1.00' zur Länge reicht gerade hin, um den 10.00' hohen Halbpfeiler zu tragen, so dass die in der Fläche 4.056□' ruhende rückwirkende Festigkeit hierzu gar nicht in Anspruch genommen wird.

Der Säulenanlauf.

Es werde die Curve gesucht, welche so beschaffen ist, dass, wenn in Fig. 2. der Halbmesser einer Säule am Coordinatennullpunkt $A=1.00'$ ist, und bezüglich der Messung der Ordinaten sowohl, als der Abscissen, so wie hinsichtlich der Grössen e, p und w die beim Pfeileranlauf gemachten Voraussetzungen Geltung behalten, bei der Drehung der von der Curve begrenzten Fläche um die Achse AB, das heisst: dem hierdurch erzeugten Rotationskörper, stets der jeweilige ringförmige Zuwachs die ihn überlagernde Scheibe, deren Höhe $=\partial x$ ist, tragen kann, so wie dann auch selbstverständlich der den vom Coordinatennullpunkt aus beginnenden Gesammtzuwachs bezeichnende Ring auch dem ganzen zwischen ihm und diesem Punkte befindlichen Drehungskörper Widerstand zu leisten fähig ist.

Diess bezeichnet sich analytisch wie folgt:

$$2w\pi(y+\frac{\partial y}{2})\partial y = py^2\pi\partial x,$$

$$2w\pi y\partial y = py^2\pi\partial x,$$

$$2w\pi\partial y = py\pi\partial x,$$

$$\frac{2w\pi\partial y}{\partial x} = p\pi y,$$

$$\frac{2w\partial y}{\partial x} = py;$$

durch Integration resultirt hieraus:

$$x = \frac{2w}{p}\,\text{Log. nat. } y$$

oder

$$y = e^{\frac{px}{2w}}.$$

Für $x=0$ ist $y=1.00'$, für $y=0$ ist $x=-\infty$.

Wird nun das Resultat, dass beim Coordinatennullpunkt $y=1.00'$ ist, mit der in Vorhergehendem von der Curve geforderten Eigenschaft verbunden, so drückt sich das in der Gleichung:

$$\frac{\pi\int_x^0 y^2\partial x}{\pi(y^2-1)} = \frac{w}{p}$$

aus, welcher Bedingung aber auch durch die gefundene Curve Genüge geleistet wird, wenn in Betrachtung kömmt, dass die Scheibe am Coordinatennullpunkt schon einen Cylinder von 1.00′ Halbmesser, $\frac{w}{p}$ Höhe und p Eigengewicht für Einen Cubikfuss tragen kann.

Es ist nämlich jetzt:

$$\pi\int y^2\partial x = \pi\int e^{\frac{2px}{2w}}\partial x = \frac{\pi e^{\frac{px}{w}}}{\frac{p}{w}} = \pi y^2\frac{w}{p}.$$

Ferner ergiebt sich alsdann:

$$\frac{\pi\int_x^0 y^2\partial x}{\pi(y^2-1)} = \frac{\pi y^2\frac{w}{p} - \pi.1{,}00^2.\frac{w}{p}}{\pi(y^2-1)} = \frac{(y^2-1)\frac{w}{p}}{y^2-1} = \frac{w}{p},$$

was zu beweisen war.

Es kann auch für diese Curve schon aus der graphischen Darstellung die Richtigkeit der bethätigten Analyse entnommen werden, so wie überdiess, damit ein Beispiel in Zahlen den Beweis liefern kann. die nachfolgende Tabelle aus den Ergebnissen der entwickelten Formel construirt ist.

Abscissen.	Ordinaten.	Jeweiliger Ordinatenzuwachs.	Gesammt-Ordinatenzuwachs.
Fusse.	*Fusse.*	*Fusse.*	*Fusse.*
0,000	1.000		
20,000	1.105	0.105	0.105
40,000	1.221	0.116	0.221
60,000	1.350	0.129	0.350
80,000	1.492	0.142	0.492
100,000	1.649	0,157	0.649
120,000	1.825	0.176	0.825
140,000	2.014	0.189	1.014
160,000	2.226	0.212	1.226
180,000	2.459	0.233	1.459
200,000	2.718	0.259	1.718
220,000	3.004	0.286	2.004
240,000	3.320	0.316	2.320
260,000	3.669	0.349	2.669
280,000	4.056	0.387	3.056
300,000	4.482	0.426	3.482
320,000	4.953	0.471	3.953
340,000	5.470	0.517	4.470
360,000	6.050	0.580	5.050
380,000	6.686	0.636	5.686
400,000	7.390	0.704	6.390
420,000	8.160	0.770	7.160
440,000	9.025	0.865	8.025
460,000	9.970	0.945	8.970
480,000	11.050	1.080	10.050
500,000	12.180	1.130	11.180

Es sei z. B. $y = 1.649'$, so wird sich x aus der Gleichung

$$y = e^{\frac{px}{2w}} \text{ oder } x = \frac{2w}{p} \text{Log. nat. } y$$

finden, und zwar mit dem Werthe von 100.00′.

Der Rotationskörper ohne den über dem Coordinatenullpunkt befindlichen Cylinder wird den Cubus von $\frac{w}{p}(y^2 - 1)\pi = 540{,}172^{c'}$ ausweisen, welcher cubische Inhalt durch Zerlegung des Körpers in Scheiben von 20,00′ Höhe und mit Zuhilfnahme obiger Tabelle annähernd gefunden wird.

Wie zum gegebenen oberen Säulendurchmesser, wenn die Säulenhöhe bestimmt ist, sich der untere Durchmesser berechnet, kann wohl übergangen werden, da ganz dasselbe Verfahren, wie beim Pfeileranlaufe, befolgt werden darf, und der Beweis für die Richtigkeit desselben schon im Vorhergehenden enthalten ist, da ja bei einer Säule von 1.00′ oberem Halbmesser und 100,00′ Höhe sich die Stärke des unteren Halbmessers mit 1.649′ auswies.

Der Anlauf des Pyramidalkörpers mit quadratischem Querschnitt.

Wie in der vorhergehenden Untersuchung der Anlauf der Säule gefunden worden ist, so werde jetzt der Anlauf des Körpers behandelt, welcher zum Horizontalschnitt in jeder beliebigen Höhe nicht den Kreis, sondern ein halbes Quadrat hat, und sei die jeweilige Länge dieses Quadrates mit $2y$, dessen Breite mit y bezeichnet.

Die übrigen Bezeichnungen und Werthe seien dieselben wie in den beiden vorhergehenden Problemen, und ist es selbstverständlich, dass von dem Körper, dessen Querschnitt ein halbes Quadrat, auf denjenigen geschlossen werden darf, dessen Schnitt das Doppelte, das ganze Quadrat ist, so dass der für das halbe Quadrat, das heisst: für drei Seiten desselben entzifferte Anlauf, alsdann das ganze nach allen vier Seiten umgiebt.

In der Figur 3. ist dieses halbe Quadrat sowohl, als das ganze ersichtlich. Die Bedingnissgleichung wird mit Berücksichtigung der für den Säulenanlauf gefundenen Resultate sein:

$$\frac{2\int_x^0 \partial y \int_x^0 y \partial x}{2(y^2 - 1)} = \frac{w}{p},$$

oder mit Worten:

Es wird stets der Zuwachs des am Coordinatennullpunkt vorhandenen halben 2.00′ langen und 1.00′ breiten Quadrats den ganzen Pyramidalkörper von dem Coordinatennullpunkt abwärts tragen müssen.

Obige Gleichung differenzirt giebt:

$$4wy\partial y = 2p\partial y \int_x^0 y\partial x\,,$$

$$4wy = 2p \int_x^0 y\partial x\,;$$

nochmals differenzirt:

$$4w\partial y = 2py\partial x\,,$$

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{p}{2w}\partial x\,;$$

nun integrirt:

$$\text{Log. nat. } y = x\frac{2w}{p} \quad \text{oder} \quad y = e^{\frac{px}{2w}}.$$

Also ist die Anlaufscurve dieselbe wie für die Säule.

Es treten auch ganz analoge Verhältnisse bezüglich der Integration zwischen den Grenzen 0 und x ein, indem hier statt des Cylinders ein Reckteckkörper mit $\frac{w}{p}$ Höhe und 2.00q′ Basis am Coordinatennullpunkt als von dem halben Quadrat getragener Körper erscheint.

Dass aber die Einführung dieses Verhältnisses und der Curvengleichung in die Bedingnissgleichung diese letztere erfüllt, geht aus Folgendem hervor:

$$2\int \partial y \int y\partial x = 2\int \partial y \int e^{\frac{px}{2w}}\partial x = 2\int \partial y \cdot \frac{e^{\frac{px}{2w}}}{\frac{p}{2w}} = 2\int \partial e^{\frac{px}{2w}} \cdot \frac{e^{\frac{px}{2w}}}{\frac{p}{2w}}$$

$$= 2\int e^{\frac{px}{2w}} \cdot \frac{p}{2w} \cdot \frac{e^{\frac{px}{2w}}}{\frac{p}{2w}}\partial x = 2\int e^{\frac{2px}{2w}}\partial x = 2\int e^{\frac{px}{w}}\partial x = \frac{2e^{\frac{px}{w}}}{\frac{p}{w}} = \frac{2y^2}{\frac{p}{w}}.$$

Wird aber zwischen den Grenzen 0 und x integrirt, so ist:

$$\int_x^0 \partial y \int_x^0 y\partial x = \frac{2y^2}{\frac{p}{w}} - \frac{2w}{p} = \frac{2(y^2-1)}{\frac{p}{w}}.$$

Dieses Resultat, eingeführt in die Bedingnissgleichung

$$\frac{2\int_x^0 \partial y \int_x^0 y\partial x}{2(y^2-1)} = \frac{w}{p},$$

ergiebt:

$$\frac{\frac{2(y^2-1)}{\frac{p}{w}}}{2(y^2-1)} = \frac{w}{p},$$

was zu beweisen war.

Es werde bei einer Höhe des Pyramidalkörpers von 100.00′ die Probe gemacht:

Nach der Formel ist der Cubus desselben vom Coordinatennullpunkt abwärts

$$= 2\int_x^0 \partial y \int_x^0 y\partial x = \frac{2w}{p}(y^2-1) = 343{,}80\,\square',$$

wenn $y = 1.649'$, was aus der Gleichung $y = e^{\frac{px}{2w}}$ resultirt, und wird mittelst der berechneten, auch hier giltigen Stichmaasse für den Säulenanlauf der in je nur 20.00′ Höhe gezogenen Ordinaten derselbe Cubus entziffert.

Für den Fall, dass für die Längeneinheit nicht Ein Fuss, sondern eine beliebige kleinere Länge angenommen wird, ändert sich die Curve sowohl für den Pfeiler, als die beiden anderen Körper abwärts von der Ordinate 1.00′ nicht ab, wohl aber aufwärts von derselben, indem dieselbe Fläche, welche vorher durch ein Rechteck von 1.00′ Breite und $\frac{w}{p} = 100'$ Höhe ausgedrückt wurde, nunmehr, wenn etwa beim Pfeileranlauf für die Längeneinheit Ein halber Fuss genommen werden will, durch ein anderes Rechteck von 100.00′ Höhe und 0.5′ Breite, also mit 50.00□′ Fläche und einen 50.00□′ grossen Flächenabschnitt zwischen den Ordinaten 0.5′ und 1.00′ und den Abscissen 0.0′ und 69.31′ ausgedrückt wird, welcher letztere Werth aus der Formel $x = \frac{w}{p}$ Log. nat. y durch Einsetzung von y = zwei halben Fussen = zwei Längeneinheiten resultirt.

Durch dieses Ergebniss ist auch erwiesen, dass y nie Null werden kann, weil doch immer eine positive Grösse als Längeneinheit genommen werden muss, daher auch der Werth von $x=-\infty$ für $y=0$ durchaus begründet erscheint.

XXXI.

Coefficienten und independente Formeln zur Berechnung der combinatorischen Producte.

Von

Herrn *Carl Wasmund*

in Black-Earth, Wisconsin. Dane-County. (North America.)

Bezeichnet man die Summe der combinatorischen Producte der $r$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, 3 \ldots. m$ für die Combinationen mit Wiederholungen durch K_r^m und für die Combinationen ohne Wiederholungen durch C_r^m, so lassen sich, wie ich in einem früheren kleinen Aufsatze *) gezeigt habe, aus den bekannten Relationen:

*) Archiv. Thl. XXI. Nr. XVIII. S. 228. Der Herr Verfasser verweist in diesem Aufsatze auf S. 232. auch auf die Abhandlungen des Herrn Schläfli in Thl. X. S. 386., Thl. XII. S. 53. In einem an mich gerichteten Briefe aus Black-Earth vom 20. November 1859 bedauert er sehr, dass er die Schläfli'schen Abhandlungen jetzt nicht noch einmal habe einsehen können, welches hier zu bemerken ich mich als Herausgeber für verpflichtet halte. Eben so sehr halte ich mich zu bemerken verpflichtet, dass Herr Wasmund mir schreibt: „Alles was ich von mathematischen Büchern zur Hand habe, ist die von Ihnen herausgegebene (ebene, sphärische und sphä-

$$K^m_r = mK^m_{r-1} + K^{m-1}_r \text{ und } C^m_r = mC^{m-1}_{r-1} + C^{m-1}_r$$

durch Summirung arithmetischer Reihen leicht folgende Ausdrücke ableiten:

$$K^m_1 = (m+1)_2,$$

$$K^m_2 = (m+2)_3 + 3(m+2)_4,$$

$$K^m_3 = (m+3)_4 + 10(m+3)_5 + 15(m+3)_6,$$

. . . .

$$K^m_r = B^r_1 (m+r)_{r+1} + B^r_2 (m+r)_{r+2} + \ldots + B^r_r (m+r)_{2r}$$

und

$$C^m_1 = (m+1)_2,$$

$$C^m_2 = 2(m+1)_3 + 3(m+1)_4,$$

$$C^m_3 = 6(m+1)_4 + 20(m+1)_5 + 15(m+1)_6,$$

. . . .

$$C^m_r = A^r_1 (m+1)_{r+1} + A^r_2 (m+1)_{r+2} + \ldots + A^r_r (m+1)_{2r}.$$

Diese bloss von r abhängenden, mit B und A bezeichneten Coefficienten lassen sich berechnen nach den Formeln:

$$B^r_1 = K^1_r,$$

$$B^r_2 = K^2_r - (r+2)_1 K^1_r,$$

$$B^r_3 = K^3_r - (r+3)_1 K^2_r + (r+3)_2 K^1_r,$$

. . . .

$$B^r_i = K^i_r - (r+i)_1 K^{i-1}_r + (r+i)_2 K^{i-2}_r - \ldots + (-1)^{i-1} (r+i)_{i-1} K^1_r$$

---

roidische) Trigonometrie und der 2. Theil von F. Wolff's theoretisch-praktischer Zahlenlehre. Diese beiden Bücher sind mir deshalb so viel werth, weil sie in einem kleinen Raume so viel enthalten. Mein Hauptschatz ist aber eine Sammlung von Bemerkungen und Formeln, die ich mir gelegentlich bei'm Lesen mathematischer Schriften aufgezeichnet habe." Unter allen Bedingungen habe ich den aus so weiter Ferne mir zugesandten Aufsatz eines von mir in allen Beziehungen sehr hochgeschätzten Mannes und Freundes, dem ich die herzlichsten Glückwünsche über den Ocean hinüber zusende, mit besonderer Freude hier abdrucken lassen. G.

und

$A_1^r = C_r^r,$

$A_2^r = C_r^{r+1} - (r+2)_1\, C_r^r,$

$A_3^r = C_r^{r+2} - (r+3)_1\, C_r^{r+1} + (r+3)_2\, C_r^r,$

. . . .

$A_i^r = C_r^{r+i-1} - (r+i)_1\, C_r^{r+i-2} + (r+i)_2\, C_r^{r+i-3} - \ldots + (-1)^{i-1}(r+i)_{i-1}\, C_r^r;$

oder noch bequemer nach den Relationen:

$$B_i^{r+1} = iB_i^r + (r+i)\,B_{i-1}^r \quad \text{und} \quad A_i^{r+1} = (r+i)\,(A_i^r + A_{i-1}^r),$$

nach welchen die beigefügten beiden Tafeln I. und II. für die ersten 10 Combinationsklassen berechnet sind.

Nachdem ich diese beiden Tafeln berechnet hatte, habe ich noch gefunden, dass sich beide Combinationsarten nach irgend einer derselben berechnen lassen. Setzt man nämlich in der Relation für die Combinationen mit Wiederholungen $-m$ für m, so kommt:

$$m = \frac{K_r^{-(m+1)} - K_r^{-(m+1-1)}}{K_{r-1}^{-(m+1-1)}},$$

aus der Relation für die Combinationen ohne Wiederholungen folgt:

$$m = \frac{C_r^m - C_r^{m-1}}{C_{r-1}^{m-1}};$$

die Vergleichung dieser beiden Werthe für m leitete mich auf folgenden Satz:

Es ist

$$K_r^{-(m+1)} = C_r^m \quad \text{oder} \quad K_r^m = C_r^{-(m+1)}.$$

Ich will bloss zeigen, dass

$$K_3^{-(m+1)} = C_3^m,$$

d. h.

$$(-m+2)_4 + 10(-m+2)_5 + 15(-m+2)_6$$

oder

$$(m+1)_4 - 10(m+2)_5 + 15(m+3)_6 = 6(m+1)_4 + 20(m+1)_5 + 15(m+1)_6$$

sei. Nun ist

$(m+n)_{r+n} = n_0 m_r + n_1 m_{r+1} + n_2 m_{r+2} + \ldots$ etc. (Archiv. I. p. 432.),

also, wenn man $m+1$ für m, 4 für r, 1 und 2 für n setzt:

$$(m+1)_4 = (m+1)_4,$$

$$-10(m+2)_5 = -10(m+1)_4 - 10(m+1)_5,$$

$$+15(m+3)_6 = +15(m+1)_4 + 30(m+1)_5 + 15(m+1)_6;$$

woraus sich, wenn man addirt, die Richtigkeit der obigen Behauptung ergiebt.

Man ersieht hieraus schon, dass sich der allgemeine Beweis auf dieselbe Weise führen lässt. Thut man dies, so ergeben sich dabei unter anderen die folgenden Relationen zwischen den mi B und A bezeichneten Coefficienten:

$$B_i^r = \pm(i-1)_{i-1} A_i^r \mp (i)_{i-1} A_{i+1}^r \pm (i+1)_{i-1} A_{i+2}^r \mp \ldots + (r-1)_{i-1} A_r^r,$$

$$A_i^r = \pm(i-1)_{i-1} B_i^r \mp (i)_{i-1} B_{i+1}^r \pm (i+1)_{i-1} B_{i+2}^r \mp \ldots + (r-1)_{i-1} B_r^r;$$

wo die oberen Zeichen zu nehmen sind, wenn $r+i$ gerade, die unteren, wenn $r+i$ ungerade ist.

$$1 = \pm A_1^r \mp A_2^r \pm A_3^r \mp \ldots + A_r^r,$$

$$1.2.3 \ldots k = \pm B_1^r \mp B_2^r \pm B_3^r \mp \ldots + B_r^r,$$

$$B_1^r + B_2^r + B_3^r + \ldots + B_r^r = \pm A_1^r \mp 2A_2^r \pm 2^2 A_3^r \mp 2^3 A_4^r \pm \ldots + 2^{r-1} A_r^r,$$

$$A_1^r + A_2^r + A_3^r + \ldots + A_r^r = \pm B_1^r \mp 2B_2^r \pm 2^2 B_3^r \mp 2^3 B_4^r \pm \ldots + 2^{r-1} B_r^r;$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn $r+1$ gerade, die unteren, wenn $r+1$ ungerade ist.

Nach Obigem hat man also:

$$K_r^m = B_1^r (m+r)_{r+1} + B_2^r (m+r)_{r+2} + B_3^r (m+r)_{r+3} + \ldots + B_r^r (m+r)_{2r}$$

$$= A_1^r (-m)_{r+1} + A_2^r (-m)_{r+2} + A_3^r (-m)_{r+3} + \ldots + A_r^r (-m)_{2r}$$

und

$$C_r^m = B_1^r (-m-1+r)_{r+1} + B_2^r (-m-1+r)_{r+2} + B_3^r (-m-1+r)_{r+3} + \ldots$$

$$\ldots + B_r^r (-m-1+r)_{2r}$$

$$= A_1^r (m+1)_{r+1} + A_2^r (m+1)_{r+2} + A_3^r (m+1)_{r+3} + \ldots + A_r^r (m+1)_{2r}.$$

Die independenten Formeln habe ich auf folgende Art erhalten:

Bezeichnet man die ersten Glieder der 1sten, 2ten, 3ten, etc. Differenzreihe für die Reihe 0^y, 1^y, 2^y, 3^y,.... mit $\Delta^1 0^y$, $\Delta^2 0^y$, $\Delta^3 0^y$, etc., so ist bekanntlich

$$\Delta^x 0^y = x_0 x^y - x_1(x-1)^y + x_2(x-2)^y - x_3(x-3)^y + \ldots.$$

Es ist

$$\Delta^x 0^y = x(\Delta^x 0^{y-1} + \Delta^{x-1} 0^{y-1}).$$

Setzt man für die beiden Differenzen innerhalb der Klammern die entsprechenden Reihen, so kommt:

$$x \left\{ \begin{array}{l} x_0 x^{y-1} - x_1(x-1)^{y-1} + x_2(x-2)^{y-1} - x_3(x-3)^{y-1} + \ldots \\ \qquad + (x-1)_0(x-1)^{y-1} - (x-1)_1(x-2)^{y-1} + (x-1)_2(x-3)^{y-1} - \ldots \end{array} \right\}$$

$$= x\{x_0 x^{y-1} - (x-1)_1(x-1)^{y-1} + (x-1)_2(x-2)^{y-1} - (x-1)_3(x-3)^{y-1} + \ldots\}$$

$$= x_0 x^y - x_1(x-1)^y + x_2(x-2)^y - x_3(x-3)^y + \ldots \text{ etc.},$$

wie behauptet wurde.

Es ist

$$K_r^m = \frac{\Delta^m 0^{m+r}}{1.2.3\ldots.m}.$$

Aus der so eben bewiesenen Gleichung folgt, wenn man m für x, $m+r$ für y setzt und dann durch $1.2.3\ldots.m$ dividirt:

$$\frac{\Delta^m 0^{m+r}}{1.2.3\ldots.m} = m\left(\frac{\Delta^m 0^{m+r-1}}{1.2.3\ldots.m}\right) + \frac{\Delta^{m-1} 0^{m-1+r}}{1.2.3\ldots.(m-1)}.$$

Der obige Ausdruck genügt also der Relation für die Combinationen mit Wiederholungen und stimmt überdies für $m=1$ und 2 damit überein, womit also der Satz erwiesen ist. Ich habe eine Tafel III. der Differenzen für $y=1$, 2, 3 bis 10 berechnet und beigefügt.

Man hat also jetzt die independente Formel:

$$K_r^m = \frac{\Delta^m 0^{m+r}}{1.2.3\ldots.m}$$

$$= \frac{m_0 m^{m+r} - m_1(m-1)^{m+r} + m_2(m-2)^{m+r} - m_3(m+3)^{m+r} + \ldots \text{ etc.}}{1.2.3\ldots.m}.$$

Der Analogie nach müsste nun $C_r^m =$ sein dem vorigen Ausdrucke, wenn man darin $-(m+1)$ für m setzt. Zu ermitteln, ob dies richtig ist, würde noch eine weitere Untersuchung erfordern.

Man bedarf aber dessen nicht, da die Coefficienten B durch die K gegeben sind, und die Coefficienten A sich durch die B ausdrücken lassen. Ich habe auf diesem Wege auch eine independente Formel für C^m_r abgeleitet. Die Sache hat weiter keine Schwierigkeit und will ich desshalb blos noch die Resultate angeben. Es war:

$$B^r_i = K^i_r - (r+i)_1 K^{i-1}_r + (r+i)_2 K^{i-2}_r - (r+i)_3 K^{i-3}_r + \dots + (-1)^{i-1}(r+i)_{i-1} K^1_r.$$

Hieraus findet man:

$$A^r_i = (-1)^{r-1} \left\{ \begin{aligned} & [0_0(2r+1)_{r-i}(r+i)_{i-1}]\,K^1_r \\ & + [1_0(2r+1)_{r-i}(r+i)_{i-1} - 1_1(2r+2)_{r-i}(r+i+1)_{i-1}]\,K^2_r \\ & + [2_0(2r+1)_{r-i}(r+i)_{i-1} - 2_1(2r+2)_{r-i}(r+i+1)_{i-1} \\ & \qquad + 2_2(2r+3)_{r-i}(r+i+2)_{i-1}]\,K^3_r \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + [(r-1)_0(2r+1)_{r-i}(r+i)_{i-1} - (r-1)_1(2r+2)_{r-i}(r+i+1)^{i-1} \\ & \qquad + \dots + (-1)^{r-1}(r-1)_{r-1}(2r+r)_{r-i}(2r+i-1)_{i-1}]\,K^r_r \end{aligned} \right\}.$$

Den independenten Ausdruck für C^m_r erhält man jedoch am leichtesten, wenn man K^m_r durch die Coefficienten B ausdrückt, dann nach K ordnet und endlich die in K^r_r, K^{r-1}_r etc. multiplicirten Glieder summirt *). So erhält man:

---

*) Diese Summirungen lassen sich leicht bewerkstelligen nach den folgenden Formeln:

$$r_r(a+r)_a + (r+1)_r(a+r+1)_a + (r+2)_r(a+r+2)_a + \dots + (r+p)_r(a+r+p)_a$$
$$= (a+r)_r\,(a+r+p+1)_{a+r+1}$$

und

$$r_r(a+r)_{a+z-1} + (r+1)_r(a+r+1)_{a+z-1} + (r+2)_r(a+r+2)_{a+z-1} + \dots$$
$$\dots + (r+p)_r(a+r+p)_{a+z-1} = (z-1)_0(a+r+z-1)_r(a+r+p+z)_{a+r+z}$$
$$-(z-1)_1\,(a+r+z-2)_r\,(a+r+p+z-1)_{a+r+z-1}$$
$$+(z-1)_2\,(a+r+z-3)_r\,(a+r+p+z-2)_{a+r+z-2}$$
$$-(z-1)_3\,(a+r+z-4)_r\,(a+r+p+z-3)_{a+r+z-3} + \dots \text{ etc.},$$

die ich mir zu diesem Zwecke abgeleitet habe.

$$K_r^m = [(r-m)_0 (r-m-1)_{2r}] K_r^r - [(r-m)_1 (r-m-2)_{2r-1}] K_r^{r-1} + [(r-m)_2 (r-m-3)_{2r-2}] K_r^{r-2} - \dots$$

$$\dots \pm [(r-m)_{r-3} (2-m)_{r+3}] K_r^3 \mp [(r-m)_{r-2} (1-m)_{r+2}] K_r^2 \pm [(r-m)_{r-1} (-m)_{r+1}] K_r^1,$$

und daraus, wenn man $-m-1$ für m setzt:

$$C_r^m = [(m+r+1)_0 (m+r)_{2r}] K_r^r - [(m+r+1)_1 (m+r-1)_{2r-1}] K_r^{r-1} + [(m+r+1)_2 (m+r-2)_{2r-2}] K_r^{r-2} - \dots$$

$$\dots \pm [(m+r+1)_{r-3} (m+3)_{r+3}] K_r^3 \mp [(m+r+1)_{r-2} (m+2)_{r+2}] K_r^2 \pm [(m+r+1)_{r-1} (m+1)_{r+1}] K_r^1,$$

wo die oberen Vorzeichen zu nehmen sind, wenn r ungerade, die unteren, wenn r gerade ist.

Der völlig entwickelte Ausdruck ist also:

$$C_r^m = (m+r+1)_0 (m+r)_{2r} \left[\frac{r_0 r^{2r} - r_1 (r-1)^{2r} + r_2 (r-2)^{2r} - r_3 (r-3)^{2r} + \dots \mp r_2 2^{2r} \pm r_1 1^{2r}}{1.2.3 \dots r} \right]$$

$$+ (m+r+1)_1 (m+r-1)_{2r-1} \left[\frac{-(r-1)_0 (r-1)^{2r-1} + (r-1)_1 (r-2)^{2r-1} - (r-1)_2 (r-3)^{2r-1} + \dots \mp (r-1)_2 2^{2r-1} \pm (r-1)_1 1^{2r-1}}{1.2.3 \dots (r-1)} \right]$$

$$+ (m+r+1)_2 (m+r-2)_{2r-2} \left[\frac{(r-2)_0 (r-2)^{2r-2} - (r-2)_1 (r-3)^{2r-2} + \dots \mp (r-2)_2 2^{2r-2} \pm (r-2)_1 1^{2r-2}}{1.2.3 \dots (r-2)} \right]$$

. . . .

$$+ (m+r+1)_{r-3} (m+3)_{r+3} \left[\frac{\pm 3_0 3^{r+3} \mp 3_1 2^{r+3} \pm 3_2 1^{r+3}}{1.2.3} \right]$$

$$+ (m+r+1)_{r-2} (m+2)_{r+2} \left[\frac{\mp 2_0 2^{r+2} \pm 2_1 1^{r+2}}{1.2} \right]$$

$$+ (m+r+1)_{r-1} (m+1)_{r+1} \left[\frac{\pm 1_0 1^{r+1}}{1} \right],$$

wo die oberen Vorzeichen zu nehmen sind, wenn r ungerade, die unteren, wenn r gerade ist.

Schliesslich will ich nur noch etwas anführen, was ich bei Gelegenheit bemerkt habe. Bezeichnet man die Unionen, Binionen, Ternionen etc. für die Combinationen ohne Wiederholungen mit A, B, C, D, E, etc., für die Combinationen mit Wiederholungen mit a, b, c, d, e, etc., und die Summe der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten.... Potenzen der Elemente mit S_1, S_2, S_3, S_4, etc., wobei die Elemente ganz beliebige sein können, so hat man für die Combinationen ohne Wiederholungen die bekannten Relationen:

$$A = S_1 \qquad \text{oder} \qquad A = S_1,$$

$$2B = AS_1 - S_2 \qquad B = \frac{S_1^2 - S_2}{2},$$

$$3C = BS_1 - AS_2 + S_3 \qquad C = \frac{S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3}{6},$$

$$4D = CS_1 - BS_2 + AS_3 - S_4 \qquad D = \frac{S_1^4 - 6S_1^2S_2 + 8S_1S_3 + 3S_2^2 - 6S_4}{24},$$

etc. etc.

Für die Combinationen mit Wiederholungen bestehen ganz ähnliche Relationen, nämlich:

$$a = S_1 \qquad \text{oder} \qquad a = S_1,$$

$$2b = aS_1 + S_2 \qquad b = \frac{S_1^2 + S_2}{2},$$

$$3c = bS_1 + aS_2 + S_3 \qquad c = \frac{S_1^3 + 3S_1S_2 + 2S_3}{6},$$

$$4d = cS_1 + bS_2 + aS_3 + S_4 \qquad d = \frac{S_1^4 + 6S_1^2S_2 + 8S_1S_3 + 3S_2^2 + 6S_4}{24},$$

die sich von den vorigen nur dadurch unterscheiden, dass sämmtliche Vorzeichen positiv sind; aus beiden ergeben sich noch Relationen zwischen den Combinationen mit und ohne Wiederholungen, nämlich:

$$A - a = 0,$$

$$B - Aa + b = 0,$$

$$C - Ba + Ab - c = 0,$$

$$D - Ca + Bb - Ac + d = 0,$$

etc.

I.

	B_1^r	B_2^r	B_3^r	B_4^r	B_5^r	B_6^r	B_7^r	B_8^r	B_9^r	B_{10}^r
r=1	1									
2	1	3								
3	1	10	15							
4	1	25	105	105						
5	1	56	490	1260	945					
6	1	119	1918	9450	17325	10395				
7	1	246	6825	56980	190575	270270	135135			
8	1	501	22935	302995	1636635	4099095	4729725	2027025		
9	1	1012	74316	1487200	12122110	47507460	94594500	91891800	34459425	
10	1	2035	235092	6914908	81431350	466876410	1422280860	2343240900	1964187225	654729075

$$K_r^m = B_1^r(m+r)_{r+1} + B_2^r(m+r)_{r+2} + B_3^r(m+r)_{r+3} + \dots + B_r^r(m+r)_{2r},$$

$$C_r^m = B_1^r(-m-1+r)_{r+1} + B_2^r(-m-1+r)_{r+2} + B_3^r(-m-1+r)_{r+3} + \dots + B_r^r(-m-1+r)_{2r}.$$

II.

	A_1^r	A_2^r	A_3^r	A_4^r	A_5^r	A_6^r	A_7^r	A_8^r	A_9^r	A_{10}^r
r=1	1									
2	2	3								
3	6	20	15							
4	24	130	210	105						
5	120	924	2380	2520	945					
6	720	7308	26432	44100	34650	10395				
7	5040	64224	303660	705320	866250	540540	135135			
8	40320	623376	3678840	11098780	18858840	18288270	9459450	2027025		
9	362880	6636960	47324376	177331440	389449060	520059540	416215800	183783600	34459425	
10	3628800	76998240	647536032	2920525608	7934927000	13642629000	14980405440	10199989800	3928374450	654729075

$$C_r^m = A_1^r(m+1)_{r+1} + A_2^r(m+1)_{r+2} + A_3^r(m+1)_{r+3} + \dots + A_r^r(m+1)_{2r},$$

$$K_r^m = A_1^r(-m)_{r+1} + A_2^r(-m)_{r+2} + A_3^r(-m)_{r+3} + \dots + A_r^r(-m)_{2r}.$$

III.

	$\Delta^1 0^{m+r}$	$\Delta^2 0^{m+r}$	$\Delta^3 0^{m+r}$	$\Delta^4 0^{m+r}$	$\Delta^5 0^{m+r}$	$\Delta^6 0^{m+r}$	$\Delta^7 0^{m+r}$	$\Delta^8 0^{m+r}$	$\Delta^9 0^{m+r}$	$\Delta^{10} 0^{m+r}$
$m+r=1$	1									
2	1	2								
3	1	6	6							
4	1	14	36	24						
5	1	30	150	240	120					
6	1	62	540	1560	1800	720				
7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040			
8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320		
9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880	
10	1	1022	55980	818520	5103000	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800

$$K^m_r = \frac{\Delta^m 0^{m+r}}{1.2.3\ldots.m} = \frac{\Delta^r 0^{2r}}{1.2\ldots.r}(r-m)_0(r-m-1)_{2r} - \frac{\Delta^{r-1}0^{2r-1}}{1.2\ldots.r-1}(r-m)_1(r-m-2)_{2r-1}$$

$$+\frac{\Delta^{r-2}0^{2r-2}}{1.2\ldots.r-2}(r-m)_2(r-m-3)_{2r-2} - \ldots. \pm \frac{\Delta^3 0^{r+3}}{1.2.3}(r-m)_{r-3}(2-m)_{r+3}$$

$$\mp \frac{\Delta^2 0^{r+2}}{1.2}(r-m)_{r-2}(1-m)_{r+2} \pm \frac{\Delta^1 0^{r+1}}{1}(r-m)_{r-1}(-m)_{r+1},$$

$$C^m_r = \frac{\Delta^r 0^{2r}}{1.2\ldots.r}(m+r+1)_0(m+r)_{2r} - \frac{\Delta^{r-1}0^{2r-1}}{1.2\ldots r-1}(m+r+1)_1(m+r-1)_{2r-1}$$

$$+\frac{\Delta^{r-2}0^{2r-2}}{1.2\ldots.r-2}(m+r+1)_2(m+r-2)_{2r-2} - \ldots. \pm \frac{\Delta^3 0^{r+3}}{1.2.3}(m+r+1)_{r-3}(m+3)_{r+3}$$

$$\mp \frac{\Delta^2 0^{r+2}}{1.2}(m+r+1)_{r-2}(m+2)_{r+2} \pm \frac{\Delta^1 0^{r+1}}{1}(m+r+1)_{r-1}(m+1)_{r+1},$$

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn r ungerade, die unteren, wenn r gerade ist, und wo

$$\Delta^x 0^y = x_0 x^y - x_1(x-1)^y + x_2(x-2)^y - x_3(x-3)^y + x_4(x-4)^y - x_5(x-5)^y + \ldots. \text{ etc.}$$

ist.

XXXII.

Kubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides *).

Von

Herrn Dr. *Albert Magener*,

Lehrer der Mathematik und Physik an der Realschule zu Posen.

Wenn man von einem beliebigen festen Punkte, dem Pole, auf sämmtliche Tangentialebenen einer gegebenen Fläche, der Basis, Senkrechte fällt, so bilden die Fusspunkte derselben wiederum eine Fläche, die Fusspunktenfläche zu der gegebenen Basis. Wir wollen den von einer solchen Fläche begränzten Körper den Fusspunktenkörper der Basis in Bezug auf einen gegebenen Pol nennen, und im Folgenden erstens das Volumen desjenigen Fusspunktenkörpers bestimmen, dessen Basis die Oberfläche eines dreiaxigen Ellipsoides ist, und zweitens den geometrischen Ort gleicher Fusspunktenkörper eines Ellipsoides aufsuchen.

1.

Es liege der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Mittelpunkte eines Ellipsoides mit den Halbaxen a, b, c, wo $a > b > c$ sei, so ist die Gleichung des Ellipsoides:

$$(1) \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

also die Gleichung seiner Tangentialebene:

$$\frac{x_1(x-x_1)}{a^2} + \frac{y_1(y-y_1)}{b^2} + \frac{z_1(z-z_1)}{c^2} = 0;$$

---

*) Dieser Aufsatz enthält eine zum Theil neue Entwickelung und Fortsetzung des im Programm der Realschule zu Posen Ostern 1858 behandelten Themas.

mithin in Folge der Gleichung (1):

$$\text{(2)} \qquad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

Ferner sind die Gleichungen eines von einem beliebigen Punkte $P(\alpha, \beta, \gamma)$ auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels:

$$\text{(3)} \qquad \frac{a^2(x-\alpha)}{x_1} = \frac{b^2(y-\beta)}{y_1} = \frac{c^2(z-\gamma)}{z_1}.$$

Um nun eine Beziehung der Fusspunkte aller dieser Perpendikel und somit die Gleichung der Fusspunktenfläche zu erhalten, eliminire man aus den Gleichungen des Ellipsoides, der Tangentialebene und des Perpendikels die Grössen x_1, y_1, z_1, indem man die Gleichung (2) erst mit $a(x-\alpha)$, dann mit $b(y-\beta)$, endlich mit $c(z-\gamma)$ multiplizirt. Man erhält dann mit Hülfe der Gleichungen (3) folgende Gleichungen:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \frac{x_1}{a}\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}=a(x-\alpha), \\ \frac{y_1}{b}\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}=b(y-\beta), \\ \frac{z_1}{c}\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}=c(z-\gamma); \end{cases}$$

erhebt man diese in's Quadrat und addirt, so erhält man:

$$\text{(5)} \qquad \left\{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right\}\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}^2$$
$$= a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2+c^2(z-\gamma)^2;$$

folglich als Gleichung der gesuchten Fusspunktenfläche die Gleichung vierten Grades:

$$\text{(6)}$$
$$\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}^2 = a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2+c^2(z-\gamma)^2.$$

Führt man vermittelst der Gleichungen

$$a(x-\alpha)=r\cos\vartheta, \quad b(y-\beta)=r\sin\vartheta\cos\psi, \quad c(z-\gamma)=r\sin\vartheta\sin\psi$$

Polarcoordinaten *) ein, so erhält man folgende Polargleichung der Fusspunktenfläche:

*) Im eigentlichen Sinne sind natürlich hier ϑ, ψ, r keine Polarcoordinaten, was man auch noch bei einigen im Nachfolgenden gebrauchten Ausdrücken zu beachten haben dürfte. G.

$$r^2 = \{ r^2 \left[\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\psi}{c^2} \right] + r\left[\frac{\alpha\cos\vartheta}{a} + \frac{\beta\sin\vartheta\cos\psi}{b} + \frac{\gamma\sin\vartheta\sin\psi}{c} \right] \}^2$$

oder:

$$(7) \quad r = \frac{a^2b^2c^2 - \alpha ab^2c^2\cos\vartheta - \beta a^2bc^2\sin\vartheta\cos\psi - \gamma a^2b^2c\sin\vartheta\sin\psi}{b^2c^2\cos^2\vartheta + a^2c^2\sin^2\vartheta\cos^2\psi + a^2b^2\sin^2\vartheta\sin^2\psi}.$$

2.

Wir gehen nun zur Bestimmung des Volumens des von dieser Fläche eingeschlossenen Fusspunktenkörpers über und bezeichnen das zum Pole $P(\alpha, \beta, \gamma)$ gehörige Volumen desselben mit $V(\alpha, \beta, \gamma)$. Bekanntlich verwandelt sich das dreifache Integral $\iiint dx\,dy\,dz$ durch Einführung der Polarcoordinaten

$$x = Ar\cos\vartheta, \quad y = Br\sin\vartheta\cos\psi, \quad z = Cr\sin\vartheta\sin\psi$$

in das Integral $ABC\iiint r^2\sin\vartheta d\vartheta d\psi dr$; mithin erhalten wir das Volumen des Fusspunktenkörpers:

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{abc}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^r r^2\sin\vartheta d\vartheta d\psi dr$$

oder

$$(8) \qquad V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{3abc}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^3\sin\vartheta d\vartheta d\psi,$$

wenn man die Integration nach r ausführt.

Entwickelt man den Werth von r^3, so wird $V(\alpha, \beta, \gamma)$ gleich einer Summe von zwanzig Integralen, die nach ϑ zwischen den Gränzen 0 und π und nach ψ zwischen 0 und 2π zu nehmen sind und alle einen gemeinsamen Nenner haben. Alle diese Integrale verschwinden aber bis auf vier. Es ist nämlich das Integral $\int_0^{2\pi}\sin^{2m+1}\psi\cos^n\psi d\psi = 0$; denn die Elemente des ersten Quadranten werden von denen des vierten und die des zweiten Quadranten von denen des dritten aufgehoben, weil in ihnen der Faktor $\sin^{2m+1}\psi$ stets gleich und entgegengesetzt ist, der Faktor $\cos^n\psi$ aber dem Vorzeichen und der Grösse nach stets gleich ist. Ebenso ist auch $\int_0^{2\pi}\cos^{2m+1}\psi\sin^n\psi d\psi = 0$, weil die Ele-

mente des ersten und vierten Quadranten von den entsprechenden Elementen des zweiten und dritten aufgehoben werden; endlich ist auch $\int_0^\pi \cos^{2m+1}\vartheta \sin^n\vartheta d\vartheta = 0$, weil die Elemente des ersten und zweiten Quadranten des Faktors $\cos^{2m+1}\vartheta$ wegen gleiche, aber entgegengesetzte Werthe haben.

Nun haben alle jene Doppelintegrale, mit Ausnahme von vieren, in ihrem Zähler einen verschwindenden Faktor von einer der erwähnten drei Formen, die Werthe des Nenners sind aber in den einander entsprechenden Elementen der verschiedenen Quadranten dem Vorzeichen und der Grösse nach gleich, weil sie aus einer Summe von Quadraten bestehen; mithin verschwinden alle jene Integrale, wenn man in passender Weise entweder erst nach ψ und dann nach ϑ, oder erst nach ϑ und dann nach ψ zwischen den angegebenen Gränzen integrirt.

Man erhält somit:

$$V(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$\frac{1}{3abc}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\left\{\begin{array}{l}\{a^6b^6c^6 + 3\alpha^2a^4b^6c^6\cos^2\vartheta + 3\beta^2a^6b^4c^6\sin^2\vartheta\cos^2\psi\\ \qquad + 3\gamma^2a^6b^6c^4\sin^2\vartheta\sin^2\psi\}\sin\vartheta d\vartheta d\psi\end{array}\right\}}{\{b^2c^2\cos^2\vartheta + a^2c^2\sin^2\vartheta\cos^2\psi + a^2b^2\sin^2\vartheta\sin^2\psi\}^3},$$

oder, wenn wir die vier Integrale, aus welchen $V(\alpha, \beta, \gamma)$ besteht, mit V_0, V_α, V_β, V_γ bezeichnen und

$$\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\psi}{c^2} = R$$

setzen:

(9)

$$V(\alpha,\beta,\gamma) = \left\{\begin{array}{l} V_0 = \dfrac{8}{3abc}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta d\vartheta d\psi}{R^3} \\[2ex] + V_\alpha = \dfrac{8\alpha^2}{a^3bc}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\vartheta d\psi}{R^3} \\[2ex] + V_\beta = \dfrac{8\beta^2}{ab^3c}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\vartheta\cos^2\psi d\vartheta d\psi}{R^3} \\[2ex] + V_\gamma = \dfrac{8\gamma^2}{abc^3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\vartheta\sin^2\psi d\vartheta d\psi}{R^3}. \end{array}\right.$$

Die vier Integrale V_0, V_α, V_β, V_γ lassen sich vermittelst einer einzigen Integration darstellen. Differentiirt man nämlich $\frac{1}{R^2}$ partiell nach a, b, c, so erhält man:

$$\frac{\cos^2\vartheta}{R^3}=\frac{a^3}{4}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\partial a},\quad \sin^2\vartheta\cos^2\psi=\frac{b^3}{4}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\partial b},$$

$$\sin^2\vartheta\sin^2\psi=\frac{c^3}{4}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\partial c}.$$

Berücksichtigt man dies, so erhält man:

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
V_\alpha&=\frac{2\alpha^2}{bc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\partial a}\sin\vartheta d\vartheta d\psi,\\
V_\beta&=\frac{2\beta^2}{ac}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\partial b}\sin\vartheta d\vartheta d\psi,\\
V_\gamma&=\frac{2\gamma^2}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial.\left(\frac{1}{R^2}\right)}{\partial c}\sin\vartheta d\vartheta d\psi.
\end{aligned}\right.$$

Führt man die auf a, b, c bezüglichen partiellen Differentiationen erst nach vollzogener Integration aus, so kommt es nur darauf an, den Werth des Integrals

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta d\vartheta d\psi}{R^2}$$

zu ermitteln. Daraus ergiebt sich dann auch der Werth für V_0, da

$$\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\cos^2\psi+\sin^2\vartheta\sin^2\psi=1$$

ist, durch blosse Addition:

$$(11)\qquad V_0=\frac{2}{3abc}\left\{a^3\frac{\partial C}{\partial a}+b^3\frac{\partial C}{\partial b}+c^3\frac{\partial C}{\partial c}\right\},$$

und somit wird:

$$(12)$$

$$V(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{2}{3abc}\left\{a^3\frac{\partial C}{\partial a}+b^3\frac{\partial C}{\partial b}+c^3\frac{\partial C}{\partial c}\right\}+\frac{2}{abc}\left\{\alpha^2a\frac{\partial C}{\partial a}+\beta^2b\frac{\partial C}{\partial b}+\gamma^2c\frac{\partial C}{\partial c}\right\}$$

Aus diesem Werthe für $V(\alpha, \beta, \gamma)$ und der Formel (9) lassen sich die meisten der später (in No. 4., 5. und 6.) aufgestellten Sätze herleiten.

3.

Bevor wir jedoch zu diesen Sätzen übergehen, wollen wir den Werth von $V(\alpha, \beta, \gamma)$ entwickeln. Das Integral

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta d\vartheta d\psi}{R^2}$$

ist dasselbe, auf welches C. G. J. Jacobi *) die Oberfläche eines Ellipsoides mit den Halbaxen $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ zurückgeführt hat.

Zur Transformation desselben setze man nach Jacobi:

$$\sqrt{\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right\}} = \frac{\cos\delta}{c},$$

$$\sqrt{\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right\}} = \frac{\sqrt{\{1 - k^2\sin^2\delta\}}}{b} = \frac{\Delta(\delta)}{b},$$

wo $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$ ist, dann wird:

$$\cos\vartheta = \frac{a\sin\delta}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad \sin\vartheta d\vartheta = -\frac{a\cos\delta d\delta}{\sqrt{a^2 - c^2}};$$

mithin:

$$\frac{\sin\vartheta d\vartheta d\psi}{R^2} = -\frac{ab^4c^4\cos\delta d\delta d\psi}{\sqrt{a^2 - c^2}\,[b^2\cos^2\delta\sin^2\psi + c^2\Delta^2(\delta)\cos^2\psi]^2}.$$

Da nun für $\vartheta = 0$ $\cos\delta = \frac{c}{a}$ und für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ $\cos\delta = 1$ und $\delta = 0$ wird, so ist in Bezug auf δ zwischen $\arccos\frac{c}{a}$ und 0 zu integriren, und man erhält:

$$C = \frac{ab^4c^4}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_0^{\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\delta d\delta d\psi}{\{b^2\cos^2\delta\sin^2\psi + c^2\Delta^2(\delta)\cos^2\psi\}^2}.$$

---

*) Jacobi, De transformatione et determinatione integralium duplicium. Crelle's Journal Bd. X.

Führt man die Integration nach ψ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ aus, so erhält man, da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\{m^2\cos^2\psi + n^2\sin^2\psi\}^2} = \frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{mn^3} + \frac{1}{nm^3}\right\}$$

ist,

$$C = \frac{\pi abc}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left\{b^2\int_0^\delta \frac{d\delta}{\Delta^3(\delta)} + c^2\int_0^\delta \frac{d\delta}{\cos^2\delta\Delta(\delta)}\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf elliptische Integrale reduciren und erhält dann folgenden Werth:

$$C = \frac{\pi a^2bc}{4\sin\delta}\{\sin^2\delta E(k,\delta) + \cos^2\delta F(k,\delta)\} + \frac{\pi}{4}b^2c^2$$

oder

$$(13)\qquad C = \frac{\pi abc}{4\sqrt{a^2-c^2}}\{(a^2-c^2)E(k,\delta) + c^2F(k,\delta)\} + \frac{\pi}{4}b^2c^2,$$

oder auch:

$$C = \frac{a^2b^2c^2S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)}{8},$$

wenn $S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ die Oberfläche eines Ellipsoides mit den Halbaxen $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ bedeutet.

Differentiirt man nun C partiell nach a, b und c und berücksichtigt, dass die elliptischen Integrale $F(k,\delta)$ und $E(k,\delta)$, die wir der Kürze wegen mit F und E bezeichnen wollen, als Funktionen von k und δ, die Grössen a, b, c implicite enthalten, so erhalten wir, wenn wir $k^2 + k'^2 = 1$ setzen:

$$\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k}\{E - F\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{kk'^2}\{E - k'^2F\} - \frac{k\sin\delta\cos\delta}{k'^2\Delta(\delta)},$$

$$\frac{\partial k}{\partial a} = \frac{a(b^2-c^2)}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial k}{\partial b} = -\frac{b}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial k}{\partial c} = \frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}c}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}};$$

mithin:

$$\frac{\partial E}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial a}=\frac{a(b^2-c^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\{E-F\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial a}=\frac{aE}{a^2-b^2}-\frac{a(b^2-c^2)F}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}-\frac{c}{b(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial E}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial b}=-\frac{bE}{a^2-b^2}+\frac{bF}{a^2-b^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial b}=-\frac{(a^2-c^2)bE}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+\frac{bF}{a^2-b^2}+\frac{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}c}{(b^2-c^2)a},$$

$$\frac{\partial E}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial c}=\frac{cE}{a^2-c^2}-\frac{cF}{a^2-c^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial c}=\frac{cE}{b^2-c^2}-\frac{cF}{a^2-c^2}-\frac{(a^2-b^2)c^2}{ab(b^2-c^2)(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial E}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial a}=\varDelta\frac{\partial \delta}{\partial a}=\frac{bc}{a^2(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial a}=\frac{\partial \delta}{\varDelta\partial a}=\frac{c}{b(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial E}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial b}=0,\quad \text{da}\quad \frac{\partial \delta}{\partial b}=0 \text{ ist},$$

$$\frac{\partial E}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial c}=-\frac{b}{a(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial c}=-\frac{a}{b(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so erhalten wir die partiellen Differentialquotienten von C nach a, b, c wie folgt:

(14)

$$\frac{\partial C}{\partial a}=\frac{\pi bc}{4}\left\{\frac{bc}{a}+\left[a^2-c^2+\frac{a^4}{a^2-b^2}\right]\frac{E}{\sqrt{a^2-c^2}}+\left[c^2-\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\right]\frac{F}{\sqrt{a^2-c^2}}\right\},$$

$$\frac{\partial C}{\partial b}=\frac{\pi ac}{4}\left\{\frac{bc}{a}\left[1+\frac{b^2}{b^2-c^2}\right]+\left[a^2-c^2-\frac{(a^2-c^2)b^4}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]\frac{E}{\sqrt{a^2-c^2}}\right.$$
$$\left.+\left[c^2+\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\right]\frac{F}{\sqrt{a^2-c^2}}\right\},$$

$$\frac{\partial C}{\partial c}=\frac{\pi ab}{4}\left\{\frac{bc}{a}\left[1-\frac{c^2}{b^2-c^2}\right]+\left[a^2-c^2+\frac{c^4}{b^2-c^2}\right]\frac{E}{\sqrt{a^2-c^2}}+\frac{2c^2F}{\sqrt{a^2-c^2}}\right\}.$$

Substituiren wir nun die für $\frac{\partial C}{\partial a}$, $\frac{\partial C}{\partial b}$, $\frac{\partial C}{\partial c}$ gefundenen Werthe in Formel (12), so ergiebt sich das Volumen des Fusspunktenkörpers:

$$
(15) \qquad V(\alpha, \beta, \gamma)
$$

$$
= \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\pi abc}{6} \left\{ \frac{a^2 + 2(b^2+c^2)}{a^2} \right\} + \frac{\pi}{3}(a^2+b^2+c^2)(a^2-c^2)\frac{E}{\sqrt{a^2-c^2}} \\
&\qquad + \frac{\pi}{6}\left\{(a^2+b^2+c^2)c^2 + c^4 - a^2b^2\right\}\frac{F}{\sqrt{a^2-c^2}} \\
&+ \frac{\alpha^2\pi}{2}\left\{ \frac{abc}{a^2} + \left[a^2 - c^2 + \frac{a^4}{a^2-b^2}\right]\frac{E}{\sqrt{a^2-c^2}} + \left[c^2 - \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\right]\frac{F}{\sqrt{a^2-c^2}} \right\} \\
&+ \frac{\beta^2\pi}{2}\left\{ \frac{abc}{a^2}\left[1 + \frac{b^2}{b^2-c^2}\right] + \left[a^2 - c^2 - \frac{(a^2-c^2)b^4}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\right]\frac{E}{\sqrt{a^2-c^2}} \right. \\
&\qquad \left. + \left[c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\right]\frac{F}{\sqrt{a^2-c^2}} \right\} \\
&+ \frac{\gamma^2\pi}{2}\left\{ \frac{abc}{a^2}\left[1 - \frac{c^2}{b^2-c^2}\right] + \left[a^2 - c^2 + \frac{c^4}{b^2-c^2}\right]\frac{E}{\sqrt{a^2-c^2}} + 2c^2\frac{F}{\sqrt{a^2-c^2}} \right\}.
\end{aligned} \right.
$$

4.

Die in Formel (9) aufgestellten Ausdrücke für V_α, V_β, V_γ bleiben stets **positiv**, da die Elemente der in ihnen vorkommenden Doppelintegrale innerhalb der gegebenen Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für alle Werthe von ϑ und φ einen **positiven** Werth behalten. Daraus ergiebt sich erstens, dass der Fusspunktenkörper $V(\alpha, \beta, \gamma)$ ein Minimum wird, wenn V_α, V_β, V_γ verschwinden, und zweitens, dass die in V_α, V_β, V_γ enthaltenen Faktoren von α^2, β^2, γ^2, wie sie in den Formeln (12) und (15) vorkommen, ebenfalls stets **positiv** bleiben müssen. Bezeichnen wir diese positiven Faktoren mit L^2, M^2, N^2 und mit D^2 eine beliebige positive Constante, und setzen:

$$
(16) \qquad \left\{ \begin{aligned}
&\alpha^2L^2 + \beta^2M^2 + \gamma^2N^2 = D^2 \\
&\qquad\qquad \text{oder} \\
&\alpha^2\frac{L^2}{D^2} + \beta^2\frac{M^2}{D^2} + \gamma^2\frac{N^2}{D^2} = 1,
\end{aligned} \right.
$$

so behält



$$V(\alpha, \beta, \gamma) = V_0 + \alpha^2 L^2 + \beta^2 M^2 + \gamma^2 N^2$$

seinen Werth, so lange die Gleichungen (16) erfüllt werden, und wir erhalten folgende Sätze:

1. **Fällt man von einem beliebigen Punkte $P(\alpha, \beta, \gamma)$ auf alle Tangentialebenen eines dreiaxigen Ellipsoides Senkrechte, so ist das Volumen $V(\alpha, \beta, \gamma)$ des von der erzeugten Fläche eingeschlossenen Fusspunktenkörpers gleich der Summe von vier Körpern $V_0 + V_\alpha + V_\beta + V_\gamma$, deren Inhalt nach Formel (15) durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ausgedrückt werden kann.**

2. **Liegt der Pol $P(\alpha, \beta, \gamma)$ im Mittelpunkte des Ellipsoides, so ist der zugehörige Fusspunktenkörper V_0 ein Minimum** *).

3. **Liegen die Pole $P(\alpha, \beta, \gamma)$ auf der Oberfläche eines dreiaxigen, dem gegebenen Ellipsoide concentrischen Ellipsoides, welches durch die Gleichung**

$$\alpha^2 \frac{L^2}{D^2} + \beta^2 \frac{M^2}{D^2} + \gamma^2 \frac{N^2}{D^2} = 1$$

ausgedrückt wird, so sind die zugehörigen Fusspunktenkörper $V(\alpha, \beta, \gamma)$ einander gleich.

Ist ferner die Gleichung eines beliebigen zweiten **Ortsellipsoides**

$$\alpha^2 \frac{L^2}{D_1{}^2} + \beta^2 \frac{M^2}{D_1{}^2} + \gamma^2 \frac{N^2}{D_1{}^2} = 1,$$

so verhält sich

---

*) Den in Formel (15) für V_0 entwickelten Werth hat Tortolini in Crelle's Journal Bd. 31. in der Abhandlung: Nuove applicationi del Calcolo Integrale relative alla Quadratura delle superficie curve e cubatura de solidi gegeben. Die durch die Gleichung $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$ ausgedrückte Fläche ist bekanntlich die Fläche der optischen Elasticität, welche Fresnel in seinen Untersuchungen über doppelte Strahlenbrechung der Construction der ebenen Wellen zu Grunde gelegt hat. Man kann dieselbe auch, wie Plücker (Discussion de la forme générale des ondes lumineuses. Crelle's Journal. Bd. 19.) nachgewiesen hat, aus dem Ellipsoide, dessen Axen die reciproken Werthe der gleichgerichteten Axen des hier zu Grunde gelegten Ellipsoides sind, entstehen lassen.

$$\frac{D}{L} : \frac{D}{M} : \frac{D}{N} = \frac{D_1}{L} : \frac{D_1}{M} : \frac{D_1}{N};$$

folglich sind die Hauptaxen je zweier Ortsellipsoide proportionirt und wir erhalten den Satz:

4. Die geometrischen Oerter der Pole gleicher Fusspunktenkörper sind einander ähnliche, concentrische Ellipsoide.

Dass das Ortsellipsoid dem gegebenen Ellipsoide im Allgemeinen nicht ähnlich ist, ergiebt sich leicht aus Formel (15).

Setzt man $\alpha = \pm na$, $\beta = \pm nb$, $\gamma = \pm nc$, so erhält man nach Formel (12):

(17)

$$V(na, nb, nc) = V_0 + 3n^2 V_0, \quad \text{also} \quad V(a, b, c) = 4V_0 \text{ u. s. w.}$$

Daraus folgen die Sätze:

5. Liegen die Pole der Fusspunktenkörper in den vier Geraden, deren Gleichungen $\alpha = \pm na$, $\beta = \pm nb$, $\gamma = \pm nc$ sind, so sind die Volumina $V(na, nb, nc)$ gleich dem $(3n^2 + 1)$fachen Volumen des Minimumkörpers V_0.

Da die ganze Schaar der Ortsellipsoide alle Punkte dieser vier Geraden durchschneidet, so ist jeder Fusspunktenkörper $V(\alpha, \beta, \gamma)$ gleich $(3n^2 + 1)V_0$, wo n sich aus der Gleichung (16) des Ortsellipsoides bestimmen lässt.

Der Werth $V(\alpha, \beta, \gamma)$ erscheint unter einfacherer Form, wenn man $\alpha = \beta = \gamma$ setzt. Da nämlich C eine homogene Funktion vierten Grades ist *), so ergiebt sich nach dem Satze: „Wenn

---

*) Das Integral $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta d\vartheta d\psi}{\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\psi}{c^2}\right\}^2}$

ist in Bezug auf a, b, c symmetrisch, denn es behält seinen Werth, wenn man darin a, b, c oder, was dasselbe Resultat giebt, die Grössen $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\psi$, $\sin\vartheta\sin\psi$ mit einander vertauscht. Setzt man nämlich nach Jacobi l. c. $\frac{b}{a}\operatorname{tg}\vartheta$ oder $\frac{c}{a}\operatorname{tg}\vartheta$ für $\operatorname{tg}\vartheta$ ein, so erhält man, während sowohl die Gränzen des Integrals, als auch sein Werth unverändert bleiben, dieselben Transformationen, als wenn man b oder c mit a vertauscht.

man die partiellen abgeleiteten Funktionen *n*ten Grades durch die Veränderliche, worauf sie sich beziehen, multiplizirt, so ist die Summe dieser Producte gleich der *n*fachen Funktion" die Gleichung:

$$(18) \qquad a\frac{\partial C}{\partial a} + b\frac{\partial C}{\partial b} + c\frac{\partial C}{\partial c} = 4C = \frac{a^2b^2c^2\, S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)}{2},$$

welche man auch direkt aus Formel (14) hätte herleiten können. Mithin erhalten wir nach Formel (12):

$$(19) \qquad V(\alpha, \alpha, \alpha) = V_0 + \alpha^2 abc S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

Die vier durch die Gleichungen $\pm\alpha = \pm\beta = \pm\gamma$ ausgedrückten Geraden kann man als die vier Diagonalen des Würfels ansehen, welcher mit dem gegebenen Ellipsoide denselben Mittelpunkt hat und dessen Kanten den Hauptaxen desselben parallel sind. Wir wollen sie die Diagonalen des dem gegebenen Ellipsoide concentrischen Würfels nennen. Dann ergiebt sich aus der letzten Formel folgender Satz:

Liegt der Pol $P(\alpha, \alpha, \alpha)$ eines Fusspunktenkörpers $V(\alpha, \alpha, \alpha)$ in einer der Diagonalen des concentrischen Würfels, so ist derselbe gleich dem Minimumkörper V_0 plus dem Körper, welcher entsteht, wenn man die Oberfläche des Ellipsoides mit den reciproken Axen mit $\alpha^2 abc$ multiplizirt. Die Zuwachse dieser Fusspunktenkörper stehen im Verhältniss von α^2, oder auch im Verhältniss der Quadrate der Entfernungen des Pols vom Mittelpunkte des gegebenen Ellipsoides.

In dem besonderen Falle nun, in welchem die Halbaxen des gegebenen Ellipsoides der Gleichung $ac = b^2$ genügen, wird nach Formel (13):

$$(20)$$

$$V(\alpha, \alpha, \alpha) = V_0 + \frac{2\alpha^2\pi}{b}\left\{c^2 + \frac{b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\left[(a^2 - c^2)E(k, \delta) + c^2F(k, \delta)\right]\right\}$$

oder

$$V(\alpha, \alpha, \alpha) = V_0 + \frac{\alpha^2}{b} S(a, \sqrt{ac}, c)\,^{*)},$$

---

*) Hieraus ergiebt sich nach Formel (19) zwischen den Oberflächen $S(a, \sqrt{ac}, c)$ und $S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{\sqrt{ac}}, \frac{1}{c}\right)$ die Relation:

$$S(a, \sqrt{ac}, c) = a^2c^2 S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{\sqrt{ac}}, c\right).$$

Bezeichnen wir hier das zum Pol $P(\alpha, \beta, \gamma)$ gehörige Volumen mit $V^a_{(\alpha,\beta,\gamma)}$, so wird:

$$V^a_{(\alpha,\beta,\gamma)} = V^a_\alpha + V^a_\beta + V^a_\gamma.$$

Die Werthe V^a_0 und V^a_α ergeben sich aus Formel (15) für $b=c$:

$$V^a_0 = \frac{\pi}{6}\left\{2a^3 + 3ab^2 + \frac{3b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\, l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\},$$

$$V^a_\alpha = \frac{a^2\pi}{4(a^2-b^2)}\left\{4a^3 - 2ab^2 - \frac{b^4}{\sqrt{a^2-b^2}}\, l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\}.$$

Daraus folgt:

$$(22) \qquad V^a_0 = \frac{\pi a^3}{3} + \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a} S(a, a, b),$$

da die Oberfläche eines **abgeplatteten** Rotationsellipsoides mit den Halbaxen $a > b$

$$S(a, a, b) = \pi\left\{2a^2 + \frac{ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\, l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\}$$

ist.

Um V^a_β zu finden, muss man, da Formel (14), des verschwindenden Nenners b^2-c^2 wegen, nicht angewandt werden kann, zum Werthe von C in Formel (13) zurückgehen. Bezeichnen wir nun mit $C_{b=c}$ den Werth von C, den es für $b=c$ annimmt, und mit $\left(\frac{\partial C}{\partial b}\right)_{b=c}$ den partiellen Differentialquotienten von C nach b, wenn in ihm nach vollzogener Differentiation $b=c$ gesetzt wird, so ergiebt sich:

$$C_{b=c} = \frac{\pi}{4}\left\{a^2b^2 + \frac{ab^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\, l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\},$$

folglich:

$$\frac{\partial C_{b=c}}{\partial b} = \frac{\pi}{4}\,\frac{ab}{(a^2-b^2)}\left\{2a^3 - 3ab^2 + \frac{4a^2b^2-3b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\, l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\}.$$

Da nun C in Bezug auf b und c symmetrisch ist, so ist nach Note 2.:

$$\frac{\partial C_{b=c}}{\partial b} = 2\left(\frac{\partial C}{\partial b}\right)_{b=c};$$

folglich:

$$V^a_\beta = 2\frac{\beta^2}{ab}\left(\frac{\partial C}{\partial b}\right)_{b=c}$$

oder

$$V^a_\beta = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}\left\{2a^3-3ab^2+\frac{4a^2b^2-3b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\,l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\};$$

mithin, da $V^a_\beta = V^a_\gamma$ ist:

(23)

$$V^a_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{6}\left\{2a^3+3ab^2+\frac{3b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\,l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\} \\ +\frac{\alpha^2\pi}{4(a^2-b^2)}\left\{4a^3-2ab^2-\frac{b^4}{\sqrt{a^2-b^2}}\,l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\} \\ +\frac{(\beta^2+\gamma^2)\pi}{4(a^2-b^2)}\left\{2a^3-3ab^2+\frac{4a^2b^2-3b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\,l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\}. \end{array}\right.$$

Formel (22) giebt den Satz:

Der Fusspunktenkörper V^a_0, dessen Pol im Mittelpunkte eines verlängerten Rotations-Ellipsoides mit den Halbaxen $a > b$ liegt, ist gleich dem vierten Theile einer Kugel mit der grossen Halbaxe des Ellipsoides als Radius plus dem Körper, welcher durch Multiplication von $\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a}$ mit der Oberfläche eines abgeplatteten Rotationsellipsoides mit denselben Axen entsteht.

Nach der Formel (17) ergiebt sich aus Formel (22):

$$(24)\qquad V^a_{(a,b,b)} = 4V^a_0 = \frac{4\pi a^3}{3} + \frac{b^2}{a}S(a,a,b).$$

Daraus ergiebt sich der Satz:

Sind in einem verlängerten Rotationsellipsoide als Basis die Coordinaten des Pols gleich den Halbaxen der Basis, so ist der Fusspunktenkörper gleich einer Kugel, deren Radius gleich der grossen Halbaxe der Basis ist, plus dem Körper, der durch Multiplication von $\frac{b^2}{a}$ mit der Oberfläche eines abgeplatteten Rotationsellipsoides mit denselben Axen entsteht.

Die den Werthen L, M, N, D entsprechenden Grössen L^2_a, M^2_a, N^2_a, D^2_a sind auch für das Rotationsellipsoid als Basis stets positiv, und da hier $M^2_a = N^2_a$ ist und $V^a_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ seinen Werth so lange behält, als die Gleichung $\alpha^2 L^2_a + (\beta^2+\gamma^2) M^2_a = D^2_a$ erfüllt wird, so ergiebt sich der Satz:

Ist die Basis ein verlängertes Rotationsellipsoid, so ist der geometrische Ort der Pole gleicher Fusspunktenkörper ein verlängertes, concentrisches Rotationsellipsoid, dessen Axen sich durch die Formel (23) bestimmen lassen.

Setzt man $\beta^2+\gamma^2=\varrho^2$, so behält $V^a_{\alpha,\beta,\gamma}$ seinen Werth, so lange ϱ^2 unverändert bleibt. Daraus folgt der Satz:

Liegen für ein verlängertes Rotationsellipsoid als Basis die Pole auf der Oberfläche eines Cylinders, dessen Axe mit der Axe der Basis zusammenfällt, so stehen die Zuwachse der Fusspunktenkörper im Verhältniss von α^2; mithin sind die Fusspunktenkörper, deren Pole auf derselben Cylinderoberfläche liegen und gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, einander gleich. Bleibt α unverändert, während ϱ sich ändert, so stehen die Zuwachse der Fusspunktenkörper im Verhältniss von ϱ^2.

Verlegt man ferner den Pol $P(\alpha,\beta,\gamma)$ in den Brennpunkt der grossen Axe, setzt also $\alpha^2=a^2-b^2$ und $\beta=\gamma=0$, so wird das zugehörige Volumen:

$$(25)\quad V^a_f = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{6}\left\{2a^3+3ab^2+\frac{3b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\, l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\} \\ +\frac{\pi}{4}\left\{4a^3-2ab^2-\frac{b^4}{\sqrt{a^2-b^2}}\, l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right\} \end{array} \right\} = \frac{4a^3\pi}{3}$$

Hieraus ergiebt sich der bekannte Satz:

Ist die Basis ein verlängertes Rotationsellipsoid, so ist der Fusspunktenkörper, dessen Pol im Brennpunkte der grossen Axe desselben liegt, gleich einer Kugel mit der grossen Halbaxe als Radius.

Setzt man endlich $\alpha=\beta=\gamma$, so folgt:

$$V^a_{(\alpha,\alpha,\alpha)} = \begin{cases} \frac{\pi}{6}\{2a^3+3ab^2+\frac{3b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\} \\ +\alpha^2\pi\{2a+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}l.\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\}, \end{cases}$$

also

$$(26) \qquad V^a_{(\alpha,\alpha,\alpha)} = V^a_0 + \frac{\alpha^2}{a} S(a,a,b)\,^{*)}$$

oder:

$$V^a_{(\alpha,\alpha,\alpha)} = \frac{\pi a^3}{3} + \frac{\alpha^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a} S(a,a,b).$$

Mithin erhalten wir den Satz:

Ist die Basis ein verlängertes Rotationsellipsoid, so ist der Fusspunktenkörper, dessen Pol in einer der Diagonalen des concentrischen Würfels liegt, gleich dem Minimumkörper plus dem Körper, welcher entsteht, wenn man die Oberfläche des abgeplatteten Rotationsellipsoides mit denselben Axen durch $\frac{\alpha^2}{a}$ multiplicirt; oder gleich dem vierten Theile einer Kugel mit der grossen Halbaxe der Basis als Radius plus dem Körper, der durch Multiplication von $\frac{\alpha^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a}$ mit der Oberfläche des abgeplatteten Rotationsellipsoides mit denselben Axen entsteht.

6.

Wählt man zur Basis ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit den Axen $2a < 2c$, so erhalten wir den vorigen analoge Sätze. Die Gleichung der Fusspunktenfläche geht für einen Pol $P(\alpha, \beta, \gamma)$, wenn $a = b$ gesetzt wird, über in:

$$\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}^2 = a^2\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\}+c^2(z-\gamma)^2.$$

---

*) Hieraus folgt nach Formel (19) die Relation zwischen den Oberflächen der Rotationsellipsoide:

$$S(a,a,b) = a^2b^2S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right).$$

ferner wird

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = 0, \quad \Delta = \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \sin^2 \delta} = 1,$$

$$F(k, \delta) = E(k, \delta) = \int_0^\delta d\delta = \delta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}.$$

Bezeichnen wir das zum Pol $P(\alpha, \beta, \gamma)$ zugehörige Volumen mit $V^c_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ und überhaupt alle auf das abgeplattete Rotationsellipsoid bezüglichen Grössen mit dem Index c, so erhalten wir nach Formel (15):

$$V^c_0 = \frac{\pi}{6} \{ 3a^2 c + 2c^3 + \frac{3a^4}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \},$$

$$V^c_\gamma = \frac{\gamma^2 \pi}{2(a^2 - c^2)} \{ a^2 c - 2c^3 + \frac{a^4}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \};$$

oder

$$(26^*) \qquad V^c_0 = \frac{\pi c^3}{3} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{c} S(a, c, c),$$

da die Oberfläche eines verlängerten Rotationsellipsoides mit den Halbaxen $a > c$

$$S(a, c, c) = 2\pi \{ c^2 + \frac{a^2 c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \}$$

ist.

Da $\frac{\partial C}{\partial a}$ in Formel (14) den verschwindenden Nenner $a^2 - b^2$ enthält, so müssen wir, um V^c_a zu entwickeln, den Werth von C aus Formel (13) zu Hülfe nehmen, und erhalten:

$$C_{a=b} = \frac{\pi a^4 c}{4\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} + \frac{\pi}{4} a^2 c^2;$$

folglich:

$$\frac{\partial C_{a=b}}{\partial a} = \frac{\pi}{4(a^2 - c^2)} \{ 3a^3 c^2 - 2ac^4 + \frac{3a^5 c - 4a^3 c^3}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \};$$

mithin, da nach Note 2. $\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{a=b} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_{a=b}}{\partial a}$ ist,

$$V^c_a = \frac{2a^2}{ac} \left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{a=b} = \frac{a^2 \pi}{4(a^2 - c^2)} \{ 3a^2 c - 2c^3 + \frac{3a^4 - 4a^2 c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \}.$$

Also ergiebt sich, da $V^c_\alpha = V^c_\beta$ ist:

(27)

$$V^c_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{cases} \frac{\pi}{6}\{2c^3+3a^2c+\frac{3a^4}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\} \\ +\frac{(\alpha^2+\beta^2)\pi}{4(a^2-c^2)}\{3a^2c-2c^3+\frac{3a^4-4a^2c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\} \\ +\frac{\gamma^2\pi}{4(a^2-c^2)}\{2a^2c-4c^3+\frac{2a^4}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\}. \end{cases}$$

Aus Formel (26) erhalten wir den S a t z :

Ist die Basis ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit den Halbaxen $a > c$, so ist der Fusspunktenkörper V^c_0, dessen Pol im Mittelpunkte der Basis liegt, gleich dem vierten Theile einer Kugel mit der kleineren Halbaxe als Radius plus dem Körper, welcher durch Multiplication von $\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{c}$ mit der Oberfläche eines verlängerten Rotationsellipsoides mit denselben Axen entsteht.

Ferner ist nach Formel (17) und (26*):

$$(28) \qquad V^c_{(a,a,o)} = 4V^c_0 = \frac{4\pi c^3}{3} + \frac{a^2}{c}S(a,c,c).$$

Mithin erhalten wir den S a t z :

Sind in einem abgeplatteten Rotationsellipsoide als Basis die Coordinaten des Pols gleich den Halbaxen der Basis, so ist der Fusspunktenkörper gleich einer Kugel, deren Radius gleich der kleineren Halbaxe der Basis ist, plus dem Körper, der durch Multiplication von $\frac{a^2}{c}$ mit der Oberfläche eines verlängerten Rotationsellipsoides mit denselben Axen entsteht.

Auch für das a b g e p l a t t e t e Rotationsellipsoid bleiben die aus Formel (27) sich ergebenden Grössen L^2_c, M^2_c, N^2_c, D^2_c stets positiv; mithin behält, da $L^2_c = M^2_c$ ist, $V^c_{\alpha,\beta,\gamma}$ seinen Werth, so lange die Gleichung $(\alpha^2+\beta^2)L^2_a + \gamma^2 N^2_a = D^2_a$ erfüllt wird.

Mithin erhalten wir den Satz:

Ist die Basis ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, so ist der geometrische Ort der Pole gleicher Fusspunktenkörper ein abgeplattetes, concentrisches Rotationsellipsoid, dessen Axen durch Formel (27) bestimmt werden.

Setzt man $\alpha^2+\beta^2=\varrho^2$, so behält $V^{c}_{\alpha,\beta,\gamma}$ seinen Werth, so lange ϱ^2 unverändert bleibt, und wir erhalten, wie bei dem verlängerten Rotationsellipsoide, den Satz:

Liegen in einem abgeplatteten Rotationsellipsoide als Basis die Pole auf der Oberfläche eines Cylinders, dessen Axe mit der Axe der Basis zusammenfällt, so stehen die Zuwachse der Fusspunktenkörper im Verhältniss von γ^2; mithin sind die Fusspunktenkörper, deren Pole auf derselben Cylinderoberfläche liegen und gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, einander gleich. Bleibt γ unverändert, während ϱ sich ändert, so stehen die Zuwachse der Fusspunktenkörper im Verhältniss von ϱ^2.

Verlegt man den Pol $P(\alpha,\beta,\gamma)$ in den Brennpunkt der Rotationsaxe $2c$, setzt also $\gamma^2=a^2-c^2$ und $\alpha=\beta=0$, so wird das zugehörige Volumen:

$$(29)\quad V^{c}_{f}=\pi\left\{a^2c+\frac{a^4}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right\}-\frac{2\pi c^3}{3}=2V^{c}_{0}-\frac{4\pi c^3}{3}.$$

Daraus ergiebt sich der Satz:

Liegt in einem abgeplatteten Rotationsellipsoide der Pol im Brennpunkte der Rotationsaxe, so ist der Fusspunktenkörper gleich dem doppelten Minimumkörper minus einer Kugel vom Radius der halben Axe.

Setzt man endlich auch hier $\alpha=\beta=\gamma$, so erhält man:

$$(30)\quad V^{c}_{(\alpha,\alpha,\alpha)}=V^{c}+\frac{\alpha^2}{c}S(a,c,c)\ ^{*)}$$

oder

---

*) Hieraus folgt nach Formel (19) die Relation zwischen den Oberflächen der Rotations-Ellipsoide:

$$S(a,c,c)=a^2c^2S\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a},\frac{1}{c}\right).$$

$$\underset{(\alpha,\alpha,\alpha)}{V^c} = \frac{\alpha^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}{c} S(a,c,c) + \frac{\pi c^3}{3}.$$

Wir erhalten somit den **Satz**:

Ist die Basis ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, so ist der Fusspunktenkörper, dessen Pol in einer der Diagonalen des concentrischen Würfels liegt, gleich dem Minimumkörper plus dem Körper, welcher entsteht, wenn man die Oberfläche des verlängerten Rotationsellipsoides mit denselben Axen durch $\frac{\alpha^2}{c}$ multiplicirt; oder gleich dem vierten Theile einer Kugel mit der halben Axe der Basis als Radius plus dem Körper, der durch Multiplication von $\frac{\alpha^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}{c}$ mit der Oberfläche des verlängerten Rotationsellipsoides mit denselben Axen entsteht.

7.

Wenn wir zum Schlusse die Kugel als Basis nehmen, so erhalten wir für $a=b=c$ für einen beliebigen Pol (α, β, γ) als Gleichung der Fusspunktenfläche:

$$\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}^2 = a^2\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\}.$$

Wir wollen die auf die Kugel bezüglichen Grössen mit dem Index s bezeichnen, dann müssen wir, um $\underset{(\alpha,\beta,\gamma)}{V^s}$ zu bestimmen, zum ursprünglichen Werthe von C,

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi}{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\psi}{c^2}\right)^2},$$

zurückgehen und erhalten:

$$C_{a=b=c} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi = \frac{\pi}{2} a^4.$$

Da nun C in Bezug auf a, b, c symmetrisch ist, so ist:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{a=b=c} = \left(\frac{\partial C}{\partial b}\right)_{a=b=c} = \left(\frac{\partial C}{\partial c}\right)_{a=b=c},$$

ferner

$$\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{a=b=c} = \frac{1}{3}\frac{\partial C_{a=b=c}}{\partial a} = \frac{2\pi a^3}{3} \text{ nach Note 2.;}$$

mithin nach Formel (11) und (12):

$$V^{s}_{0} = 2\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{a=b=c} = \frac{4\pi a^3}{3},$$

was die geometrische Betrachtung sofort ergiebt, und

$$V^{s}_{(\alpha,\beta,\gamma)} = V^{s}_{0} + \frac{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{a^2}\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{a=b=c},$$

oder

$$V^{s}_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{4\pi a^3}{3} + \frac{4\pi a}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \tag{31}$$

Setzt man $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = r^2$, so wird:

$$V^{s}_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{4\pi a^3}{3} + \frac{4\pi}{3}ar^2. \tag{32}$$

Nimmt man hierin $r = a$, so erhält man:

$$V^{s}_{a} = 2.\frac{4\pi}{3}a^3. \tag{33}$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) Ist die Basis eine Kugeloberfläche vom Radius a und ist r die Entfernung des Pols vom Mittelpunkte der Kugel, so ist der Fusspunktenkörper gleich der Kugel plus einem Rotationsellipsoide mit den Halbaxen a und r.

2) Liegt der Pol im Mittelpunkte der Kugel, so ist der Fusspunktenkörper, die Kugel selber, ein Minimum; liegt er aber auf der Kugeloberfläche, so ist derselbe doppelt so gross als die Kugel.

3) Ist die Basis eine Kugeloberfläche, so ist der geometrische Ort der Pole gleicher Fusspunktenkörper eine mit der Basis concentrische Kugeloberfläche.

Noten.

1. Die partiellen Differentialquotienten einer symmetrischen Function von n verschiedenen Variabeln gehen in einander

über, wenn man nach vollzogener Differentiation irgend zwei der Variabeln mit einander vertauscht.

2. Setzt man in einer **symmetrischen** Function von n **verschiedenen** Variabeln die Variabeln einander gleich, so ist der **totale** Differentialquotient (d) der Function nach **einer** der Variabeln gleich dem n**fachen partiellen** Differentialquotienten (∂) der Function nach derselben Variabelen, wenn darin nach vollzogener partieller Differentiation die Variabeln einander gleich gesetzt werden. Es ist also für eine symmetrische Function von n Variabeln $f(a, b, c, \ldots.)$:

$$\frac{df(a, b, c, \ldots.)_{a=b=c=\ldots.}}{da} = n\left(\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial a}\right)_{a=b=c=\ldots.}$$

Der **Beweis** für beide Sätze ist leicht zu führen.

3. Sind in einer **homogenen**, **symmetrischen** Function $m$ten Grades von n **verschiedenen** Variabeln die Producte aus irgend zwei partiellen abgeleiteten Functionen, multiplicirt mit der Variabeln, worauf sie sich beziehen, einander gleich, so sind **alle** so gebildeten Producte einander gleich, und es ist die Function selbst gleich der $\frac{m}{n}$ten Potenz des Products der Variabeln, multiplicirt mit einer willkürlichen Constante.

Beweis. In jeder symmetrischen Function $f(a, b, c \ldots.)$ von n verschiedenen Variabeln ist der partielle Differentialquotient nach einer der Variabeln, etwa nach a, eine symmetrische Function der übrigen Variabeln $b, c, d \ldots.$; denn es bleiben in

$$\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial a} = \frac{f(a+da, b, c \ldots.) - f(a, b, c \ldots.)}{\partial a}$$

beide Posten des Zählers rechts symmetrische Functionen von $b, c \ldots.$ Sind nun zwei beliebige der obigen Producte gleich, etwa:

$$a\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial a} = c\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial c},$$

so ist, da $a\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial a}$ in Bezug auf $b, c, d \ldots.$ symmetrisch ist, auch $c\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial c}$ in Bezug auf $b, c, d \ldots.$ symmetrisch, folglich ist:

$$a\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial a} = b\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial b} = c\frac{\partial f(a, b, c \ldots.)}{\partial c} = \ldots.$$

Da aber für jede homogene Function $F(a, b, c \ldots.)$ $m$ten Grades

$$a\frac{\partial F}{\partial a}+b\frac{\partial F}{\partial b}+c\frac{\partial F}{\partial c}+\ldots.=mF(a, b, c\ldots.)$$

ist, so erhalten wir, wenn $f(a, b, c\ldots.)$ eine homogene, symmetrische Function $m$ten Grades von n verschiedenen Variabeln ist:

$$a\frac{\partial f(a, b\ldots.)}{\partial a}=b\frac{\partial f(a, b\ldots.)}{\partial b}=c\frac{\partial f(a, b\ldots.)}{\partial c}=\frac{m}{n}f(a, b\ldots.),$$

also:

$$\frac{1}{f(a, b\ldots.)}\frac{\partial f(a, b\ldots.)}{\partial a}da=\frac{m}{n}\frac{da}{a},\quad \frac{1}{f(a, b\ldots.)}\frac{\partial f(a, b\ldots.)}{\partial b}=\frac{m}{n}\frac{db}{b}\text{ etc.};$$

folglich:

$$\frac{1}{f(a, b, c\ldots.)}\left\{\frac{\partial f(a, b\ldots.)}{\partial a}da+\frac{\partial f(a, b\ldots.)}{\partial b}db+\frac{\partial f(a, b\ldots.)}{\partial c}dc+\ldots\right\}$$
$$=\frac{m}{n}\left\{\frac{da}{a}+\frac{db}{b}+\frac{dc}{c}+\ldots.\right\}$$

oder

$$\frac{df(a, b, c\ldots.)}{f(a, b, c\ldots.)}=\frac{m}{n}\left\{\frac{da}{a}+\frac{db}{b}+\frac{dc}{c}+\ldots.\right\},$$

$$l.f(a, b, c\ldots.)=\frac{m}{n}l(abc)+\text{Const.},$$

$$f(a, b, c\ldots.)=K.(abc)^{\frac{m}{n}},$$

wenn K eine willkührliche Constante bedeutet.

XXXIII.

Andeutungen über astronomische Beobachtungen bei totalen Sonnenfinsternissen *).

Von

Herrn *Karl von Littrow*,

wirklichem Mitgliede der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien.

(Aus dem XXXIX. Bande, S. 625., des Jahrganges 1860 der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften besonders abgedruckt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Februar 1860.)

Wir besitzen nachgerade einige sehr lehrreiche Instructionen über die Beobachtungen, welche bei totalen Sonnenfinsternissen anzustellen sind; ich führe hier nur an: Arago's Aufsatz im *Annuaire du Bureau des longitudes* 1842, die von der *British Association* mit Zuratheziehung von Otto Struve 1851 herausgegebenen „*Suggestions to Astronomers*", dann Carrington's 1858 erschienene „*Information and Suggestions*", ferner aus der neuesten Zeit Faye's Vorträge in der Pariser Akademie (*Comptes rendus* 1859, October), endlich Airy's Bemerkungen in den *Monthly Notices* der R. Astr. Soc. Vol. XX., Nr. 2. So sehr ich den hohen

---

*) Diesen mir freundlichst mitgetheilten Aufsatz, welcher, den Gegenstand, um den es sich hier handelt, vorzugsweise aus richtigen Gesichtspunkten auffassend, in vorzüglicher Weise geeignet ist, Beobachter totaler Sonnenfinsternisse auf das hinzuweisen, worauf sie hauptsächlich ihre Aufmerksamkeit zu richten haben, lasse ich so schleunig, als es mir irgend möglich ist, in dem Archive abdrucken.

Der Herausgeber.

Werth dieser Schriften im Allgemeinen anerkenne, muss ich doch gestehen, dass ich in manchen wesentlichen Punkten mit denselben nicht übereinstimme, und halte mich durch den glücklichen Zufall, der mich die seltene Erscheinung zweimal so vollständig als möglich sehen liess, gleichsam für verpflichtet, auch mein Scherflein über das Was und Wie der eigentlich astronomischen Aufgabe beizutragen.

Vor allem muss ich nach meiner Erfahrung dringend empfehlen, alles an sich Unwesentliche wegzulassen. Die Zeit der Totalität ist auch im besten Falle eine so kurze, der Eindruck des Phänomenes ein so unwiderstehlich mächtiger, dass die ganze Fassung eines geübten Astronomen dazu gehört, um auch nur einiges Wenige mit voller Sicherheit wirklich zu b e o b a c h t e n. Ich rechne aber zu solchen unwesentlichen Dingen: Beleuchtung und Farbe von Himmel und Erde, Einwirkung auf Thier- und Pflanzenwelt, Ab- und Zunahme von Temperatur, Feuchtigkeit und Licht etc. In letzterer Beziehung wird ohnehin die unerlässige Bedingung, unter welcher allein solche Notirungen Sinn haben, nämlich: völlig reiner Himmel, hier nur sehr selten erfüllt, da eine mehr oder minder bedeutende Wolkenbildung mit zur Charakteristik der Erscheinung gehört.

Da in den meisten Fällen die Beobachtungs-Stationen nur nach längeren Reisen zu erreichen sind, an dem glücklichen Transporte der Instrumente aber alles gelegen ist, so sollte man diese auf das Allernothwendigste beschränken. Ein gutes Fernrohr von wenigstens 3 Zoll Oeffnung und eine verlässige, Secunden zeigende Taschenuhr scheinen mir der Hauptsache nach völlig hinreichend. Damit wird allerdings auf Angabe der Orts-Zeiten des Anfanges und Endes, ja selbst auf genaue Bestimmung der Dauer und oft auch auf bessere Kenntniss der geographischen Lage des Beobachtungsortes verzichtet, denn dazu bedarf man weiterer Instrumente und eines eigentlichen Chronometers. Wozu aber sollen hier diese Erschwerungen der ohnehin nicht leichten Aufgabe des reisenden Astronomen dienen? Zu Längenbestimmungen hat die heutige Wissenschaft längst weit bessere Mittel, zur Bestimmung der Fehler unserer Tafeln werden die Beobachtungen aller ständigen Sternwarten, denen die Finsterniss, wenn auch nur partiell, sichtbar ist, ebenso gutes und besseres Material sammeln, die genauen geographischen Coordinaten der Stationen endlich, wenn überhaupt in besonderen Fällen nöthig, mag man beliebig später und auf andere Weise sich verschaffen. Unsere Aufmerksamkeit wird wohl noch für eine geraume Zeit auf die Erforschung der Stellung, Dimension und Beschaffenheit überhaupt von Corona und Protu-

beranzen sich beschränken müssen, und es wird sich zunächst darum handeln, unseren Instrumenten die **hierzu** geeigneten Einrichtungen zu geben.

In dieser Hinsicht erlaube ich mir auf meine bei anderer Gelegenheit gemachten Bemerkungen (Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften mathem.-naturw. Cl. XVII. Bd., S. 411. u. ff., so wie Astron. Nachr. XXXII. Bd., S. 395., XXXIII. Bd., S. 129., XXXIV. Bd., S. 27. und XLII. Bd., S. 209. u. ff.) zurückzukommen, da mir durchaus kein Grund bekannt wurde, meine damaligen Ansichten irgend wesentlich zu ändern. Ich verweise in Bezug auf die nähere Begründung von manchen meiner Vorschläge auf die angeführten Quellen und will hier nur bei denjenigen Punkten länger verweilen, die auch Liebhabern der Wissenschaft zugänglich sein sollen.

Corona und Protuberanzen verlangen ganz verschiedene Kraft des Fernrohres. Die Eigenthümlichkeiten der Corona verwischen sich immer mehr, je stärker die angewendete Vergrösserung ist, und für diesen Theil der Escheinung wäre ein Ocular am zweckmässigsten, welches, wie bei **Arago's** Versuchen über die Fähigkeit des freien Auges die Jupitersatelliten auszunehmen, gar nicht vergrösserte, sondern eben nur ein scharfes Bild gäbe. Ueberdies ist bei Untersuchung der Corona sehr zu wünschen, dass man die ganze Mondscheibe beständig überblicken könne. An den Protuberanzen hingegen gibt es Detail zu prüfen, das sich erst bei etwa 60maliger Vergrösserung in hinlänglicher Deutlichkeit zeigt. Am besten also würde jede dieser Aufgaben einem eigenen Beobachter zufallen. Wenn aber schon ein und derselbe Beobachter beides bestreiten soll, so müsste, da an ein zeitraubendes Wechseln und wiederholtes Richten etwa zweier Fernrohre nicht zu denken ist, das Instrument entweder, was gewiss am bequemsten, nach **Liais** mit einem Doppelfernrohre oder nach meinem Vorschlage mit einem Doppel-Oculare versehen werden, das in Schieberform oder durch eine excentrische Scheibe eine schnelle Aenderung der Vergrösserung zuliesse. Dieses Ocular müsste so construirt sein, dass jeder der beiden Einsätze auf das Auge des Beobachters bereits eingestellt ist und so bleibt, wenn es in Thätigkeit gesetzt wird. Mit einem solchen Doppel-Oculare vermag auch allenfalls der einzelne Beobachter dem Bedürfnisse zu entsprechen, beliebig oft entweder den ganzen Umkreis des Mondes zu übersehen oder irgend hervorstechende Gegenden genau zu erforschen. Immer aber bleibt dies nur ein Nothbehelf, und eigentlich stimme ich, wie gesagt, für Trennung der Aufgaben.

Für die Messung der Lage und Grösse aller Erscheinungen

am Rande der beiden Himmelskörper ist der hauptsächlichsten mechanischen Einrichtung nach das gewöhnliche Positions-Mikrometer entschieden der angemessenste Apparat, wenn man folgende Modificationen in Gebrauch und Construction eintreten lässt:

1. Die zur Messung des Positionswinkels dienende Linie kann zum Behufe der Messung nicht wie sonst in den Radius gelegt, sondern muss an der betreffenden Stelle des Mondrandes mit diesem in Berührung gebracht werden. Die normale Lage dieser Linie ist parallel zum Aequator und mit hier völlig hinreichender Genauigkeit dadurch zu bestimmen, dass man kurz vor und nach der Beobachtung den Sonnenrand oder einen Sonnenfleck bei ruhig stehendem Rohre längs der Linie hingehen lässt und dieselbe so lang dreht, bis das Object in der ganzen Ausdehnung des Gesichtsfeldes die gleiche Entfernung von der Linie behält. Die Lesung am Positionskreise, welche dieser Stellung der Linie entspricht, wird notirt, und damit jeder in dem gebräuchlichen Sinne von Nord über Ost gezählte Positionswinkel unmittelbar combinirt. Durch Bemerkungen in einigen der vorerwähnten Instructionen veranlasst, hebe ich ausdrücklich hervor, dass es hierbei keinen wesentlichen Unterschied macht, ob das Fernrohr äquatorial montirt ist oder nicht; das Verfahren ist bei parallaktischer oder ganz einfacher horizontaler Aufstellung des Teleskopes gleich anwendbar. Faye, der diesen ursprünglich von Bessel (Astr. Nachr. XVI. Bd., S. 161.) für ähnliche Zwecke gemachten Vorschlag adoptirt, will durch eine Libelle die primitive Lage jener Linie auf den Horizont bezogen wissen, was mir keine Verbesserung der Bessel'schen Idee scheint, da es das Instrument complicirt, die Operation schwieriger und wohl auch ungenauer macht, endlich unnützerweise den Winkel zwischen Declinations- und Verticalkreis in's Spiel bringt.

2. Der Positionskreis soll im Inneren des Rohres angebracht sein, so dass man den Positionswinkel ohne Hilfe einer Lampe und ohne das Auge vom Fernrohre zu entfernen, ablesen kann. Herr Faye hat vollkommen Recht, sich gegen solchen inneren Positionskreis zu erklären, unter der Voraussetzung, dass man, wie bei dieser Einrichtung bisher immer geschah, die Positionswinkel unmittelbar auf den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes bezogen denkt, denn damit ist auch die in der Praxis so gut wie unausführbare Annahme gemacht, dass man das Centrum der Mondscheibe beständig auf jenem Mittelpunkte des Gesichtsfeldes erhalte; er thut aber gewiss nicht gut daran, diese Einrichtung auch dann zu verwerfen, wenn man den Positionswinkel durch Tangirung der Peripherie des Mondes misst, wo von solchem beständigen Centriren weiter nicht die Rede ist.

3. Statt Fäden sollte ein dünnes, wellenloses und planparalleles Glas im Brennpunkte eingesetzt werden, das durch zwei auf einander senkrechte Reihen von feinen Linien in Quadrate getheilt ist. Die eine Reihe dieser Linien vertritt den in seiner normalen Stellung zum Aequator parallelen Faden, die andere Reihe den beweglichen Faden des gewöhnlichen Positions-Mikrometers, und es reicht, nachdem irgend eine Linie der ersten Reihe mit dem betreffenden Punkte der Mondscheibe in Berührung gebracht und der Positionswinkel so bestimmt ist, ein einziger Blick ohne alle weitere Manipulation hin, die Dimensionen der fraglichen Objecte nach allen Richtungen festzustellen. Ich habe mich bei der totalen Sonnenfinsterniss im Jahre 1851 auf das beste überzeugt, dass eine solche Glasplatte dem deutlichen Ausnehmen auch der zartesten Objecte nicht den geringsten Eintrag thut, und dass man die auf das Glas geritzten Linien, wenn auch so fein, dass man sie mit freiem Auge kaum bemerkt, auf dem lichten Hintergrunde der Corona völlig bestimmt sieht, während z. B. D'Abbadie (*R. A. S. M. N.* Vol. XVIII., pag. 312.) die unangenehme Erfahrung machte, dass ihm die Fäden verschwanden. Hauptsächlich desshalb, dann aber auch wegen der grösseren Sicherheit vor zufälligen Beschädigungen und weil man auf Glas beliebig enge und genau äquidistante Linien graviren kann, ziehe ich hier die Glasplatte dem Fadennetze vor. Der in 2. besprochene innere Positionskreis könnte füglich auf dieser Glasscheibe angebracht werden, wo dann der Index an der Fassung fest sein müsste, während, wenn der Positionskreis am Rande des Diaphragma etwa in einer Zähnung bestünde, die Glasplatte den Index an einem beliebigen Punkte ihres Umfanges zu tragen hätte. Wenn das Ocular die oben besprochene Einrichtung eines Doppeleinsatzes erhält, so wird man wohl am besten jeden Einsatz mit einem besonderen Positionskreise versehen. Die Messung der Dimensionen wird um so genauer sein können, je enger die Linien gezogen werden. Ich fand bei einem Fernrohre von 3 Zoll Oeffnung mit 60maliger Vergrösserung eine gegenseitige Entfernung der Linien von 0'7 Bogen, bei 11maliger Vergrösserung das Zehnfache dieser Distanz ganz entsprechend, da man leicht auf das Zehntel solcher Intervalle schätzt und damit hinreichend genaue Resultate erhält. Man wird gut thun, diejenige Reihe von Linien, welche zur Messung des Positionswinkels dienen, etwa durch einseitige Abblendung am Rande des Gesichtsfeldes kenntlich zu machen, um bei allenfalls nöthigen grösseren Drehungen der Glasscheibe diese Reihe von Linien nicht mit der anderen zu verwechseln, und so um 90° falsche Winkel zu erhalten. Vielleicht findet man es bequem, die Lamelle, mit welcher diese Abblendung bewirkt wird, mit Zähnen zu versehen,

die als Zähler für die Linien des Mikrometers dienen. Nothwendiger ist solche Zählung für stärkere Vergrösserungen bei der anderen Reihe von Linien, denen dann die grösseren Dimensionen zu messen zufällt. Somit wäre es für solche Vergrösserungen am zweckmässigsten, diese zweite Reihe von Strichen, welche ursprünglich auf den Aequator senkrecht gestellt wird, abzublenden, und die erste, zum Aequator parallele, zum Unterschiede frei zu lassen. Die Glasplatte muss, wie man sieht, von aussen drehbar sein, könnte also hier einen zweiten, äusseren Positionskreis haben, der genauer getheilt wäre, als der innere, und an dem man durch Niederdrücken eines abfärbenden oder sich eindrückenden Stiftes die Lesungen am inneren Positionskreise ergänzen und controliren würde. Diesen registrirenden äusseren Kreis allein und ohne den inneren anzubringen, wie **Faye** vorschlägt, hielte ich wegen möglicher Verwechslungen der einzelnen Messungen für bedenklich.

Um die Uhrzeiten, deren möglichst häufige und genaue Notirung hier von grosser Wichtigkeit ist, für die verschiedenen Wahrnehmungen zu erhalten, wird man sich vielleicht am besten eines kleinen Chronographen bedienen, d. h. einer Vorrichtung, die ein Rad von wenigen Zollen Durchmesser während einer kurzen Zeit gleichförmig dreht, auf dessen breiter Felge ein Papierstreifen so befestigt wird, dass ein darüber angebrachter Stift durch Niederdrücken Zeichen darauf macht. Die hiesige Sternwarte besitzt schon seit langem einen solchen Apparat als Hilfsmittel zur Mappirung von Sternen, und **Airy** macht jetzt einen ähnlichen Vorschlag für den hier besprochenen Zweck (*R. A. S. Monthly Notices* Vol. XX, pag. 63). Ich halte einen, wenn auch nur zur Noth erst an Ort und Stelle geschulten Gehülfen bei der Beobachtung für beinahe unentbehrlich, und diesem würde ich das Geschäft zutheilen, den Stift des Chronographen in Thätigkeit zu setzen, so oft er vom Beobachter dazu das Signal erhält; die Vergleichung des Chronographen mit der Uhr vor und nach der Beobachtung gäbe die entsprechenden Momente in Uhrzeit. Dieser Gehülfe hätte auch schnell zu Papier zu bringen, was man ihm dictirt und, im Falle kein Chronograph vorhanden, an der Uhr die Secunden während des Verlaufes der totalen Finsterniss beständig laut zu zählen.

Mit solcher Vorbereitung wäre, glaube ich, allen billigen Anforderungen entsprochen und die kurze Dauer des Phänomenes in streng astronomischem Sinne thunlichst auszunutzen.

Es erübrigen mir nun noch einige allgemeine Bemerkungen.

Das grosse Princip des Theilens der Arbeit wird hier mehr als irgendwo in Anwendung zu kommen haben. Wenn die Anzahl der Beobachter auf einer Station es zulässt, könnte sehr zum

Vortheile der Sache jedem derselben ein gewisser Theil der Peripherie des Mondes, z. B. ein bestimmter Quadrant zur Ueberwachung zugewiesen werden. Es würde, wie auch Carrington sehr richtig bemerkt, ungleich mehr Nutzen bringen, wenn man eine bestimmte, an sich sehr beschränkte Gegend des Sonnenumkreises mit ungetheilter Aufmerksamkeit betrachtete, als wenn man in dem Streben, alles bemerken zu wollen, nur vage Wahrnehmungen zu Stande brächte. Jedenfalls sollten etwa auf Polarisations-Versuche, Anwendung von Actinometern und dergleichen sich nur solche Beobachter verlegen, neben denen andere jene Hauptaufgaben bereits vollständig besorgen. Insbesondere wird, wenn nicht unerwartet günstige Verhältnisse behülflich sind, das Aufsuchen von neuen Unteren Planeten eine grosse Anzahl von Beobachtern erfordern, deren jeder einen gewissen ganz kleinen Theil des Himmels zu durchforschen hätte.

Hinsichtlich der Corona und der Protuberanzen hat mir immer die einfachste Hypothese die beste geschienen, nämlich: dass sie Medien angehören, welche die Photosphäre der Sonne umhüllen, und ich glaube, dass jeder Astronom bei dem Anblicke der Erscheinung sich dieser Ansicht von selbst zuneigen wird. Dafür spricht mir hauptsächlich der Umstand, dass die Form der Protuberanzen sich in der Corona fortsetzt, und diese an denselben Stellen ganz ähnlich gestaltete Hervorragungen zeigt, so wie, dass offenbar die Protuberanzen nicht immer in einer Ebene liegen, sondern häufig sich auf einander projiciren. Es schiene mir ferner für diese Frage so ziemlich entscheidend, wenn man den niedrigeren und dafür auf einen grösseren Theil der Peripherie des Mondrandes sich ausdehnenden Protuberanzen mehr Aufmerksamkeit schenkte, als dies bisher der Fall war. Ich bin der Meinung, dass diese niedrigen Ketten von Protuberanzen sich überall dort am ersten zeigen werden, wo grössere Theile der Ränder der Sonne und des Mondes in geringer gegenseitiger Distanz beisammen verweilen, also bei den Punkten der inneren Berührung, so wie eher auf den Grenzen der Totalzone, als auf der Linie der Centralität, und dass man durch eine gehörige Verbindung der Beobachtungen von verschiedenen Oertlichkeiten sich von der Continuität dieses rothen Saumes überzeugen werde.

Es ist übrigens eine merkwürdige, von mir selbst wiederholt beobachtete Eigenschaft dieser Protuberanzen, dass man dieselben zwar bleich und farblos, aber doch ganz in den Umrissen ihrer völligen Ausbildung einige Secunden vor Beginn und nach dem Ende der totalen Finsterniss sieht. Es wird schon desshalb, so wie aus anderen nahe liegenden Gründen gerathen sein, kurz

vor dem Verschwinden der Sonne das Blendglas vom Fernrohre abzunehmen und dasselbe erst, nachdem von der Sonne mehr wieder erschienen ist, als das Auge ertragen kann, wieder vorzustecken. Nur so, nämlich ohne Blendglas, wird man auch über Baily's „*beads*" entscheiden können, besonders wenn man die Vorsicht braucht, diejenigen Theile des Mondrandes, welche bestimmt sind für die betreffende Station die letzte und erste Phase vor und nach der totalen Finsterniss zu bilden, genau zu betrachten und etwa zu Papier zu bringen, da an der Lage der Mondberge hier alles gelegen ist.

Eine wesentliche Vorbereitung, der leider von den Vorausberechnern beinahe nie entsprochen wird, ist die Kenntniss des Punktes der Mondscheibe, bei welchem die zweite innere Berührung stattfindet. Die Corona wird in der ganzen Gegend des Wiedererscheinens der Sonne so licht, dass den Beobachter besonders bei stärkeren Vergrösserungen unwillkürlich die Besorgniss ergreift, er habe vielleicht nicht den richtigen Punkt im Auge. Dass aber solche Unruhe vom Uebel ist, brauche ich nicht erst zu sagen. Kennt der Beobachter hingegen den Positionswinkel des Endes der Totalität, und lässt er sich etwa 30 Secunden vor diesem Ende von seinem Gehülfen avertiren, so ist eine einfache Drehung des Mikrometers hinreichend, um mit aller Bestimmtheit zu erfahren, wo man den ersten Lichtblitz wieder zu erwarten hat.

Was den vermutheten Zusammenhang der Protuberanzen mit den Flecken und Fackeln der Sonne betrifft, so sollten die reisenden Astronomen es den stabilen Observatorien überlassen, für die Beantwortung dieser Frage die nöthigen Daten zu sammeln. Das Augenmerk dieser letzteren wird darauf gerichtet sein müssen, möglichst genaue Kenntniss von der Lage der Flecken und Fackeln zu geben, die während der totalen Finsterniss am Rande der Sonne stehen, also an sich unsichtbar sind. Thunlichst zahlreiche Beobachtungen der Sonnenflecken mit zweckmässig eingerichteten Mikrometern etwa eine Woche vor, und ebenso eine Woche nach der Finsterniss werden die Frage, welche Stellung die in Betracht kommenden Flecken während der Finsterniss einnahmen, ganz besonders dann hinreichend genau beantworten, wenn man der Reduction für jeden einzelnen Fleck jene Elemente der Rotation des Sonnenkörpers zu Grunde legt, welche aus den Positionen gerade dieses Fleckes sich ergaben. Die Reduction wäre allenfalls in der von mir befolgten Art (A. N. Bd. XLII., S. 209., Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften mathem.-naturw. Cl. XVII. Bd., S. 411.) vorzunehmen. Die Sonnenfackeln, deren unmittelbare Beobachtung schwer halten dürfte, könnten

auf die Flecken bezogen und ihre relative Lage gegen diese möglichst vollständig angegeben werden. Während der vierzehn Tage, in deren Mitte die Finsterniss fiele, sollte nur eben die Entwickelung von Flecken und Fackeln thunlichst überwacht werden.

Unter den Beobachtungen, die mit freiem Auge anzustellen sind, empfehle ich wiederholt (A. N. Bd. XXXII., S. 395.) die Feststellung derjenigen Orte, wo entweder die totale Finsterniss nur ein paar Secunden gedauert oder ein ganz kleiner Lichtfunke der Sonne übrig blieb. Wenn man dafür Sorge trägt, die Oertlichkeit der Station genau anzugeben, werden solche Bemerkungen über die eigentliche Lage der nördlichen und südlichen Grenzlinie des Totalitätsgürtels von grossem Nutzen und vielleicht den zu ähnlichem Zwecke vorgeschlagenen photographischen Abbildungen des Mondes vorzuziehen sein.

Schliesslich wünsche ich, dass recht viele Astronomen es über sich gewinnen mögen, ihr Auge festgebannt am Fernrohre zu lassen, und auf den Genuss der Schönheit des Phänomenes im Ganzen zu verzichten. Nur wer dieses Opfers fähig ist, wird wirklich Erspriessliches leisten.

Nachschrift des Herausgebers.

Als ich eben dieses Heft zu schliessen im Begriff bin, erhalte ich Nr. 1244. der „Astronomischen Nachrichten. 1860. März 29.", worin sich ein sehr lesenswerther Aufsatz: „Ueber die Polarisation des Lichtes der Corona bei totalen Sonnenfinsternissen" von Herrn E. Edlund, Professor der Physik an der k. Akademie der Wissenschaften in Stockholm, befindet, in welchem derselbe Nachricht giebt über seine bei der in Schweden eingetroffenen totalen Sonnenfinsterniss vom 28sten Juli 1851 zu Wernamo, einem beinahe auf der Linie der Centrallinie der totalen Finsterniss liegenden Orte in Schweden, angestellten Beobachtungen. Aus diesen mit grosser Sorgfalt angestellten Beobachtungen ergab sich ganz unzweideutig, dass das Licht der Corona polarisirt war, und es war auch möglich, die Richtung der Polarisationsebene zu bestimmen. Wenn nun Herr Edlund am Ende seines sehr beachtenswerthen Aufsatzes sagt:

> „Die Polarisation und die Richtung der Polarisationsebene im Lichte der Corona sind schwer zu erklären, wenn man nicht annimmt, dass der Sonnenkörper von einer Atmosphäre umgeben sei, die ohne selbstleuchtend zu sein das Vermögen

besitzt, die Lichtstrahlen zu reflektiren. Nimmt man die Existenz einer solchen Atmosphäre an, so werden die von mir beobachteten Erscheinungen davon eine nothwendige Folge sein und können vorausgesagt werden. Von übrigen Umständen, welche für das Vorhandensein einer Sonnen-Atmosphäre sprechen, will ich bloss die erst im Jahre 1852 von Herrn Secchi gemachten Wahrnehmungen hier erwähnen, zufolge deren die Sonnenscheibe von der Mitte mehr Wärme als von Punkten näher an der Peripherie ausstrahlt, woraus man die Folgerung schon gezogen hat, dass die Photosphäre von einer wärmenden absorbirenden Atmosphäre umgeben sein möge;"

so stimmen wir ihm darin ganz bei, und sind der Meinung, dass auf diese Weise ein neuer Beweis geliefert ist, dass die bei totalen Sonnenfinsternissen vorkommenden merkwürdigen Erscheinungen lediglich der Sonne und nicht dem Monde angehören, wenn man auch hiervon nicht schon anderweitig längst überzeugt wäre.

XXXIV.

Miscellen.

Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise zu suchen.

Von Herrn Dr. W. Stammer.

Die Gleichungen der beiden Kreise seien

$$(y-h')^2+(x-g')^2=r'^2,\quad (y-h'')^2+(x-g'')^2=r''^2.$$

Bezeichnen wir dann mit x', y' die Berührungspunkte des ersten und mit x'', y'' die des zweiten Kreises, so hat man noch die beiden Gleichungen:

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{x'-g'}{y'-h'}=-\frac{x''-g''}{y''-h''}.$$

Erhebt man die letzte Gleichung in's Quadrat, addirt auf beiden Seiten 1, so kommt:

$$\frac{y'-h'}{y''-h''}=\pm\frac{r'}{r''}=\frac{x'-h'}{x''-h''}.$$

Dadurch liefert die erste der beiden letzten Gleichungen:

$$(y'-h')(h'-h'')+(x'-g')(g'-g'')=r'(-r'\mp r'').$$

Da diese Gleichung an die der Polaren erinnert, multiplicire man, um in's zweite Glied r'^2 zu erhalten, mit $\frac{r'}{-r'\mp r''}$; das gibt

$$(y'-h')\frac{h'-h''}{-r'\mp r''}r'+(x'-g')\frac{g'-g''}{-r'\mp r''}r'=r'^2.$$

Jetzt setze man:

$$\frac{h'-h''}{-r'\mp r''}r'=y_3-h',\quad \frac{g'-g''}{-r'\mp r''}r'=x_3-g';$$

daher

$$y_3=\frac{h''r'\pm h'r''}{r'\pm r''},\quad x_3=\frac{g''r'\pm g'r''}{r'\pm r''}$$

und

$$(y'-h')(y_3-h')+(x'-g')(x_3-g')=r'^2.$$

Die gesuchten Berührungspunkte sind also die Durchschnittspunkte des Kreises I mit der Polaren des Punktes x_3, y_3. Da nun zwei solche Punkte x_3, y_3 existiren (wegen des Zeichens $\pm$), so gibt es also im Allgemeinen vier Berührungspunkte, mithin auch vier Tangenten. Sollen diese Punkte existiren, so muss die Polare den Kreis schneiden, mithin die Punkte x_3, y_3 ausserhalb oder auf dem Kreise liegen, also $(x_3-g')^2+(y_3-h')^2\overline{\overline{>}}r'^2$, woraus man die bekannten Bedingungen ableitet. — Andererseits zeigen die Ausdrücke für x_3, y_3, dass diese Punkte die Centrale im Verhältniss der Halbmesser theilen und mithin mit den Mittelpunkten harmonische Punkte sind. Nimmt man nun einen dritten Kreis hinzu und nennt die neuen beiden Paare Aehnlichkeitspunkte x_2, y_2 und x_1, y_1, so hat man:

$$y_3=\frac{h''r'\pm h'r''}{r'\pm r''},\quad y_2=\frac{h'''r'\pm h'r'''}{r'\pm r'''},\quad y_1=\frac{h'''r''\pm h''r'''}{r''\pm r'''};$$

$$x_3=\frac{g''r'\pm g'r''}{r'\pm r''}\ \text{u. s. w.}$$

Daher

$$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{h''r'\pm(h'r'')\pm h''r'''\mp(h'''r'')-h'''r'\mp h'r'''}{g''r'\pm(g'r'')\pm g''r'''\mp(g'''r'')-g'''r'\mp g'r'''}.$$

Die Zeichen der eingeklammerten Ausdrücke rühren von y_3, x_3 her, und da diese von x_2, y_2 unabhängig sind, so folgt, dass die eingeklammerten Ausdrücke unter sich und ebenso die nicht eingeklammerten unter sich zugleich mit dem oberen oder dem unteren genommen werden müssen, dass aber die Zeichen der eingeklammerten von den anderen nicht abhängen. Eben dieselbe Bemerkung gilt für

$$\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\frac{\mp(h''r')-h'r''\pm h''r'''+h'''r''\pm(h'''r')\mp h'r'''}{\mp(g''r')-g'r''\pm g''r'''+g'''r''\pm(g'''r')\mp g'r'''}.$$

Zur Bildung dieses Ausdruckes muss man erst Zähler und Nenner von y_3, x_3 mit ± 1 multipliciren, so dass

$$y_3=\frac{\pm h''r'+h'r''}{\pm r'+r''}.$$

Beachtet man nun, dass die eingeklammerten Glieder in beiden Brüchen zugleich mit dem oberen oder unteren Zeichen genommen werden müssen, weil sie sich auf denselben Punkt beziehen, und dass die oberen Zeichen dem inneren, die untern dem äusseren Aehnlichkeitspunkte entsprechen, und dass ferner drei von den sechs Punkten in einer Geraden liegen, wenn $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$, so erhält man aus der Vergleichung der beiden Brüche für die verschiedenen Zeichen sehr leicht den bekannten Satz von den vier Aehnlichkeitslinien.

Wenn auch dieser Beweis etwas weitläufig ist, so hat er doch den Vortheil, sehr allgemein zu sein und nicht (wie der von Plücker) einen anderen Lehrsatz vorauszusetzen.

Aus einem Schreiben des Herrn Dr. Zehfuss in Heidelberg an den Herausgeber.

Ich habe eine unter gewissen Voraussetzungen sehr allgemeine Formel gefunden, welche ein bestimmtes Integral mit den Grenzen ∞ und 0 auf ein anderes zwischen denselben Grenzen zurückführen lehrt, wobei sich häufig Bestimmungen ergeben. Ueberdiess erhält man wegen Einführung des Imaginären allemal zwei Formeln auf einmal. Eine Skizze desjenigen Theils meiner Formel, welcher zur Herleitung des einen von Herrn Lector Lindman*) erwähnten Integrales hinreicht, lässt sich wie folgt geben.

Um $\int_0^\infty F(x)dx$ zu verwandeln, denke man es als einen speziellen Fall $\psi(0)$ von

*) Heft I. dieses Theils. S. 118.

$$\psi(y) = \int_0^\infty F(x + y\sqrt{-1})\,dx.$$

1) Unter Voraussetzung der Differentiirbarkeit dieses Integrales nach jedem positiven Werthe von y (wozu vor allen Dingen die Endlichkeit und Stetigkeit von $F(x+yi)$ für alle Werthe von x und y zwischen 0 und ∞ gehört) ergibt sich:

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial y} = i\int_0^\infty F'(x+yi)\,dx = iF(\infty + yi) - iF(yi).$$

Es sei nun ν so bestimmt, dass für $n = \infty$

$$\lim (n+yi)^\nu F(n+yi) = L$$

werde, wo L einen constanten Werth vorstellt. Nun ist

$$\frac{\partial\psi(y)}{\partial y} = \frac{Li}{(n+yi)^\nu} - iF(yi),$$

also

$$\psi(y) = \frac{(1-\nu)\,Li}{(n+yi)^{\nu-1}} - i\int F(yi)\,dy.$$

2) Wenn nun $\nu > 1$, so fällt rechter Hand das erste Glied weg, und indem man für y die Grenzen ∞ und 0 annimmt, entsteht

$$\psi(\infty) - \psi(0) = -i\int_0^\infty F(yi)\,dy.$$

3) Falls daher $\psi(\infty) = \int_0^\infty F(x+\infty i)\,dx$ verschwindet, bleibt, da $\psi(0) = \int_0^\infty F(x)\,dx$ ist:

$$\int_0^\infty F(x)\,dx = i\int_0^\infty F(xi)\,dx.$$

In dieser Fundamentalformel setze man nun

$$F(x) = \frac{x^{2\mu-1} - i^{2\mu-1}}{1+x^2}, \quad \text{wo } \mu < 1;$$

alsdann sind die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, also ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-1} - i^{2\mu-1}}{1+x^2}\,dx = i^{2\mu}\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-1} - 1}{1-x^2}\,dx,$$

d. h. nach Trennung des Realen und Imaginären:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-1}}{1+x^2}dx = \cos(2\mu-1)\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} + \cos\mu\pi\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-1}-1}{1-x^2}\,dx$$

und

$$-\sin(2\mu-1)\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\sin\mu\pi\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-1}-1}{1-x^2}dx;$$

aus beiden Gleichungen ergibt sich durch Auflösen:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-1}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2\sin\mu\pi},\quad \int_0^\infty \frac{x^{2\mu-1}-1}{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\mu\pi.$$

Das andere von Herrn Lector Lindman erwähnte Integral war

$$J=\int_0^\infty \frac{\sin ax\sin bx}{x}dx,\quad a>b.$$

Man hat

$$J=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(a-b)x-\cos(a+b)x}{x}dx.$$

Da nun nach einer bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-\cos cx}{x}dx=0$$

ist, so lässt sich der vorige Werth auch setzen:

$$J=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-(a-b)x}-e^{-(a+b)x}}{x}=\tfrac{1}{2}l\frac{a+b}{a-b}.$$

Nachsatz. Um den Werth des bestimmten Integrales

$$J=\int_0^\infty \frac{\sin^{n+k+1}x\,dx}{x^{n+1}}$$

zu ermitteln, worin n und k gerade positive Zahlen sind, vertausche man x mit ax; diess gibt:

$$a^n.J=\int_0^\infty \frac{\sin^{n+k+1}(ax)}{x^{n+1}}dx.$$

Nun sei

$$\sin^{n+k+1}(ax)=A_1\sin ax+A_3\sin 3ax+\ldots=\Sigma A_m\sin max,$$

wo A_1, A_3.... Binomialcoefficienten vorstellen. Alsdann ist

$$a^n.J=\Sigma A_m\int_0^\infty \frac{\sin max}{x^{n+1}}dx.$$

Differentiirt man beiderseits $n$mal nach a, so kommt:

$$n!J=\Sigma A_m.m^n.(-1)^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty \frac{\sin max}{x}dx=\frac{\pi}{2}(-1)^{\frac{n}{2}}\Sigma m^n A_m,$$

also ist

$$J=\frac{\pi}{2^{n+k+1}}\cdot\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n}\left[1^n.(n+k+1)_{\frac{n+k}{2}}-3^n(n+k+1)_{\frac{n+k-2}{2}}+\ldots\right].$$

Heidelberg, den 3. Februar 1860.

Literarischer Bericht
CXXXIII.

Joseph Grailich,

Professor der höheren Physik an der Universität zu Wien,

starb, kaum 30 Jahre alt, in Wien an der Schwindsucht am 13. September 1859.

Der Herausgeber des Archivs ist durch die Nachricht von dem Dahinscheiden des obigen trefflichen jungen mathematischen Physikers wahrhaft erschüttert worden. Er hatte im Jahre 1856 das Glück, denselben persönlich kennen zu lernen, namentlich einige ihm ewig unvergessliche Stunden in dem engeren Familienkreise eines von ihm wahrhaft hochverehrten Mannes mit dem so früh Dahingeschiedenen zu verleben, und glaubte damals in demselben, im höchsten Grade angezogen durch die grosse Liebenswürdigkeit und Anspruchslosigkeit seines Wesens, einen jungen Mann von blühender Gesundheit zu erkennen, — wenigstens seiner äusseren Erscheinung und dem ersten dadurch hervorgebrachten Eindruck nach, worin man sich ohne nähere Kenntniss freilich leider nur zu oft täuschen kann. — Desto erschütternder und betrübender musste natürlich die Nachricht von seinem Tode wirken. Was Grailich der Wissenschaft war, zeigen seine Arbeiten, und Alle, die ihm näher standen, namentlich seine trefflichen Lehrer, wissen es; mehr über seinen Werth zu sagen, ist jetzt hier nicht der Ort; es kann nur der Wunsch ausgesprochen werden, dass derselbe recht bald in einem ausführlichen Necrolog, um dessen Einsendung der Herausgeber des Archivs dringend bittet, vollständig gewürdigt werden möge. G.

Mechanik.

Einleitung in die Mechanik. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens

von H. B. Lübsen. IV. Theil. Fortsetzung der Dynamik fester Körper. V. Hydrodynamik. VI. Aerodynamik. Mit 51 Figuren im Text. Hamburg. O. Meissner.

Wir freuen uns, dass unser im Literar. Ber. Nr. CXXIX. S. 2. ausgesprochener Wunsch, dass noch die auf dem obigen Titel angegebenen Theile der Mechanik als Fortsetzung der früheren in der genannten Nummer des Literarischen Berichts angezeigten Theile dieses empfehlenswerthen Buchs erscheinen möchten, schon jetzt in Erfüllung gegangen ist. Die Fortsetzung der Dynamik enthält die Gesetze der Pendelschwingungen, die Lehre vom Mittelpunkt des Schwunges und des Stosses und die Lehre von der Wirkung oder Arbeit der Kräfte, wo sich auf S. 119. die historische Notiz findet, dass das Maass der Kräfte, welches man jetzt eine Pferdekraft nennt, daher entstanden sein soll, dass Watt gegen einen Fabrikanten, der eine Mühle durch acht Pferde bewegen liess, geäussert haben soll: er wolle ihm eine Dampfmaschine liefern, welche, bei geringeren Kosten, dasselbe leiste, mit derselben Kraft wirke, wie jene acht Pferde. In der Hydrodynamik und Aerodynamik hat sich der Herr Verfasser nur auf das Allernothwendigste, in der gewöhnlichen Praxis am Häufigsten Anwendbare beschränkt, nämlich auf die Lehre vom Ausfluss des Wassers aus Gefässen bei constanter Druckhöhe, die Lehre vom Ausfluss des Wassers aus prismatischen Gefässen bei constanter Druckhöhe, die Lehre vom Stoss des Wassers gegen feste Körper und umgekehrt, und auf die Lehre vom Ausflusse der Luft aus Behältern. Bei Wissenschaften, deren Natur noch so sehr eine bloss hypothetische ist, wie die der Hydrodynamik und Aerodynamik, halten wir bei einem Buche von der Tendenz des vorliegenden die sehr engen Gränzen, die der Herr Verfasser sich hier gezogen hat, für völlig zweckentsprechend, und verweisen übrigens rücksichtlich unsers allgemeinen Urtheils über dieses Buch auf die oben angegebene Nummer des Literar. Ber.

Physik.

Der Redaction des Archivs ist der nachstehende Catalog akustischer Apparate zugesandt worden, welche bei Herrn Rudolph König in Paris (Place du Lycée Louis-Le-Grand, 5.) verfertigt werden. Schwerlich wird man anderwärts eine so vollständige Sammlung schöner und neuer in das Gebiet der Akustik einschlagender Apparate finden, wie hier, wobei wir bemerken, dass auch die Preise uns sehr mässig, überall dem Werthe der

Apparate entsprechend, angesetzt zu sein scheinen. Wir halten uns daher für verpflichtet, unsere Leser auf diesen Catalog aufmerksam zu machen, welcher in systematischer Ordnung 237 Nummern enthält. Die Haupt-Rubriken desselben können wir im Folgenden leider nur angeben:

Catalogue des principaux appareils d'Acoustique, qui se fabriquent chez Rudolph Koenig à Paris, Place du Lycée Louis-Le-Grand, 5. Paris, Imprimerie Bailly, Divry et Ce, Place Sorbonne, 2. 1859. 8°.

I. Appareils pour la production du son dans les principaux cas (N°. 1—30.). — II. Etudes sur l'origine et la nature du son (N°. 31—45.). — III. Appareils pour tracer et pour compter les vibrations (N°. 46—55.). — IV. Appareils pour déterminer la vitesse de la propagation du son (N°. 56—59.). — V. Appareils pour l'étude des mouvements ondulatoires et vibratoires. (N°. 60—79.). — VI. Vibrations de l'air (N°. 80—123.). — VII. Vibrations des cordes (N°. 124—133.). — VIII. Vibrations des membranes (N° 134—143.). — IX. Vibrations des verges et lames (N°. 144—158.). — X. Vibrations des plaques (N°. 159—172.). — XI. Communication des vibrations et sytsèmes vibrants (N°. 173—190.). — Tableaux peints à l'huile de 1 mètre 50 sur 1 mètre, servant aux démonstrations publiques d'un cours d'Acoustique (N°. 191—232.). — Quelques modèles d'anatomie élastique du Dr. Auzoux (N°. 233—237.).

Man wird hieraus die grosse Vollständigkeit dieser Sammlung ersehen und die besondere Hinweisung der physikalischen Kabinette aller Lehranstalten auf dieselbe gewiss gerechtfertigt finden. Besonders interessant ist aber noch die dem vorliegenden Catalog beigelegte Anzeige eines von Herrn Édouard-Léon Scott erfundenen, von Herrn Rudolph Koenig construirten Instruments, welches unter dem Namen „**Phonautographe**" den Zweck hat, die den Schall bedingenden vibratorischen Bewegungen gewissermassen niederzuschreiben oder bildlich darzustellen. Des Interesses wegen, welches dieses Instrument nothwendig erregen muss, lassen wir das Wesentliche aus der uns vorliegenden Anzeige nachstehend abdrucken, indem wir des Weiteren wegen auf den Catalog selbst verweisen:

Le Phonautographe, appareil pour la fixation graphique des bruits, des sons, de la voix, inventé par M. Édouard-Léon Scott et construit par M. Rudolph Koenig, constructeur d'instruments d'acoustique, à Paris, Place du Lycée Louis-Le-Grand, 5. Brevets français (s. g. d. g.) et étrangers.

M. **Léon Scott**, voué par sa profession à l'étude artistique et savante de la typographie, a consacré six années d'efforts et de sacrifices à la recherche d'une impression naturelle des phénomènes sonores; plusieurs sociétés scientifiques et des professeurs éminents ont reçu, à différentes reprises, communication des épreuves par lui obtenues de sons de l'air, de bruits, du chant des instruments de musique et de la voix. Il est en mesure aujourd'hui de fournir aux savants et aux praticiens un instrument capable de réaliser les expériences les plus curieuses et les plus variées.

L'inventeur a dû lutter longtemps contre les obstacles de toute nature qui se rencontrent à la naissance des découvertes importantes, dont le résultat ne s'adresse pas immédiatement à la satisfaction des besoins matériels. Heureusement, un auxiliaire lui est arrivé. M. **Rudolph Koenig** s'est mis à sa disposition pour la complète mise en oeuvre de la phonautographie. M. Scott doit beaucoup à ce constructeur habile pour l'exécution régulière de l'instrument, la disposition de ses diverses parties dans de bonnes conditions acoustiques, l'ingénieux agencement qui doit permettre à l'appareil de figurer honorablement dans un cabinet de physique. En moins de six mois, la collaboration de l'inventeur et du constructeur a donné naissance au Phonautographe, en ce moment soumis à l'appréciation et au jugement du monde de la science et de l'art.

La série des expériences déjà réussies et qui est indiquée plus loin montrera l'étendue des services que le nouvel instrument est appelé à rendre à la science ainsi qu'aux arts entre les mains des physiciens, des physiologistes, des professeurs de conservatoire, des linguistes, des facteurs d'instruments, des amateurs curieux, des chercheurs répandus sur la surface de l'Europe savante. Il suffira de dire ici qu'on obtient facilement, dès aujourd'hui, une impression correcte d'un grand nombre de mouvements rapides et spécialement des mouvements vibratoires qui s'accomplissent dans l'air et qui sont produits par des instruments quelconques, soit de mécanique, de physique ou de musique, ou même des voix ou d'autres agents physiologiques, et qu'on peut, par extension, en multiplier les épreuves par les moyens connus.

Voici une série d'expériences qu'on peut réaliser par la phonautographie:

1° Ecrire le mouvement vibratoire d'un solide quelconque pour servir de terme de comparaison avec les mouvements d'un fluide; compter, au moyen du chronomètre pointeur, le nombre de vibrations exécutées par ce solide dans l'unité de temps;

2° Un diapason ayant été, par le moyen de l'expérience précédente, étalonné à un nombre déterminé de vibrations dans l'unité de temps (500 ou 1000 par exemple), compter, en les faisant écrire simultanément, le nombre des vibrations accomplies par un agent apte à vibrer (solide ou fluide) dans un espace de temps aussi court que l'on voudra (quelques millièmes de seconde). Exemple: compter et mesurer les phases diverses d'un bruit et les intervalles de temps compris entre des phénomènes sonores rapides et successifs; éprouver la sonorité relative des métaux, des alliages, des bois, etc.;

3° Ecrire les vibrations produites dans une membrane par un tuyau ou plusieurs sonnant simultanément, en compter le nombre, en montrer les phases; obtenir la figure, ou diagramme acoustique, de chacun des accords et des dissonnances; écrire de même le chant d'instruments à vent quelconques, montrer le timbre propre de ces instruments; écrire le mouvement composé résultant de sons de deux ou de plusieurs instruments jouant simultanément;

4° Ecrire le chant d'une voix; en mesurer l'étendue par le chronomètre pointeur ou le diapason étalon pointeur; écrire la gamme d'un chanteur, en mesurer la justesse par le diapason pointeur, en montrer la pureté (ou l'isochronisme des vibrations) ainsi que le timbre; écrire une mélodie et la transcrire à l'aide du diapason pointeur; écrire le chant simultané de deux voix et en montrer l'accord ou le désaccord;

5° Etudier acoustiquement les mouvements physiologiques ou pathologiques de l'appareil vocal et de ses parties pendant les différentes émissions de son, le cri, la toux, etc.; marquer les accidents de timbre propres à une voix donnée;

6° Etudier la voix articulée et la déclamation, ainsi que les diagrammes syllabiques, etc.;

7° Inscrire, à l'aide d'ajustements accessoires, les mouvements du pendule, du toton, de l'aiguille aimantée, le mode de locomotion d'un insecte, etc.

Prix de l'appareil complet, dont le chronomètre et le diapason étalonné, mentionnés 1° et 2°, font partie . . 500 fr.
— Le même, avec cylindre et porte-membrane en bois . 400 „

Bien que l'appareil soit d'un maniement facile, et les manipulations nécessaires à l'obtention et à la fixation des épreuves aussi simples que peu nombreuses, il sera donné aux personnes qui se procureront un appareil une instruction détaillée pour son emploi.

S'adresser, pour l'acquisition des appareils, à M. Rudolph Koenig, seul constructeur, à Paris, place du Lycée Louis-le-Grand, n°. 5;

Et pour les cessions de brevets, à M. P. Clouvet, avocat, rue Saint-Jacques, n°. 326.

Anleitung zu den magnetischen Beobachtungen. Von Karl Kreil, Director der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus u. s. w. Zweite vermehrte Auflage. (Als Anhang zum XXXII. Bande der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe der k. k. Akademie der Wissenschaften.) Wien. 1858. 8.

Wir freuen uns sehr, diese neue Auflage einer aus ihrer früheren Ausgabe hinreichend bekannten trefflichen Schrift anzeigen zu können. Jedenfalls enthält diese, aus der Feder eines mit der Anstellung magnetischer Beobachtungen und allen dazu gehörenden älteren und neueren Apparaten so vollkommen wie irgend Jemand vertrauten Mannes geflossene Schrift eine der besten Anleitungen zu solchen Beobachtungen, welche es giebt, und muss Allen, die sich mit solchen Beobachtungen beschäftigen wollen, dringend empfohlen werden, da wir sie für Jeden, der sich solchen Arbeiten zu widmen denkt, geradezu unentbehrlich halten. Auch können wir namentlich die Versicherung geben, dass in dieser neuen Ausgabe alle seit dem Erscheinen der ersten gemachten neuen Erfindungen, sofern sie wirklich wissenschaftlichen und praktischen Werth haben, sorgfältige Berücksichtigung gefunden haben, und dass alle Instrumente und Apparate durch sehr saubere Holzschnitte erläutert worden sind. Auch sind allen Methoden vollständig ausgerechnete numerische Beispiele beigefügt worden, entnommen aus den vielen praktischen Arbeiten, welche Herr Director Kreil auf diesem Felde in einer langen Reihe von Jahren in allen Theilen des österreichischen Kaiserstaats ausgeführt hat. Zuerst beschäftigt sich die Schrift mit den Bestimmungsstücken der magnetischen Erdkraft, nämlich I. der Declination, II. der horizontalen Intensität, III. der Inclination; hierauf folgen die Variations-Apparate und dann die astronomischen Beobachtungen, die, wie sich von selbst versteht, mit jeder magnetischen Beobachtung zu verbinden sind. Den Schluss bildet eine Reihe von Tafeln, welche zur wesentlichen Erleichterung der Rechnungen sehr geeignet sind, nämlich: I. Tafel für die Mittagsverbesserung. II. Tafel für die Mitternachtsverbesserung. III. Tafel für die mittlere Refraction. IV. V. VI. Tafeln für die Correctionen wegen des Luftdrucks, der Temperatur des Queck-

silbers und der Temperatur der äusseren Luft. VII. Höhenparallaxe der Sonne. VIII. Logarithmen von *m* und *n*. Bemerkungen.

Möge der Herr Verfasser durch Beachtung seiner ausgezeichneten Schrift in möglichst weiten Kreisen für seine bei der Bearbeitung dieser neuen Auflage gehabte Mühe reichlich belohnt werden.

Astronomie.

Gewiss ist es den Lesern des Archivs interessant, zu vernehmen, dass die Erben Schumacher's, des früheren berühmten Directors der Sternwarte in Altona, dessen Briefwechsel mit Gauss und Olbers, im Ganzen 5 Bände à 28 Bogen, herauszugeben beabsichtigen, und dass die Leitung dieses Unternehmens jedenfalls keinen besseren Händen anvertraut werden konnte, als denen seines trefflichen Nachfolgers, des gegenwärtigen hochverdienten Directors der Altonaer Sternwarte, Herrn Prof. Dr. C. A. F. Peters. Je mehr der Unterzeichnete selbst das Andenken Schumacher's mit aufrichtiger Pietät in seinem Herzen bewahrt, und je mehr er sich durch die Freundschaft des trefflichen Herausgebers geehrt und beglückt fühlt, je mehr er aber auch — was natürlich hier die Hauptsache ist — von der sehr grossen Wichtigkeit dieses Briefwechsels in wissenschaftlicher Rücksicht überzeugt ist: desto mehr hält er sich für verpflichtet, die Leser seiner Zeitschrift auf dieses interessante und wichtige Unternehmen aufmerksam zu machen und die erschienene desfallsige Anzeige nachstehend vollständig abdrucken zu lassen. Grunert.

Aufforderung zur Subscription auf Schumacher's wissenschaftliche Correspondenz.

Die Erben meines berühmten Vorgängers Schumacher beabsichtigen, die nachgelassene wissenschaftliche Correspondenz desselben herauszugeben und haben mir die Ordnung und Auswahl der Briefe übertragen. Diese Briefe sind wegen der Verbindung, in welcher Schumacher, beinahe ein halbes Jahrhundert hindurch, nicht allein mit den Astronomen und den Verfertigern astronomischer Instrumente, sondern auch mit vielen hervorragenden Gelehrten der verwandten Wissenschaften stand, von grosser Wichtigkeit für die Geschichte der Fortschritte der exacten Wissenschaften und enthalten einen reichen Schatz von Erörterungen, die sich auf alle Theile, insbesondere jedoch auf den

beobachtenden Theil der Astronomie, auf Geodäsie, Magnetismus, auf Wägungen etc. beziehen. Ausserdem enthalten sie viele interessante Urtheile über astronomische Schriften und Arbeiten, über Instrumente etc. Sie werden daher ein wichtiges Geschenk für Astronomen, Mathematiker und Physiker bilden und ohne Zweifel fördernd und anregend auf deren Wissenschaften einwirken.

Zuvörderst wird der Briefwechsel Schumacher's mit Olbers und Gauss veröffentlicht werden. Durch die freundliche Bereitwilligkeit des Herrn Senators Olbers in Bremen, so wie des Herrn Ober-Baurathes Gauss in Hannover und des Vorstandes der Universität zu Göttingen sind die Briefe von Schumacher an Olbers und Gauss gleichfalls zur Verfügung gestellt; so dass also beide Correspondenzen jetzt vollständig vorliegen.

Um die Mittel zur Bestreitung der Druckkosten zu erlangen, haben die Schumacher'schen Erben den Weg der Subscription gewählt. Sobald jene Kosten gedeckt sind, wird der Druck seinen Anfang nehmen und möglichst schnell gefördert werden.

Der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher wird 3 Octavbände von ungefähr 28 Bogen jeder, und der zwischen Olbers und Schumacher etwa 2 ähnliche Bände füllen. Auf diese beiden Briefwechsel kann einzeln subscribirt werden und ist der Preis pro Band auf 3 Thaler Preuss. Cour. oder 4 Thaler R.-M. gesetzt, die bei Ablieferung jedes einzelnen Bandes bezahlt werden.

Aufträge bitte ich an mich adressiren zu wollen. Es wäre erfreulich, wenn die Herren Subscribenten ihre Aufträge recht bald einreichen möchten, weil der Beginn des Drucks davon abhängt.

Altona 1858 März 16. Prof. C. A. F. Peters,
Director der Altonaer Sternwarte.

Vermischte Schriften.

The Atlantis: a Register of Literature and Science. Conducted by Members of the Catholic University of Ireland. N°. IV. July 1859. 8°.

Die drei ersten Nummern dieses auch rücksichtlich seines nicht-mathematischen und physikalischen Inhalts vieles Interessante enthaltenden Journals sind in den Literarischen Berichten Nr. CXXVI. S. 8. und Nr. CXXXI. S. 10. angezeigt worden. Die vorliegende Nummer enthält die folgenden, in den Kreis des Archivs gehörenden Aufsätze: Scientific Researches. Art. I.

On the use of the Sections of the Cone in the solution of certain Geometrical Problems. By Rev. W. G. Penny, M. A. (Auf diesen zwar elementaren, aber manches Lehrreiche und Bemerkenswerthe enthaltenden Aufsatz hoffen wir im Archiv später noch besonders zurückzukommen). — Art. II. Note on the Thickness of the Earth's Crust. By Henry Hennessy. F. R. S. — Ein zwar nicht unbedingt in den Kreis des Archivs gehörender, aber doch im Allgemeinen sehr interessanter, mit grossem Fleiss in climatologischer, meteorologischer und statistischer Rücksicht bearbeiteter Aufsatz ist: Art. III. Climatology of Lisbon in Relation to the Yellow Fever Epidemic of 1857. By Robert D. Lyons, M. D. — Auch möge in chemischer Rücksicht noch erwähnt werden: Art. IV. On the change of Caseine into Albumen with some Observations on Lactic Fermentation. By William K. Sullivan.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. CXXIV. S. 5.)

Ueber die neue sehr zweckmässige Einrichtung dieser so vielfach wichtigen Sitzungsberichte ist im Literar. Ber. Nr. CXXIV. S. 8. Nachricht gegeben, worauf wir also des Folgenden wegen ein für alle Mal verweisen.

Band XXX. 1858.

Nr. 16. Vogel: Ueber die Entmischung des Weingeistes in Folge spontaner Verdunstung. S. 261. — Löwy: Elemente der Bahn des von Bruhns am 21. Mai 1858 in Berlin entdeckten Cometen. S. 271.

Nr. 17. Handl und Weiss: Untersuchungen über den Zusammenhang in den Aenderungen der Dichten und Brechungs-Exponenten in Gemengen von Flüssigkeiten und Verbindungen von Gasen. S. 389.

Band XXXI. 1858.

Nr. 18. Starke: Ueber ein kleines Passage- und Höhenmess-Instrument, welches in der Werkstätte des polytechnischen Institutes verfertigt worden ist. S. 3. (Wir bemerken, dass dieses, wie es scheint sehr schöne und zweckmässig eingerichtete Instrument, dessen Fernrohr 14 Zoll Brennweite, 15 Linien Oeffnung und eine 28malige Vergrösserung hat; bei welchem ferner der Vertikalkreis 8 Zoll Durchmesser hat und durch zwei diametrale Nonien 10 Secunden angiebt, der Horizontalkreis dagegen mittelst eines Nonius von 30 zu 30 Secunden getheilt ist, nur 300 Fl. = 200 Thlr. kostet, wogegen der Preis, wenn der Horizon-

talkreis ebenfalls durch 2 Nonien von 10 zu 10 Secunden getheilt ist, sich auf 330 Fl. = 220 Thlr. stellt. Bei der grossen Solidität aller aus der Werkstätte des polytechnischen Instituts in Wien hervorgehenden Arbeiten ist dieser Preis, wie jeder Kenner sieht ein überaus mässiger, weshalb Instrumente dieser Art allen Lehranstalten recht sehr empfohlen zu werden verdienen.) — Simerka: Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativen Determinanten. S. 33. — Weiss: Ueber die Bahn der Ariadne. S. 68. — v. Lang: Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. S. 85.

Nr. 19. Petzval: Ueber das neue Landschafts- als Fernrohr-Objectiv. S. 213.

Nr. 20. Strauch: Auszug aus der Abhandlung: Anwendung des sogenannten Variationscalculs auf zweifache und dreifache Integrale. S. 310. — Kämtz: Note über baro- und thermometrische Windrosen. S. 332. — Haidinger: Neueste genaue Längen- und Breitenbestimmungen auf St. Paul, durch Herrn k. k. Schiffs-Fähnrich Robert Müller von Sr. Majestät Fregatte Novara ausgeführt. S. 351. — Oeltzen: Argelander's Zonen-Beobachtungen (Fortsetzung). Sechste Abtheilung von 19^h bis 23^h. S. 357.

Band XXXII. 1858.

Nr. 21. Ludwig und Stefan: Ueber den Druck, den das fliessende Wasser senkrecht zu seiner Stromrichtung ausübt. (Mit 3 Tafeln) S. 25. — Grailich und v. Lang: Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. II. S. 43. — Peterin und Weiss: Untersuchungen über das Tönen der Flammen flüssiger und fester Körper. Mit 1 Tafel. S. 68. — Ditscheiner: Ueber die graphische Linien-Ellipsen-Methode. Mit 2 Tafeln. S. 76.

Nr. 22. A Freih. v. Baumgartner: Nachtrag zu meinem Aufsatze: Von der Umwandlung der Wärme in Elektricität. S. 157. (Der hochverdiente Verfasser dieses Aufsatzes hatte im Jahrgange 1856 der Sitzungsberichte. Band XXII. eine höchst lesenswerthe Abhandlung unter dem Titel: „Von der Umwandlung der Wärme in Elektricität" veröffentlicht. Gegen die in dieser Abhandlung vorgetragenen Ansichten hat Herr Prof. Müller in Freiburg i. B. einige Bedenken vorgetragen, welche Herr Freiherr v. Baumgartner in dem vorliegenden Aufsatze mit, wie es uns scheint, siegreichen Gründen widerlegt, zugleich aber noch andere sehr beachtenswerthe und lehrreiche Bemerkungen beifügt, die wir der Aufmerksamkeit unserer Leser empfehlen.) — Karl v. Sonklar:

Ueber die Transversal-Schwingungen eines elastischen Stabes. S. 207. — Allé: Ueber die Bahn der Leda. S. 258.

Nr. 23. Weisse: Vergleichung des „Catalogus generalis pro 1830“ in Struve's „Stellarum fixarum imprimis duplicium et multiplicium positiones mediae. Petropoli. 1852“ mit den beiden Catalogen aus Bessel's Zonen-Beobachtungen. S. 270. — Zantedeschi: Della legge fondamentale delle verge vibranti e delle canne a bocca. S. 290. — Derselbe: Legge archetipa delle verghe. S. 301.

Band XXXIII. 1858.

Nr. 24. Blaserna: Ueber den inducirten Strom der Nebenbatterie. S. 25. — Löwy: Bestimmung der Bahn des Kometen V. 1858. S. 150. — v. Lang: Ueber die Minimum-Ablenkung der Lichtstrahlen durch doppelt brechende Prismen. S. 155.

Nr. 25. Knochenhauer: Ueber den elektrischen Zustand der Nebenbatterie während ihres Stromes. S. 163.

Nr. 26. Simerka: Lösung zweier Arten von Gleichungen. S. 277. — Unger: Botanische Streifzüge auf dem Gebiete der Culturgeschichte (allgemein interessant). S. 303.

Nr. 27. Weiss: Ueber die Bahn des Kometen VIII. des Jahres 1858. S. 359. — Grailich und Lang: Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper (IV. Fortsetzung). S. 369.

Nr. 29. v. Lang: Die Aenderungen der Krystall-Axen des Arragonites durch die Wärme, gerechnet aus Rudberg's Beobachtungen. S. 577. — Adolph Weiss und Edmund Weiss: Untersuchungen über den Zusammenhang in den Aenderungen der Dichten und Brechungs-Exponenten in Gemengen von Flüssigkeiten. S. 589. — Grailich: Ueber symmetrische Functionen, welche zur Darstellung gewisser physikalischer Verhältnisse krystallisirter Körper dienen können. S. 657. (Wir empfehlen diese Abhandlung recht sehr der Beachtung.)

Band XXXIV. 1859.

Nr. 1. v. Lang: Einige Bemerkungen zu Herrn Dr. J. Stefan's Abhandlung: Ueber die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes. S. 63.

Nr. 2. Knochenhauer: Ueber den Strom der Nebenbatterie. S. 77. — Murmann und Rotter: Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse krystallisirter Körper. S. 135.

Nr. 3. Löwy: Ueber die Bahn des Kometen Donati. S. 207. — Löffler: Ueber die Methode, die grössten und kleinsten Werthe unbestimmter Integralformeln zu finden. S. 227.

Band XXXV. 1859.

Nr. 7. Tschermak: Ueber den Zusammenhang zwischen der chemischen Constitution und dem relativen Volumen bei flüssigen Verbindungen. S. 18.

Nr. 8. Czermak: Ueber die Sprache bei luftdichter Verschliessung des Kehlkopfes. S. 63. — Reitlinger: Ueber flüssige Isolatoren der Elektricität. S. 73.

Die Königlich Belgische Akademie der Wissenschaften zu Brüssel hat unter dem Titel:

> Tables générales et analytiques du Recueil des Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1re Serie. Tome I a XXIII. (1832—1856.) Bruxelles. Hayez. 1858. (395 Seiten in 8°.)

ein überaus vollständiges Inhaltsverzeichniss ihrer „Bulletins" veröffentlicht, welches aus den beiden Theilen „Table des matières" und „Table des auteurs" besteht. Bei der grossen Wichtigkeit dieser Bulletins für die Wissenschaft machen wir unsere Leser auf dieses Inhaltsverzeichniss besonders aufmerksam, welches bei vielen wissenschaftlichen Untersuchungen, wo es nöthig ist, auf die wichtigen Arbeiten der Belgischen Akademie zurückzugehen, die wesentlichste Erleichterung gewähren und solche Untersuchungen sehr zu unterstützen geeignet sein wird.

Literarischer Bericht
CXXXIV.

Mathematischer und physikalischer Unterricht.

Für die preussischen Real- und höheren Bürgerschulen ist so eben bei der neuen Organisation dieser Lehranstalten eine neue ausführliche Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung erschienen *). Dieses neue Reglement, welches mit Recht von dem ganzen Lande mit besonderer Freude und Genugthuung begrüsst worden ist, ausführlich zu besprechen, kann hier natürlich nicht der Ort sein; einer vorzugsweise auch der Förderung des mathematischen und physikalischen Unterrichts gewidmeten Zeitschrift, wie dem „Archiv der Mathematik und Physik", geziemt es aber wohl, über eine so wichtige, so sehr und so tief in das ganze Volks- und Staatsleben eingreifende Verordnung rücksichtlich des genannten Unterrichts einige Worte zu sagen, namentlich wenn es mit so grosser Freude, mit so grosser, aus innerster Ueberzeugung hervorgegangener vollkommener Uebereinstimmung mit den gegebenen Vorschriften geschehen kann, wie im vorliegenden Falle von dem Unterzeichneten.

An die Abiturienten der Realschulen werden in der Mathematik und Physik die folgenden Anforderungen gestellt, wodurch also zugleich das Ziel bezeichnet wird, dessen Erreichung diese Schulen in den genannten Wissenschaften zu erstreben haben.

„In der Mathematik hat der Abiturient den Nachweis zu liefern, dass er auf dem ganzen Gebiet der Mathematik, so weit sie Pensum der oberen Klassen ist (Kenntniss der Beweisführungen, so wie der Auflösungsmethoden einfacher Aufgaben aus

---

*) M. s. z. B. Centralblatt für die gesammte Unterrichts-Verwaltung in Preussen. 1859. October. S. 582.

der Algebra, die Lehre von den Potenzen, Proportionen, Gleichungen, Progressionen, der binomische Lehrsatz und die einfachen Reihen, die Logarithmen, die ebene Trigonometrie, Stereometrie, die Elemente der beschreibenden Geometrie, analytische Geometrie, Kegelschnitte; angewandte Mathematik: Statik und Mechanik), sichere, geordnete und wissenschaftlich begründete Kenntniss besitzt, und dass ihm auch die elementaren Theile der Wissenschaft noch wohl bekannt sind. Eben so muss Fertigkeit in allen im praktischen Leben vorkommenden Rechnungsarten, im Rechnen mit allgemeinen Grössen und im Gebrauch der mathematischen Tafeln vorhanden sein. Auf strenge Beweisführung und auf Fertigkeit in der Lösung der Aufgaben ist bei der Abiturientenprüfung besonderer Werth zu legen.

In der **Physik** muss der Abiturient diejenigen Begriffe und Sätze, und eben so in Betreff der Versuche die Methoden kennen, welche auf die Entwickelung der physikalischen Wissenschaft von wesentlichem Einflusse gewesen sind. Bei der auf Experimente gegründeten Kenntniss der Naturgesetze muss die Befähigung vorhanden sein, dieselben mathematisch zu entwickeln und zu begründen; die Schüler müssen eine Fertigkeit darin erworben haben, das in der populären Sprache als Qualität Gefasste durch Quantitäten auszudrücken. Im Einzelnen ist das Ziel: Bekanntschaft mit den Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung, der Lehre von der Wärme, der Elektricität, dem Magnetismus, vom Schall und vom Licht.

Bei der schriftlichen Prüfung haben die Abiturienten zu liefern:

1. Die Lösung von vier **mathematischen** Aufgaben:
   a) aus dem Gebiete der Gleichungen zweiten Grades;
   b) aus dem Gebiete der Planimetrie oder analytischen Geometrie;
   c) aus der ebenen Trigonometrie;
   d) aus der Stereometrie oder den Kegelschnitten;
2. die Lösung einer Aufgabe aus der **angewandten Mathematik** (Statik oder Mechanik), einer **physikalischen Aufgabe** (Optik oder Wärmelehre), und einer Aufgabe aus der **Chemie**. Letztere darf nicht zu einer Relation über einen Abschnitt des Systems veranlassen, sondern ist so zu wählen, dass sie Gelegenheit giebt, Kenntnisse aus verschiedenen Theilen der Chemie und Sicherheit in stöchiometrischen Rechnungen zu zeigen."

Ueberblicken wir nun diese Bestimmungen, so geben sie uns

zu verschiedenen Betrachtungen Veranlassung, die aber in ihrer Gesammtheit uns nur zu dem Urtheil führen, dass alle Vorschriften ohne Ausnahme in jeder Beziehung im höchsten Grade zweckmässig sind und zu dem lebhaftesten Danke gegen die hohe Unterrichtsbehörde und Alle, die derselben bei der Abfassung des neuen Reglements rathend zur Seite gestanden haben, auffordern. Der Unterzeichnete darf von seinem Standpunkte aus ein solches Urtheil, ohne irgend welche Missdeutung zu befürchten, um so eher und so unumwundener aussprechen, weil er eines Theils bei dem Erlass des neuen Reglements auch nicht im Entferntesten betheiligt gewesen ist und betheiligt sein konnte, dagegen aber andern Theils darin durchgängig die Grundsätze als maassgebend betrachtet worden sind, die er selbst, wie aufmerksame Leser des Archivs sich gewiss erinnern werden, bei sehr vielen Gelegenheiten als die seinigen ausgesprochen und geltend zu machen gesucht hat.

Was zuerst das geforderte Maass mathematischer und physikalischer Kenntnisse betrifft, so ist dies in allen Beziehungen richtig getroffen worden, und namentlich durfte man in den gestellten Anforderungen nach unserer Ansicht nicht einen Schritt weiter gehen, ohne den Schüler in Regionen der Mathematik zu führen, welche eine für seinen geistigen Standpunkt nicht mehr geeignete Abstraction der Begriffe fordern. Dass also den früher öfters laut gewordenen Forderungen vieler Realschullehrer, — denen wir bekanntlich an nicht wenigen Stellen des Archivs stets so energisch wie möglich entgegen getreten sind, — auch die Elemente der sogenannten höheren Analysis in den Unterrichtskreis der Realschulen aufzunehmen, nicht Rechnung getragen worden ist, dagegen aber manches Wichtige, was früher unbeachtet gelassen worden war, gebührende Berücksichtigung gefunden hat, liefert einen für uns im höchsten Grade erfreulichen Beweis, mit welcher Weisheit die hohe Unterrichtsbehörde den Werth des mathematischen Unterrichts keineswegs unter-, aber auch nicht überschätzt. Die Aufnahme der Kegelschnitte in den Kreis des Unterrichts ist im höchsten Grade erfreulich; denn woher soll der Universitätslehrer Beispiele einzelner Curven, deren er bei den ersten Anwendungen der Differentialrechnung so sehr bedarf, hernehmen, als aus dieser Lehre. Eben so zweckmässig ist die Aufnahme der Elemente der analytischen Geometrie, und wer sollte sich nicht aufrichtigst freuen, dass auch endlich der für alle praktischen Fächer so überaus wichtigen, aber auch ausserdem sehr wesentliche geistige Bildungselemente enthaltenden beschreibenden Geometrie, womit natürlich auch andere graphische Darstellungsmethoden, wie Perspective, Schattenconstructionen,

auch die neuere Axonometrie eng zusammenhängen, gebührend Rechnung getragen worden ist.

Was ferner die Physik betrifft, so ist auf die sogenannte angewandte Mathematik: Statik und Mechanik, überhaupt und im Allgemeinen aber darauf besonderer Nachdruck gelegt worden, dass in der Physik das mathematische Element und die mathematische Behandlung vorherrschend sein soll, wobei übrigens immer auch dem Experiment gebührend Rechnung getragen und demselben sein sehr wohl begründeter Werth erhalten bleiben soll und muss. „Der Schüler soll aber bei der auf Experimente gegründeten Kenntniss der Naturgesetze sich die Befähigung erwerben, dieselben mathematisch zu entwickeln und zu begründen; er soll die Fertigkeit erwerben, das in der populären Sprache als Qualität Gefasste durch Quantitäten auszudrücken; er soll in der Chemie Sicherheit in stöchiometrischen Rechnungen erworben haben.“ Nichts kann dem Unterzeichneten mehr aus der Seele geschrieben sein, als dieses; halten alle Lehrer sich streng an diese überaus weisen Vorschriften, so wird der erfreulichste Erfolg des in so vielen Beziehungen wichtigen physikalischen Unterrichts gewiss nicht ausbleiben.

Nichts kann endlich mehr erfreuen, als dass auf die strenge Beweisführung überall der grösste Werth gelegt und dieselbe als die erste Grundbedingung für fruchtbringendes Gelingen des mathematischen und physikalischen Unterrichts überall anerkannt worden ist*).

---

*) Im schroffsten Gegensatze zu dem Obigen, soll nach einer Verfügung des Kurfürstlich Hessischen Ministeriums des Innern vom 28. Februar 1843 „der Unterricht in der Mathematik aus dem Gebiet der Abstraction entfernt, vielmehr möglichst concret und anschaulich gehalten, und von den Lehrern der Mathematik soll darauf Bedacht genommen werden, den Schülern zunächst in der Arithmetik eine genügende Uebung zu geben, um nicht so sehr das Wissen, als das Können der Schüler auf dem Gebiete zu erzielen, das dieselben zu beherrschen im Stande sind.“ — Sapienti sat! Wir hoffen zur Ehre der Kurhessischen Regierung, dass diese Verordnung, von welcher wir im Archiv. Thl. V. S. 273. schon sagten: „Selten ist wohl eine, das wahre Wesen einer Wissenschaft und deren Bedeutung für den Schulunterricht so durch und durch verkennende Verordnung erlassen worden“, jetzt ganz und gar der Vergessenheit anheim gegeben worden ist, nachdem ausgezeichnete Hessische Lehrer, z. B. der treffliche Grebe in Cassel in der Schrift: Ueber die Beschränkung des mathematischen Unterrichts auf den kurhessischen Gymnasien. Marburg. 1845. bestimmt genug gegen und über dieselbe sich auszusprechen keinen Anstand genommen haben.

Der Unterzeichnete ist der Meinung, dass die Lehrer der Mathematik und Physik auf Universitäten und höheren technischen Lehranstalten rücksichtlich der Vorbildung der sich zu weiterer Ausbildung ihnen zuwendenden Schüler jetzt nicht mehr werden verlangen und wünschen können und dürfen, wenn in den genannten Wissenschaften von den Realschulen alles das geleistet wird, was ihnen jetzt mit der grössten Weisheit und Umsicht zu leisten aufgelegt worden ist. Denn Alles scheint uns in dieser Beziehung auf den preussischen Realschulen von nun an so trefflich geordnet und geregelt, dass vernünftigerweise kaum noch etwas zu wünschen übrig bleibt.

Sollen nun aber namentlich unsere Universitäten, wie doch vorausgesetzt werden muss, auch hauptsächlich mit den Zweck haben, tüchtige Lehrer für Gymnasien und Realschulen zu bilden, so werden sie sich auch angelegen sein lassen müssen, dass künftig auch Vorlesungen über beschreibende oder descriptive Geometrie und andere verwandte Gegenstände sich in ihren Lectionscatalogen angekündigt finden, was bisher wohl nur höchst selten der Fall gewesen ist. Und wegen des nun in schönster Weise geordneten physikalischen Unterrichts hält der Unterzeichnete wie früher bereits immer, um so mehr jetzt, eine Vorlesung über Mechanik, überhaupt über den ganzen mechanischen Theil der Physik in **elementarer, aber streng mathematisch begründeter** Darstellung, neben den natürlich sich von selbst verstehenden Vorlesungen über höhere oder analytische Mechanik, für unbedingt nothwendig, und bekennt gern, dass er selbst schon früher oft den grossen Nutzen einer solchen elementaren mechanischen Vorlesung für seine Schüler mit Freuden kennen gelernt hat.

Mögen jetzt nur alle Lehrer eifrigst dahin streben, ihren Unterricht in einer dem grossen Werthe, welchen die hohe Unterrichtsbehörde den herrlichen Wissenschaften, welche diese Zeitschrift vertritt, beimisst und diese ihre Ansicht durch das besprochene, in allen Beziehungen treffliche Reglement öffentlich ausspricht und an den Tag legt, vollkommen entsprechenden Weise zu ertheilen. Dahin durch das Obige zu wirken ist der eifrigste Wunsch des Unterzeichneten und die hauptsächlichste Absicht der obigen Zeilen, denen nur noch die Versicherung hinzugefügt werden mag, dass das Archiv allen, die Verbesserung des mathematischen und physikalischen Unterrichts im Auge habenden Aufsätzen wie bisher auch fernerhin in der bereitwilligsten Weise offen stehen wird.

Grunert.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Amtlicher Bericht über die vier und dreissigste Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Carlsruhe im September 1858. Herausgegeben von den Geschäftsführern derselben Eisenlohr und Volz. Mit 5 Tafeln und 16 Holzschnitten. Carlsruhe, Müller'sche Hofbuchhandlung. 1859. 4.

Als wir in dem mit dem vierten Hefte des vorhergehenden Theils unsers Archivs erschienenen Literar. Berichte Nr. CXXXII. den „Amtlichen Bericht über die zwei und dreissigste Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte vom Jahre 1856“ anzuzeigen die Freude hatten, schlossen wir unseren Bericht mit dem Wunsche, bald auch den Amtlichen Bericht über die vorjährige, in so vielen Beziehungen schöne und wichtige Carlsruher Versammlung anzeigen zu können. Früher als wir glauben und hoffen konnten, ist unser Wunsch in Erfüllung gegangen; denn schon jetzt liegt dieser Bericht über die vorjährige Versammlung in einem in der trefflichsten, nichts zu wünschen übrig lassenden Weise ausgestatteten Quartbande vor uns. In der That sind der Fleiss und die Ausdauer der beiden verehrten Herausgeber W. Eisenlohr und Volz, die sich schon durch die Leitung der Versammlung selbst um diese und alle dabei Anwesenden so sehr verdient gemacht haben, wahrhaft zu bewundern, dass sie in der kurzen Zeit eines Jahres ein so umfangreiches, von der ganzen Versammlung ein so interessantes, lebensvolles Bild gebendes Werk zu Stande brachten, was gewiss auch nur dadurch möglich gewesen ist, dass sie von der Müller'schen Hofbuchdruckerei und den Behörden, welchen dieselbe vielleicht unterstellt ist, in jeder Weise bereitwilligst und kräftigst unterstützt wurden. Die Wissenschaft kann für solche neue Aufopferung von Zeit, Kraft und Mühe allen bei dem Zustandebringen des schönen Werks Betheiligten nur ihren wärmsten und innigsten Dank sagen. Wir aber sprechen unsere lebhafteste Anerkennung der Trefflichkeit des Werks in den kurzen Worten aus: dass es nach unserer vollkommensten Ueberzeugung in keiner Beziehung irgend etwas zu wünschen übrig lässt, und wollen nun versuchen, seinen Inhalt, insofern derselbe in den Kreis unsers Archivs gehört, im Folgenden anzugeben.

Schon früher, als wir die schöne Eröffnungsrede des trefflichen W. Eisenlohr in Thl. XXXII. S. 140. unseren Lesern mittheilen zu können die Freude hatten, haben wir uns mit der wärmsten Anerkennung über die grosse Schönheit und wissen-

schaftliche Bedeutung der Carlsruher Versammlung ausgesprochen. Indess sind auch von manchen anderen Versammlungen*) die dabei Betheiligten mit innigem Dank für das ihnen Gebotene und die ihnen gewordene wissenschaftliche Anregung und Erfrischung geschieden. Dagegen steht aber in einer Beziehung die Carlsruher Versammlung einzig in ihrer Art da, weil einer der edelsten deutschen Fürsten seine Anerkennung der hohen Bedeutung der Naturwissenschaft in einer jedes für diese göttliche Wissenschaft warm schlagende Herz wahrhaft erhebenden Weise dadurch öffentlich aussprach und kund gab, dass er nebst seiner erlauchten Gemahlin mit bewunderungswürdiger Ausdauer den Verhandlungen von Anfang bis zu Ende persönlich beiwohnte, und denselben stets mit der grössten Theilnahme folgte. Dies ist eine fürstliche That, deren sich die Wissenschaft wahrhaft freuen kann und muss; dieselbe wird zu einem historischen Factum, welches ewig in den Annalen der Wissenschaft verzeichnet zu werden verdient, desto mehr, je seltener im Allgemeinen solche Beispiele hoher fürstlicher Gesinnung sind. Wir dürfen hier nicht mehr sagen, um unseren Lesern die Freude nicht zu schmälern, die sie aus der Lectüre des schönen vorliegenden Werks in der angedeuteten Beziehung schöpfen werden. Die grosse Aufopferung der beiden Geschäftsführer und das Entgegenkommen aller Behörden des

*) Interessant ist das auf S. 9. gegebene Verzeichniss aller bis jetzt stattgehabten Versammlungen, dessen Mittheilung an diesem Orte wir unsern Lesern nicht vorenthalten können: Leipzig 1822, Halle 1823, Würzburg 1824, Frankfurt a. M. 1825, Dresden 1826, München 1827, Berlin 1828, Heidelberg 1829, Hamburg 1830, Wien 1832, Breslau 1833, Stuttgart 1834, Bonn 1835, Jena 1836, Prag 1837, Freiburg i. B. 1838, Pyrmont 1839, Erlangen 1840, Braunschweig 1841, Mainz 1842, Gratz 1843, Bremen 1844, Nürnberg 1845, Kiel 1846, Aachen 1847, Regensburg 1849, Greifswald 1850, Gotha 1851, Wiesbaden 1852, Tübingen 1853, Göttingen 1854, Wien 1856, Bonn 1857, Carlsruhe 1858. — Ausgefallen ist die Versammlung also nur zweimal, nämlich 1831 und 1855, beidemal der in der betreffenden Stadt herrschenden Cholera wegen, was natürlich ein sehr triftiger Grund für die Aussetzung der Versammlung war. Desto mehr ist es zu bedauern, dass man in diesem Jahre (1859) die Versammlung in Königsberg hat ausfallen lassen; nachdem der Friede von Villafranca im Juni geschlossen war, sucht man in der That vergeblich nach irgend einem triftigen Grunde für das Ausfallen einer erst im September stattfindenden Versammlung, die gerade in diesem Jahre durch ihre grosse deutsche Bedeutung gewiss das Ihrige zu der sehr zu wünschenden Ausgleichung verschiedener bedauerlicher Differenzen in Deutschland beigetragen haben würde, weshalb der Patriot es um so mehr beklagen muss, dass die Versammlung gerade in diesem Jahre nicht zu Stande gekommen ist. G.

Staats und der Stadt und aller für Naturwissenschaft sich irgend interessirenden Carlsruher Gelehrten, deren Zahl eine sehr grosse ist, bei dieser Versammlung ist zu bekannt, als dass darüber hier noch etwas zu sagen wäre. Absichtlich haben wir wieder diese unsere Anzeige unter die Rubrik: „Geschichte der Mathematik und Physik“ gestellt, weil wir auch die Carlsruher Versammlung für ein wirkliches historisches Ereigniss halten.

W. Eisenlohr's schöne Eröffnungsrede haben wir a. a. O. schon vollständig mitgetheilt. Die Rede des zweiten Geschäftsführers, Medicinalraths Volz, über das Verhältniss der Medicin zu der Naturwissenschaft, ist interessant, gehört aber nicht in den Kreis unserer Zeitschrift. Als allgemein interessante Reden bezeichnen wir noch: Baumgärtner von Freiburg: Ueber die Bedeutung des Menschengeschlechts in den Werken der Schöpfung; — Erdmann von Leipzig: Ueber das Verhältniss der naturwissenschaftlichen Forschung zum religiösen Glauben; — Schaafhausen von Bonn: Ueber den Zusammenhang der Natur- und Lebenserscheinungen; — Eimer von Langenbrücken: Ueber das Gottesbewusstsein in der Naturforschung. Diese Reden sind vollständig mitgetheilt, und solche können wir hier begreiflicherweise nur namhaft machen. — In der dritten allgemeinen Versammlung machte der erste Geschäftsführer W. Eisenlohr die höchst erfreuliche Mittheilung, dass Seine Königliche Hoheit der Grossherzog zur Erinnerung an die 34. Naturforscher-Versammlung eine zur Vertheilung an sämmtliche Mitglieder und Theilnehmer bereit liegende Medaille habe prägen lassen, und schloss dann die denkwürdige Versammlung mit überaus gemüthreichen Worten, die Jeder in dem Werke selbst mit wahrer Freude und Rührung lesen wird.

Die Zahl aller Mitglieder und Theilnehmer war 904, eine Zahl, in deren Höhe schon allein wahrlich Beweis genug für die Bedeutung der Versammlung liegt, wenn dieselbe nicht schon anderweitig genug constatirt wäre. Interessant mag es für manchen unserer Leser sein, dass Herr A. de Caumont, fondateur du congrès scientifique de France, in der Carlsruher Versammlung persönlich anwesend war, und deren Mitglieder in einem besonderen, in der dritten allgemeinen Sitzung mitgetheilten Schreiben zur lebhaften Theilnahme an dem congrès scientifique aufforderte: derselbe wird im Jahre 1860 zu Cherbourg vom 1sten bis 10ten September gehalten werden. Wer möchte nicht gern diese Versammlung in einer namentlich durch ihre grossen Marine-Etablissements jetzt so ungemein wichtigen und merkwürdigen Stadt besuchen! Deshalb wird vielleicht für manchen unserer Leser

die folgende Mittheilung des Herrn Caumont interessant sein: „Les chemins de fer français accordent rémise de moitié pour aller et revenir à tous les membres porteurs de cartes: ces cartes sont déposées 2 mois à l'avance à Paris, rue Richelieu 63 et rue Bouloy 7: elles sont d'ailleurs adressées à ceux qui les réclament du sécrétaire général du congrès *).

Von den in den Kreis des Archivs gehörenden Aufsätzen thun wir nun noch der folgenden Erwähnung:

Zur ältesten Geschichte der Zahlzeichen. Von Cantor. — Ueber die neuen Tafeln von Wolfers zur Reduction der Oerter der Sterne, als Fortsetzung der Tabulae Regiomontanae von Bessel. Von Argelander. — Ueber den Flächeninhalt der Kugelzone. Von Escher. — Ueber die verschiedenen Krümmungen in einem Punkte einer Fläche zweiten Grades. Von Zech. — Ueber seine Ausgabe der Werke Kepler's. Von Frisch. — Ueber die Reduction der partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung mit $n+1$ Veränderlichen auf eine Differentialgleichung der $n$ten Ordnung mit nur zwei Veränderlichen. Von Weiler. — Ueber ein neues, von ihm erfundenes Photometer für die Bestimmung der Lichtstärke von Fixsternen. Von Schwerd. — Ueber Objective zu photometrischen Zwecken. Von Petzval. (Nur kurze Mittheilung.) — Ueber Linsen und Linsensysteme zur Beobachtung der Farbenringe im polarisirten Lichte. Von Reusch. (Mit vorzüglicher Rücksicht auf das schöne neue Polarisations-Instrument von Nörrenberg, mit dessen feiner Construction es möglich ist, in Krystallen von der Feinheit eines Haares noch die doppelt brechende Polarisationsrichtung und selbst die innere Structur mit Hülfe der sichtbar werdenden optischen Erscheinungen zu erkennen.) — W. Eisenlohr zeigte im physikalischen Auditorium seine schöne Methode, die Wellenlänge der unsichtbaren oder brechbarsten Lichtstrahlen zu messen, so wie die schönen Erscheinungen, welche sich theils durch objective Darstellung mehrerer Beugungsspectra, theils durch ihre Zerlegung hervorbringen lassen.

Die übrigen physikalischen Aufsätze beziehen sich meistens auf Elektricität, Magnetismus, Gase, u. s. w., nämlich: Ueber die

*) Der Herausgeber wird es immer für seine Pflicht halten, solche Mittheilungen im Interesse der Leser und der Wissenschaft, wo sie sich ihm darbieten, zu machen. Die General-Sekretaire für den Congress in Cherbourg sind: M. Besuva, pharmacien major de la marine, und le Vicomte Du Moncel, von denen also die, eine Reise nach Frankreich sehr erleichternden Karten zu erhalten sein werden.

Beziehungen zwischen Magnetismus, Torsion und Wärme. Von Wiedemann. — Vergleichung des elektrostatischen Grundgesetzes mit dem elektrodynamischen. Von v. Feilitzsch. — Verfahren eine bedeutende Anhäufung der Elektricität an den Enden einer Inductionsspirale zu Wege zu bringen. Von Böttger. — Ueber die Molecularbewegungen in gasförmigen Körpern. Von Clausius. — Ueber magnetische Adhaesion und neue Elektromagnete. Von Nicklès. (Französisch.) — Ueber ein elektrochemisches Chronoscop. Von Hessler. — Ueber einen elektrischen Apparat Von Belli. (Französisch.) — Ueber die physikalische Ursache der Harmonie und Disharmonie. Von Helmholtz. — Ueber die Wärmeintensität im Spectrum eines Glas- und Flintglasprisma. Von Müller. — Ueber das Spectrum des elektrischen Lichts in Geissler'schen Röhren und über eine merkwürdige Wirkung eines Magnets auf das Licht an der negativen Elektrode der Geissler'schen Röhre. Von Plücker, wobei Dove ein Mittel angab, die elektrische Natur des Nordlichts optisch zu entscheiden.

Im physikalischen Auditorium der polytechnischen Schule zeigte Ruhmkorff aus Paris den für das physikalische Cabinet dieser berühmten Lehranstalt auf die Zeit der Naturforscher-Versammlung bestellten grossen Inductions-Apparat vor, und stellte damit grossartige, allgemein überraschende Versuche an. Mittelst einer Batterie von 40 Grove'schen Elementen und einer Kleist'schen Flasche von 2 Quadratfuss Belegung erzeugte er unter Anderem Funken von 10—15 Centimeter Länge. Neu ist daran die Ankervorrichtung, indem die Unterbrechung des Stromes durch einen Elektromagnet und ein Volta'sches Element bewirkt wird. — Man sieht auch in dieser höchst dankenswerthen Veranstaltung einen Beweis, wie sehr von der überaus thätigen, eifrigen und umsichtigen Geschäftsführung Alles aufgeboten worden war, um der Versammlung in jeder Beziehung eine wahrhaft wissenschaftliche Bedeutung zu geben und zu sichern.

Möge den Herausgebern des vorliegenden schönen und wichtigen Werks für ihre grosse und vielseitige Aufopferung nach allen Seiten hin der reichste und wärmste Dank von allen wahrhaft wissenschaftlichen Männern in reichlichstem Maasse zu Theil werden, was gewiss nicht fehlen wird, wenn alle den Werth solcher Aufopferung so zu schätzen wissen, wie der unterzeichnete Herausgeber von sich selbst gern und aufrichtig bekennt.

Grunert.

Uiber Zahlensysteme und deren Geschichte. Von Joseph Krist, Professor an der k. k. Ober-Realschule

zu Ofen. (Vierter Jahresbericht der k. k. Ober-Realschule der königlichen freien Hauptstadt Ofen. Am Schlusse des Schuljahres 1859 veröffentlicht vom Director.) Ofen. 1859.

Der Herr Verfasser des wissenschaftlichen Theils dieses lesenswerthen Programms hat nach einer kurzen Einleitung zuerst in der Abtheilung I. die allgemeine Theorie der Zahlensysteme in lehrreicher Weise entwickelt, auch die gegenseitige Verwandlung der Zahlensysteme mit verschiedenen Grundzahlen in einander sehr deutlich erläutert, wobei die Dyadik, das Sexagesimalsystem und das System mit der Grundzahl Zwölf besondere Berücksichtigung gefunden haben, was in einer solchen Schulschrift deshalb besonders zweckentsprechend ist, weil die drei genannten Systeme eine gewisse historische Bedeutung erlangt haben, wie auch der Herr Verfasser überall hervorhebt. Für Kenner der Geschichte der Mathematik brauchen wir nicht erst zu bemerken, dass und warum Leibnitz an dem dyadischen System besonderes Interesse nahm; der vielfache Gebrauch des Sexagesimalsystems ist gleichfalls bekannt genug, und schon Ptolemäus bedient sich in seiner Sehnentafel der Sexagesimal-Eintheilung; Werneburgs excentrische Ideen und Wünsche in seiner Teliosadik für sein sogenanntes Taun*)-System sind wohl wenigen jüngeren Lehrern der Mathematik noch bekannt, und die Erinnerung an dieselben in dieser Schrift war daher ganz zweckmässig. — Die Abtheilung II. enthält eine sehr fleissige Geschichte der Zahlensysteme, auf die wir namentlich Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, denen selten grössere Bibliotheken zu Gebote stehen, deshalb aufmerksam machen, weil sie in derselben auf möglichst engem Raume in ziemlicher Vollständigkeit Alles zusammengestellt finden, was die älteren und neueren Forschungen auf diesem Gebiete geliefert haben. Dabei haben aber nicht bloss die Arbeiten von Mathematikern, wie Humboldt, Libri, Chasles, Cantor u. s. w., sondern ganz hauptsächlich auch die der neueren Sprachforscher Prinsep, Silvestre de Sacy, Nesselmann, Brockhaus, Rask, Lassen u. s. w. Berücksichtigung gefunden. Ja auch des verdienstvollen magyarischen Sprachforschers Paul Hunfalvy sprachwissenschaftliche Untersuchungen und Ritter von Heufler's Arbeiten über die Sprache der Zigeuner sind von dem kenntnissreichen Herrn Verfasser gebührend beachtet worden. — Wir halten daher diese Schrift für einen sehr lehrreichen und dankenswerthen Bei-

*) Zwölf.

trag zur Geschichte der Mathematik, insbesondere weil man in derselben ziemlich alles Wissenswerthe über den fraglichen Gegenstand beisammen findet. Möge dieselbe deshalb unseren Lesern überhaupt, insbesondere aber allen Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten zur Beachtung bestens empfohlen sein.

Der übrige Inhalt dieses Programms ist zwar in pädagogischer Rücksicht sehr interessant, weil er ein anziehendes Lebensbild eines trefflichen Schulmanns, des Schulraths, jetzigen Bischofs von Szathmár, Dr. Michael Haas, liefert, und durch die sehr vollständige Mittheilung des Lehrplans u. s. w. der k. k. Ober-Realschule zu Ofen die Organisation dieser wichtigen Lehranstalten in Oesterreich in sehr anziehender Weise kennen lehrt, gehört aber nicht weiter in den Kreis dieser literarischen Berichte.

Geometrie.

Das rechtwinkelige Parallelepiped. Eine mathematische Monographie von Professor Friedr. Mann (an der Kantonsschule zu Frauenfeld). Frauenfeld. Huber. 1859. 4.

Der Herr Verfasser dieser Schrift hat in derselben das rechtwinkelige Parallelepiped, welches selbst in den ausführlichsten geometrischen Lehr- und Handbüchern mit einigen wenigen Sätzen abgefunden wird, einer sehr eingehenden Betrachtung unterworfen, und eine ziemlich grosse Anzahl neuer Relationen für dieses so einfache räumliche Gebilde aufgefunden, deren weitere Benutzung bei dem geometrischen Unterrichte zu wünschen ist und dazu empfohlen zu werden verdient. Auf Einzelnheiten können wir begreiflicherweise nicht eingehen, und bemerken daher nur noch, dass in dem zweiten angewandten Theile seiner verdienstlichen Schrift Herr Professor Mann Anwendungen seiner Theorie des rechtwinkligen Parallelepipeds auf die Axonometrie gemacht, namentlich in Nr. 47. eine der Beachtung recht sehr zu empfehlende neue Construction des den axonometrischen Constructionen zu Grunde zu legenden Axenkreuzes mitgetheilt hat. Möge daher die kleine Schrift nochmals der Beachtung unserer Leser empfohlen sein.

Loxodromische Trigonometrie (Nautik).

Éléments de Trigonometrie loxodromique, suivis d'applications à la Navigation d'après M. J. A. Grunert, Membre correspondant de la Société Dunkerkoise, Professeur à l'Université de Greifswald. Par M. Terquem, Membre titulaire résidant. (Extrait du 6e Volume des Mémoires de la Société Dunkerquoise pour l'Encouragement des Sciences, des Lettres et des Arts.). Dunkerque. Typographie Benjamin Kien. 1859. 8°.

Herr P. Terquem, Professeur d'Hydrographie à Dunkerque, hat in der vorliegenden Schrift eine ausgezeichnete Uebersetzung oder vielmehr Bearbeitung der von mir, dem unterzeichneten Herausgeber des Archivs, im Jahre 1849 herausgegebenen Loxodromischen Trigonometrie. Leipzig. 1849. 8°. *) geliefert. Ich darf wohl als bekannt voraussetzen, dass ich in dieser Schrift unter vorstehendem Namen die Gestaltung einer neuen mathematischen Wissenschaft versucht habe, welche für die Navigation auf der ellipsoidischen Erde, in Bezug auf das den loxodromischen Curs verfolgende Schiff, dasselbe leisten soll, was die ebene, sphärische und sphäroidische Trigonometrie für die Geodäsie leisten, welche also für den Seemann Dasselbe sein soll, was die letzteren Wissenschaften für den Geodäten sind. Je mehr ich mich bemüht habe, durch die genannte Schrift der loxodromischen Schifffahrt auf der ellipsoidischen oder sphärischen Erde, welche letztere natürlich nur ein besonderer Fall der ersteren ist, eine eben so allgemeine und sichere theoretische Grundlage zu geben, wie dieselbe die Geodäsie in der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie längst besitzt: desto erfreulicher ist es, namentlich bei dem grossen Interesse, was ich an der weiteren Ausbildung aller nautischen Wissenschaften überhaupt nehme, natürlich für mich gewesen, dass meine Bemühungen, so wenig dieselben auch bis jetzt das eifrig erstrebte Ziel wirklich erreicht haben, wovon Niemand mehr als ich selbst überzeugt sein kann, bei der seit der Gründung der französischen nautischen Lehranstalten durch den grossen Colbert durch hohe wissenschaftliche Ausbildung so sehr ausgezeichneten französischen Marine so viel Anerkennung gefunden haben, dass einer der ausgezeichnetsten Professeurs d'Hydrographie, Herr Paul Terquem in Dünkirchen, ein Sohn des durch die Herausgabe der Nouvelles An-

---

*) M. s. Literar. Ber. Nr. XLVIII. (Thl. XII.) S. 667.

nales de Mathématiques so sehr verdienten Herrn O. Terquem in Paris, eine Uebersetzung meiner genannten Schrift für nothwendig und zweckdienlich erachtet hat. Aber es ist dies durchaus nicht eine blosse Uebersetzung, sondern vielmehr in mehrfacher Beziehung eine Bearbeitung meiner Schrift, indem Herr Terquem bei der ganzen Darstellung sich noch weit mehr, als ich selbst ursprünglich gethan hatte, dem eigentlichen praktischen Gebrauch in der Nautik angeschlossen und für denselben die von mir entwickelte Theorie wahrhaft fruchtbar zu machen gesucht hat. Auch sind der Schrift zwei besondere, sehr lehrreiche Noten beigefügt worden, von denen ich namentlich die zweite hervorhebe, welche die von Herrn Givry an den Azimuthen auf den reducirten Charten angebrachte wichtige Correction betrifft. Es hat sich also auf diese Weise Herr Terquem ein durchaus selbstständiges Verdienst erworben, was ich hiemit in der freudigsten und dankbarsten Weise anerkenne; und ich bin aus allen vorher angeführten Gründen der Meinung, dass Niemand, welcher sich für den fraglichen Gegenstand und die namentlich auch in theoretischer Rücksicht zu so vielen wichtigen Untersuchungen Veranlassung gebende Nautik überhaupt interessirt, auch neben meiner ursprünglichen Schrift die neue Bearbeitung des Herrn Terquem wird entbehren können, weshalb dieselbe der allgemeinsten Beachtung recht sehr empfohlen werden muss, was ich hiermit aus vollkommenster Ueberzeugung thue.

Es ist mir wohl noch erlaubt, darauf hinzuweisen, dass man zweckmässig mit dem Studium der obigen Schriften das meiner Abhandlung in Thl. XXI. Nr. XXII. S. 304. verbinden wird, worin ich eine besonders einfache Entwickelung der Gleichungen der Loxodromen auf Rotationsflächen gegeben zu haben glaube. Ferner verweise ich auf die von mir gefundenen merkwürdigen Ausdrücke für den Flächeninhalt loxodromischer Dreiecke auf der Kugelfläche und auf dem Ellipsoid, die ich in den Abhandlungen Thl. XVI. Nr. II. S. 23. und Thl. XXVII. Nr. XIX. S. 143., hauptsächlich aber in meinem bei Gelegenheit der vierhundertjährigen Jubelfeier der hiesigen Universität im Jahre 1856 verfassten Decanats-Programm: De area trianguli loxodromici in superficie ellipsoidis. Gryphiswaldiae. Kunike. 1856. 4°. entwickelt habe.

Möge die Nautik aus allen diesen Arbeiten den von mir so sehr gewünschten Nutzen ziehen.

Grunert.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1859. Januar — Juni. Prag. 1859. 8°.

Es ist sehr erfreulich, dass die um die Wissenschaften in so vieler Beziehung hochverdiente Königlich Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag von dem jetzigen Jahre an nach dem Beispiele vieler anderen Akademieen und Gesellschaften der Wissenschaften Sitzungsberichte herausgeben wird, in denen alle in den stattgehabten Sitzungen vorgekommenen Verhandlungen in der Kürze mitgetheilt werden. Das erste Heft dieser Sitzungsberichte liegt vor uns, und wir werden seinen Inhalt, eben so wie den Inhalt der ferner erscheinenden Hefte, so bald dieselben uns zugehen, in unseren Literarischen Berichten mittheilen. Der Inhalt des vorliegenden Hefts, so weit derselbe in den Kreis des Archivs gehört, ist folgender.

Das Heft wird eröffnet durch ein Verzeichniss aller jetzigen Ehrenmitglieder, ordentlichen, auswärtigen und ausserordentlichen Mitglieder. Die Gesellschaft besteht aus einer philologischen, historischen, naturwissenschaftlich-mathematischen, philosophischen Section. In der Sitzung der naturwissenschaftlich-mathematischen Section vom 21. Februar 1859 hielt Herr Ritter von Hasner einen physiologisch-optischen Vortrag über das Binocularsehen, welcher nach dem kurz mitgetheilten Inhalte den wichtigen Gegenstand ganz vom mathematischen Standpunkte behandelte. Die betreffende Abhandlung ist im 10ten Actenbande vollständig aufgenommen. — Ferner machte Herr Matzka Mittheilung über seine interessanten Untersuchungen über die Berechnung der Rauminhalte und Schwerpunkte solcher Körper, welche von zwei parallelen gleichvielseitigen Vielecken (Grundebenen) und eben so vielen dazwischen liegenden seitlichen windschiefen Vierecken begrenzt sind, wofern die Seitenkanten entweder gerad, und zwar im allgemeinen paarweis gekreuzt oder angemessen gekrümmt sind. Mit der betreffenden vollständigen, sehr interessanten Abhandlung hat Herr Matzka das Archiv beehrt; unsere Leser kennen dieselbe aus Thl. XXXIII. Hft. 2. Nr. XII. S. 121. — In der Sitzung derselben Section vom 21. März 1859 erläuterte Herr Pierre in sehr deutlicher Weise das neue Nörrenberg'sche Polarisations-Instrument; die beigefügte Figur dient sehr zur besseren Veranschaulichung der ganzen

Sache. — In der Sitzung vom 18. April 1859 *) theilte Herr Jelinek eine Arbeit des Herrn Popper mit, in welcher derselbe die Methode von Weddle zur Auffindung der Wurzeln numerischer Gleichungen einer Modification unterwirft, wodurch diese Methode in der Regel schon bei zweimaliger Anwendung der Transformation, welche der Weddle'schen Methode zu Grunde liegt, die gesuchte Wurzel bis auf 6 Decimalen genau liefert. Die gemachten Mittheilungen sind ungeachtet ihrer Kürze sehr geeignet, einen deutlichen Begriff von Herrn Popper's Methode zu geben. — Herr Kořistka besprach die neueren Planimeter und ihre Benutzung, unter Vorzeigung eines Wetli'schen und eines Amsler'schen derartigen Instruments. In dem Vortrage wurden die Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Instrumente namentlich rücksichtlich des angewandten Coordinatensystems sehr deutlich hervorgehoben und eine Vereinfachung der von Stampfer zuerst entwickelten allgemeinen Theorie des Wetli'schen Instruments angegeben, welche für den Vortrag besonders geeignet sei. Bei der grossen praktischen Wichtigkeit der in Rede stehenden Instrumente würden wir uns erlauben, Herrn Kořistka freundlichst zu ersuchen, uns seine Theorie zur Veröffentlichung in dem Archiv gefälligst mitzutheilen, was gewiss der Sache sehr förderlich sein würde und im allgemeinen Interesse des praktischen Unterrichts sehr zu wünschen wäre. — In der Sitzung vom 23. Mai 1859 demonstrirte Herr Purkyně einen optisch-physikalischen Versuch über die scheinbare Bewegung gerader, in radialer Richtung bewegter Linien.

Wir wünschen sehr, bald zu ähnlichen Mittheilungen über die verdienstlichen Arbeiten der Gesellschaft Gelegenheit zu haben.

---

*) Wir meinen immer die mathematisch-naturwissenschaftl. Section.

Literarischer Bericht

CXXXV.

Am 5. December 1859 starb zu Paris der berühmte Verfasser der „**Élémens de Statique**“ und vieler anderer wichtiger Werke und einzelner Abhandlungen,

L. Poinsot,

dessen ausführlichern Necrolog wir späterhin unseren Lesern mittheilen zu können hoffen.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Gewiss werden alle Leser des Archivs mit besonderer Freude vernehmen, dass Se. Königliche Hoheit der regierende Grossherzog von Baden so eben mit bekannter Munificenz einen neuen Beweis hoher, den Wissenschaften gewidmeter fürstlicher Gunst zu geben geruhet haben, durch Bewilligung der Mittel zur Wiederherstellung der Mannheimer Sternwarte und zur Anstellung eines tüchtigen Astronomen an derselben, so dass dieser alte berühmte Tempel der Wissenschaft von jetzt an mit vollgültigem Rechte wieder in die Reihe der den neuesten Ansprüchen vollkommen Rechnung tragenden Sternwarten eintritt. Se. Königliche Hoheit haben Sich dadurch ein neues unvergängliches Denkmahl in der Geschichte der Wissenschaft gesetzt. Gewiss aber werden wir auf den Dank unserer Leser durch die folgende Mittheilung der näheren Umstände dieses denkwürdigen Ereignisses, welche uns in dankenswerthester Weise von kundiger Freundes-Hand gemacht worden ist, rechnen dürfen. G.

Die Mannheimer Sternwarte befand sich seit dem im Jahre

1846 erfolgten Tode Nicolai's in einem verwaisten Zustande, welcher eigentlich schon mehrere Jahre früher durch seine Krankheit eingetreten war. Bei dem damaligen Zustande der Sternwarte konnte ein Astronom nach dem einstimmigen Urtheil aller Sachverständigen unmöglich ein befriedigendes Resultat seiner Thätigkeit auf derselben erhalten. Es wurden darum von verschiedenen Seiten Vorschläge gemacht, wie die festgesetzten Fonds und die vorhandenen Instrumente benützt werden könnten. Das Zweckdienlichste schien, eine neue Sternwarte zu bauen, und es theilte der verstorbene Astronom Schumacher*), auf Verlangen des Professor W. Eisenlohr, diesem einen sehr sorgfältig ausgearbeiteten Plan mit. Inzwischen kamen die bewegten Zeiten von 1848 und 1849, in denen die badische Regierung Ersparnisse eintreten zu lassen genöthigt war, welche auch dieses Institut trafen. So blieb die Sternwarte unbenutzt, mit Ausnahme der Jahre 1852—1857, in welchen Herrn Dr. Nell die Aufsicht über dieselbe übertragen war.

Bei der Naturforscher-Versammlung in Bonn (1857) berieth sich Professor Eisenlohr mit mehreren Astronomen über die Frage, in welcher Art die Mannheimer Sternwarte wieder in die Reihe der nützlichen Anstalten dieser Art eintreten könnte, indem er bei den wohlwollenden Gesinnungen Sr. Königlichen Hoheit des Grossherzogs für Alles was Wissenschaft und Kunst betrifft, auf eine günstige Annahme zweckmässiger Vorschläge rechnete. Es wurde anerkannt, dass in der jetzigen Zeit kleinere Sternwarten nicht nur sehr nützlich, sondern auch bei der nothwendig gewordenen Theilung der Arbeit unentbehrlich seien. Unter der ausgezeichneten Mitwirkung des Herrn Professor Argelander, der aus Liebe zur Wissenschaft mehrere Male ausdrücklich nach Mannheim und Karlsruhe reiste, um nähere Einsicht zu nehmen, kam nun ein Project zu Stande, welches Professor Eisenlohr Sr. Königlichen Hoheit dem Grossherzoge und Seinem hohen Ministerium vorlegte. Der Erstere genehmigte es mit lebhafter Freude, nachdem auch das Ministerium des Innern bereitwillig die wohlwollendsten Anträge gestellt hatte. Als nun die in demselben Jahre (1857) versammelte Ständekammer auch die nöthigen Geldmittel bewilligt hatte, erhielt Professor Eisenlohr den Auftrag, für den Vollzug zu sorgen. In Gemeinschaft der Herren Professoren Argelander und Schwerd wurde nun die Anschaffung der nöthigen Instrumente, welche im nach-

*) Schumacher war früher selbst einige Zeit lang an der Mannheimer Sternwarte angestellt gewesen. G.

stehenden Verzeichniss unter der Rubrik „Neuere Instrumente“ enthalten sind, so wie die neu zu treffenden Einrichtungen an der Sternwarte berathen und beschlossen. Da die Herstellung des grossen Refractors längere Zeit in Anspruch nahm, so erfolgte die Berufung des neuen Astronomen Herrn Professor Dr. Schönfeld, welcher schon seit sechs Jahren als Assistent an der Bonner Sternwarte angestellt war und durch mehrere ausgezeichnete Arbeiten bekannt ist, erst im September dieses Jahres. Derselbe machte sogleich eine Reise nach München, um die wichtigsten Instrumente einzusehen und, nachdem er sie geprüft, in Empfang zu nehmen. Dieselben sind nun auf der Sternwarte aufgestellt und somit ist dieses Institut auf's Neue in's Leben gerufen. Die an demselben befindlichen und auch jetzt noch brauchbaren älteren Instrumente, so wie die neu angeschafften, sind im folgenden Verzeichniss enthalten.

a) Aeltere Instrumente.

1) Ein Mauerquadrant mit achrom. Fernrohr von Bird in London 1775. Halbmesser des Kreises $7^2/_3'$, Objectiv $3'' \; 7'''$ Oeffnung.

2) Das Passage-Instrument mit dreifachem achrom. Objectiv von Ramsden in London 1785. Länge des Fernrohrs $6'$, Oeffnung des Objectivs $3'' \; 10'''$. Drei Okulare.

3) Der Multiplikationskreis von Reichenbach mit stehender Säule; der Vertikalkreis hat $3'$, der Azimuthalkreis $26''$ Durchmesser; das Fernrohr $4'$ Länge. Objectiv $3'' \; 6'''$ Oeffnung.

4) Eine Secundenpendel-Uhr von Arnold in London; Compensation Zink-Stahl; Echappement nach Graham auf Rubinen.

5) Eine Secundenpendel-Uhr von Norton in London; ohne Rubinen, sonst wie die vorige.

6) Eine Secundenpendel-Uhr von le Paute in Paris; ohne Compensation.

7) Ein siebenfüssiger Heliometer von Dollond Sohn, Objectiv $3''$.

8) Kometensucher von Ramsden, Focallänge $2'$, Feld 6^0.

9) Hadley'scher Spiegelsextant von Troughton.

10) Libelle, Länge $2'$, von Ramsden.

11) Barometer, Thermometer, Normaltoise etc. etc.

b) Neuere Instrumente.

1) Ein achtfüssiger Refractor von Steinheil von $6''$ Oeffnung

mit Sucher, parallaktisch montirt, auf gusseisernem Pfeiler, mit Fluguhr von Mahler, mit Frictionswerk den Sternen folgend, in AR. zu verstellen ohne Unterbrechung des Fortrückens, die Achsen in Steinen, die Kreise auf Silber, nebst sieben Okularen, Sonnenglas und Kreismikrometer mit achromatischem Okular. Ferner dazu gehörig:

ein Lampenfilarmikrometer,
ein Okular-Heliometer,
sechs achromat. Mikrometerokulare,
ein weiteres Kreismikrometer,
drei Kreismikrometerplatten,
ein Centrirapparat für das Objectiv,
ein Sonnenglaskeil zur Trennung der Doppelsterne,
ein Extraokular.

2) Ein Kometensucher von 27″ Länge; 27‴ Oeffnung.
3) Ein Chronometer von Tiede in Berlin.
4) Eine Sekundenpendel-Uhr von Bob in Furtwangen.

Der Refractor ist auf der Plattform der Sternwarte in einem kreisrunden Häuschen mit sechs Fuss hoher Mauer und einer Drehkuppel von 15′ Durchmesser aufgestellt. Die Kuppel ist aus Eisen und Holz construirt; mit Klappen versehen und mit Segeltuch überzogen, welches mit einem sehr dauerhaften Material, der sogenannten Diamantfarbe, angestrichen ist. Sie ruht auf vier Kanonenkugeln, welche bei der Drehung der Kuppel zwischen der unter ihr befestigten gusseisernen Rinne und einer ihr gegenüberstehenden auf dem runden Mauerchen fest gemachten gleichen Eisenbahn fortrollen. Die obere Rinne ist mit horizontal stehenden Zähnen versehen, in welche ein, durch eine Kurbel drehbarer Trieb eingreift. Durch diese Einrichtung ist die Bewegung der Kuppel sehr leicht. Vier Haltefest, welche zugleich Frictionsrollen sind, verhindern, dass der Sturmwind die Kuppel abheben kann.

In demselben Raume befinden sich die Sekundenpendel-Uhr und ein Schrank zur Aufbewahrung der nöthigen Apparate.

Geometrie und Trigonometrie.

Elemetarny wyklad matematyki von J. K. Steczkowski, Professor an der Jagiellonischen Universität zu Krakau. Thl. III., Band III. Analytische Geometrie.
(Man vergleiche Literar. Ber. Nr. XC. S. 4. und Nr. CXXXI. S. 1.)

Wir beeilen uns von dem Erscheinen des vorstehenden Bandes des im Jahre 1851 begonnenen Werkes der elementaren Mathematik zu berichten, welcher die Theorie der analytischen Geometrie, so weit sich diese auf elementarem Wege darstellen lässt, umfasst.

Herr Professor Steczkowski hat sich durch die Herausgabe des neuen, jetzt in seiner Vollendung vorliegenden Werkes unstreitig ein grosses Verdienst erworben, da uns kein anderes Werk in polnischer Sprache bekannt ist, in welchem die ganze elementare Mathematik so vollständig und anschaulich entwickelt wäre.

Da die Mathematik bereits den Standpunkt erreicht hat, dass man fast alle Wahrheiten der analytischen Geometrie, sowohl auf dem Wege der höheren, als der elementaren Mathematik beweisen kann, so hat dies den Herrn Verfasser bewogen, die analytische Geometrie, welche man gewöhnlich zur elementaren Mathematik nicht rechnet, in diese letztere einzuschliessen.

Im ersten Theile dieses Bandes, — in der analytischen Geometrie der Ebene, — wird die Theorie der Linien des zweiten Grades, da sie einen der wichtigsten Theile derselben ausmacht, auf eine ihrer Wichtigkeit ganz entsprechende Weise behandelt; während im zweiten Theile, in der analytischen Geometrie des Raumes, der Herr Verfasser die nahe Verwandtschaft der analytischen und descriptiven Geometrie, so viel als thunlich, für den Anfänger hervorhebt; den Hauptheil dieses Bandes aber macht die Theorie der Flächen des zweiten Grades aus.

Der Erfahrung zu Folge, dass der Anfänger viel leichter von dem speziellen Falle auf den allgemeinen schliesst, (als umgekehrt), hat der Herr Verfasser nicht die schiefwinkligen Coordinaten, von welchen die rechtwinkligen offenbar nur ein spezieller Fall sind, sondern in allen seinen Untersuchungen die rechtwinkligen Coordinaten angewandt, von welchen er erst auf die schiefwinkligen schliesst. In der analytischen Geometrie des Raumes bedient sich Herr Steczkowski ausschliesslich der rechtwinkligen Coordinaten.

In der Einleitung wird auf die Beschränktheit der euklidischen Methode hingewiesen, und an einigen Beispielen die Art und Weise, wie sich die Alten bei Lösung geometrischer Aufgaben zu helfen suchten, gezeigt, zugleich aber auch dargethan, welch ungeheuren Fortschritt die Mathematik seit Descartes's Erfindung der analytischen Geometrie gemacht hat.

Nachdem dann im ersten Abschnitt die Bestimmung des Punktes in der Ebene, die Gleichung und Theorie der geraden Linie entwickelt, und die wichtigsten Anwendungen auf die analytische Geometrie gemacht sind, wird im zweiten Theil die Verwandlung der Coordinaten abgehandelt.

Im dritten Abschnitte werden die allgemeinen Gleichungen der Linien des zweiten Grades, so wie die geometrische Bedeutung dieser Linien, ihre Identität mit den schon im Alterthum bekannten Kegelschnitten, besprochen, und gegen Ende desselben Abschnitts noch die polaren Gleichungen der Curven des zweiten Grades entwickelt und die wichtigsten dahin gehörenden Aufgaben gelöst.

Der vierte und fünfte Abschnitt setzt die Theorie der Kegelschnitte, so weit dies der elementare Weg gestattet, aus einander, vorzüglich ist aber hier die Theorie der Durchmesser, Tangenten und Asymptoten erklärt, und am Ende die Quadratur dieser Linien angegeben, wo die Quadratur der Hyperbel auf die im Archiv Band XXV. Nr. V. entwickelte Weise durchgeführt ist.

Im sechsten Abschnitte endlich ist von den Anwendungen der Theorie der Curven des zweiten Grades auf die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades die Rede, wobei mehre zweckmässig gewählte Aufgaben entwickelt werden, die zu Gleichungen von diesen Graden führen.

Es folgt ferner das Delische Problem und eine Lösung der Aufgabe von der Dreitheilung des Winkels. Bei dem Delischen Problem wird erörtert, dass zu dessen Auflösung nicht durchaus zwei Parabeln nöthig sind, sondern, dass man die zweite durch einen Kreis ersetzen kann.

Bei der Auflösung der Aufgabe von der Dreitheilung des Winkels führt der Herr Verfasser die platonische Lösung mit Hülfe der Conchoide und Cissoide aus, deutet auf ihre Mängel hin, und löst sie mit Hülfe der Hyperbel, oder zwei sich schneidender Parabeln, oder endlich auch mit Hülfe einer Parabel und eines Kreises.

Im zweiten Theile dieses Bandes, in der analytischen Geo-

metrie des Raumes, bedient sich der Herr Verfasser, wie schon bemerkt, nur der rechtwinkligen Coordinaten, da diese zu viel einfacheren Resultaten führen, als die Betrachtung mit schiefwinkligen, und behandelt hier im ersten Abschnitt die Lage der Punkte im Raume. Im zweiten schreitet er gleich zur Theorie der Ebene fort, und nachdem er die allgemeine Gleichung der Ebene gefunden hat, geht er erst zur geraden Linie im Raume über. Die Gleichungen der geraden Linie kann man nämlich leicht finden, wenn man schon die Gleichungen der Ebene kennt, weil jede gerade Linie als der Durchschnitt zweier sich schneidender Ebenen angesehen werden kann.

Der dritte Abschnitt handelt von der Verwandlung der Coordinaten, und zwar nur der rechtwinkligen, weil die schiefwinkligen in diesem Theile bei Herrn Steczkowski keine Anwendung finden.

Im vierten Abschnitt werden zunächst krumme Flächen im Allgemeinen abgehandelt, sodann die Theorie der Kugel, der Oberfläche des Cylinders und des Kegels, der schiefen und Rotations-Flächen kurz aus einander gesetzt.

Der fünfte Abschnitt umfasst eine ausführliche Behandlung der Theorie der Flächen zweiten Grades, und im sechsten und letzten Abschnitt giebt der Herr Verfasser noch die Theorie der Berührungsebene der krummen Flächen zweiten Grades.

Der Herr Verfasser hat sich durch dieses ganze Werk jedenfalls ein unvergängliches Denkmal in der Geschichte der polnischen mathematischen Literatur gesetzt, so dass wir ihm zur Vollendung desselben nur aufrichtig Glück wünschen können.

S.

Elementarny wykład matematyki von J. K. Steczkowski, Professor an der Jagiellonischen Universität zu Krakau. Thl. III. Band II. Ebene und sphärische Trigonometrie.

Eben so sehr freuen wir uns, das Erscheinen des zweiten Bandes des III. Theils der von uns vor Kurzem angezeigten Geometrie anzeigen zu können, von welchem Alles dasjenige, was bei dem Berichte des ersten Theiles zur Empfehlung gesagt worden ist, in ganz gleichem Maasse gilt.

Das neue Buch zeichnet sich durch eine leicht übersichtliche, naturgemässe, systematische Anordnung, wie durch eine klare

und gründliche, nach einer gewissen Vollständigkeit und Ausführlichkeit strebende Darstellung aus.

Die Hauptsätze der ebenen und sphärischen Trigonometrie sind auf verschiedene, sowohl analytische, als geometrische Weise bewiesen, um auch hier die mannigfaltige Beweisführung dem Anfänger zu bekunden; zugleich zeigt der Herr Verfasser, dass ebenso wie die Planimetrie, auch die ebene und sphärische Trigonometrie ein gewisses Ganze bilden, indem er darthut, wie die Beweise der Lehrsätze der sphärischen Trigonometrie gänzlich auf der ebenen Trigonometrie beruhen, und wie man sogar alle Analogien der sphärischen Trigonometrie aus einem ebenen Dreiecke herleiten kann.

Bei der Herleitung der trigonometrischen Funktionen betrachtet der Herr Verfasser nicht, wie es gewöhnlich geschieht, die trigonometrischen Linien im Kreise, sondern leitet sie aus der Betrachtung der rechtwinkligen Coordinaten ab.

In der Einleitung ist auf die Ungenauigkeit der Constructions- oder euklidischen Methode hingewiesen, ebenso ist von den durch Hipparchus und Ptolemaeus in die Rechnung eingeführten Sehnen die Rede, und von der Art, in welcher letzterer seine Tafeln berechnet hat.

Nachdem dann der Herr Verfasser im ersten Abschnitte die einzelnen Funktionen hergeleitet und ihre Natur und ihre wechselseitigen Beziehungen in sehr eleganter und anschaulicher Weise aus einander gesetzt hat, weist er im zweiten Abschnitte nach, wie man dieselben auf elementarem Wege berechnen und in Tafeln aufstellen kann. Die zweite von den hier zur Berechnung der einzelnen Funktionen angegeben Methoden ist zwar kürzer und einfacher, aber auch oft mit Schwierigkeiten verbunden, da sie auf der Auflösung der Gleichungen von höheren Graden beruht. In demselben Abschnitte sind noch die Kontroll-Methoden von Euler und Legendre besprochen und die Logarithmentafeln und deren Einrichtung erläutert.

Der dritte Abschnitt handelt von der Auflösung der Dreiecke, und enthält zahlreiche numerische Beispiele, ganz geeignet, den Anfänger in der Lösung trigonometrischer Aufgaben zu üben.

Im vierten und letzten Abschnitt werden zuerst die zu Messungen nöthigen Instrumente und deren Gebrauch beschrieben, sodann einige lehrreiche Aufgaben aus der Geodäsie gelöst und die wichtigsten Anwendungen auf die Geometrie und Stereometrie gezeigt.

In der sphärischen Trigonometrie geht der Herr Verfasser sogleich an die Auflösung der Dreiecke, da alle nöthigen Vorkenntnisse bereits Band III. Thl. I. niedergelegt worden sind. Alle bei der Auflösung sphärischer Dreiecke vorkommenden Fälle sind hier auf sehr vollständige Weise entwickelt, und die von berühmten Mathematikern gefundenen Formeln mit in Betracht gezogen.

Aus den Gauss'schen Formeln sind zwei für die ebene Trigonometrie sehr wichtige Lehrsätze hergeleitet; — diesen für die ebene Trigonometrie höchst wichtigen Relationen hat Herr Anger in unserem Archiv bereits früher Rechnung getragen.

Schliesslich werden noch einige Anwendungen der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie und Geodäsie erwähnt. Es sind auch hier wie in der ebenen Trigonometrie zur grösseren Uebung des Anfängers zahlreiche numerische Aufgaben gelöst. S.

Astronomie und verwandte Wissenschaften.

Zeitschrift für populäre Mittheilungen aus dem Gebiete der Astronomie und verwandter Wissenschaften. Herausgegeben von Professor Dr. C. A. F. Peters, Director der Sternwarte in Altona. Band I. Heft 3. Altona. 1859.

Die beiden ersten Hefte dieser neuen überaus verdienstlichen Zeitschrift, welcher wir den ungehindertsten Fortgang im Interesse der in ihr vertretenen Wissenschaften von Herzen wünschen, sind im Literar. Ber. Nr. CXXV. S. 1. und Nr. CXXVI. S. 6. angezeigt worden.

Das vorliegende dritte Heft enthält zwei Aufsätze. Der erste führt die Ueberschrift: „Beiträge zur Biographie von F. W. Bessel. Von M. Wichmann." In einer Vorbemerkung spricht der hochverdiente Herr Herausgeber sich über den Inhalt dieses Aufsatzes folgendermassen aus: „Die nachfolgenden Bruchstücke einer Biographie von Bessel sind mir von Herrn Professor Erman (in Berlin) zur Publication in diesen Blättern zugesandt worden. Bei dem Interesse, welches jede Kunde aus Bessel's Leben den Freunden der Wissenschaft gewähren muss, werden diese Mittheilungen den Lesern der Zeitschrift ohne Zweifel willkommen sein. Indem sie ein letztes Andenken von Wichmann*)

---

*) Leider bereits verstorben.

bieten, gewähren sie zugleich eine Ergänzung zur bekannten, leider unvollendeten Selbstbiographie von Bessel. Durch seine Beziehungen zu Bessel und dessen Familie, so wie durch den Einblick in die hinterlassenen Papiere Bessel's, hat Wichmann sich eine umfassende und getreue Vorstellung der ersten Entwickelungsperiode unseres grossen Astronomen bilden können. Er scheint den Plan gehabt zu haben, die von ihm gesammelten Nachrichten in einer ausführlichen Biographie niederzulegen, aber sein Tod hat die Fortsetzung und Vollendung der begonnenen Arbeit verhindert." — Wir wüssten nicht, was wir diesen Worten des Herrn Herausgebers noch Wesentliches hinzufügen sollten. Aber so viel können wir unsern Lesern versichern, dass ihnen die Lectüre dieser Bruchstücke einen sehr grossen Genuss gewähren wird, so wie auch, dass viele in denselben vorkommende mathematische und astronomische Notizen Gelegenheit zu vielfacher Belehrung darbieten. Wir danken daher dem Herrn Herausgeber für die Mittheilung dieses Aufsatzes recht sehr, und wünschen, dass er die verdiente Beachtung in reichstem Maasse finden möge, indem wir nur noch bemerken, dass der Aufsatz mit dem ferneren Aufenthalte Bessel's in Bremen nach der Bekanntwerdung mit Olbers bis zur Uebersiedelung nach Lilienthal (August 1804 bis März 1806), wovon jedoch nur der Anfang noch mitgetheilt ist, schliesst.

Der zweite in diesem dritten Hefte enthaltene Aufsatz hat die Ueberschrift: „Beitrag zur Kunde der periodischen Entwickelung der Pflanzen. Von Dr. C. H. Germar," in welchem der Herr Verfasser in sehr verdienstlicher Weise sehr interessante hundertjährige Beobachtungen über die Laubentfaltung der frühen Buchen aus dem Schlosspark zu Augustenburg auf der Insel Alsen mittheilt. Indem wir auch auf diesen lehrreichen Aufsatz aufmerksam machen, wünschen wir sehr, recht bald das vierte Heft dieser der Wissenschaft schöne Früchte tragenden und deren weitere Verbreitung wesentlich fördernden Zeitschrift anzeigen zu können.

Physik.

Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung. Zum Gebrauche in den höheren Schulen und zum Selbstunterrichte. Von Dr. August Kunzek, k. k. ord. Professor der Physik an der Universität in Wien u. s. w.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 390 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wien. 1860. Braumüller. 8.

Unsere Leser werden sich aus den im Literarischen Bericht Nr. CXXIV. S. 2. — Nr. LXXXVI. S. 11. — Nr. CV. S. 7. gelieferten Anzeigen erinnern, dass der Herr Verfasser des vorliegenden ausgezeichneten Werkes in drei methodisch vom Leichteren zum Schwereren fortschreitenden Werken einen trefflichen vollständigen Cursus der gesammten Physik veröffentlicht hat, welcher nicht genug empfohlen werden kann. Zwischen dem „Lehrbuche der Experimentalphysik“ und den „Studien aus der höheren Physik“ steht das vorliegende Werk gewissermassen in der Mitte. Die erste Auflage desselben ist im Literar. Ber. Nr. LXXXVI. S. 11. mit hinreichender Ausführlichkeit und verdientem Lobe von uns angezeigt worden. In dieser ersten Auflage musste der Leser häufiger auf das oben genannte „Lehrbuch der Experimentalphysik“ zurückgehen, weil beide Werke in einem gewissen inneren Zusammenhange standen und nach der Absicht des Herrn Verfassers stehen sollten. Die vorliegende neue Auflage tritt dagegen jetzt, was wir nur sehr loben können, als ein völlig selbstständiges, von dem erwähnten Elementarbuche ganz unabhängiges Werk auf, indem der Herr Verfasser, wie er in der Vorrede selbst sagt, „bemüht war, das Werk in ein selbstständiges Ganze umzugestalten, so dass zum Verständniss der in demselben behandelten Naturgesetze und ihrer Begründung das Nachschlagen seiner Experimentalphysik oder eines anderen Werkes jetzt nicht mehr erforderlich ist, und nur die Kenntniss einiger einfachen Lehren, die, einmal gelernt, nicht leicht vergessen werden, vorausgesetzt wird.“ Der streng mathematische Charakter, welchen wir schon bei der Anzeige der ersten Auflage mit so vielem Lobe uns hervorzuheben bemühten, ist dem Werke auch in der neuen Auflage nicht bloss vollständig erhalten worden, sondern dasselbe ist in mehreren Partieen, ohne die experimentale Seite der Physik im Geringsten zu vernachlässigen und hintenanzusetzen, noch mehr wie früher in den Vordergrund getreten, wobei sich jedoch der Herr Verfasser seiner Absicht gemäss ganz streng in den Gränzen der sogenannten Elementar-Mathematik, so weit dieselbe auf Schulen gelehrt zu werden pflegt, gehalten hat, was gegenwärtig um so mehr gerechtfertigt erscheint, da ja die später erschienenen Studien aus der höheren Physik denen, die weiter zu gehen beabsichtigen, das trefflichste Hülfsmittel darbieten. Den mathematischen Darstellungen ist auch in dieser neuen Auflage wie in der früheren ein mehr geometri-

scher als rein analytischer Charakter verliehen worden, was wir nicht bloss vollkommen billigen, sondern als einen besonderen Vorzug eines solchen Werkes erkennen, weil dadurch dem Schüler die schönste Gelegenheit zur Anwendung seiner in der reinen Elementar-Mathematik erworbenen Kenntnisse dargeboten wird. Die mathematischen Beweise sind überall streng, und liefern den Beweis, dass der Herr Verfasser selbst in einer streng mathematischen, hauptsächlich geometrischen Schule erzogen worden ist, diesen streng geometrischen Geist in erfreulichster Weise sich immer zu erhalten gewusst hat, und denselben überall auch in das Feld der Anwendung zu übertragen bemühet ist, was namentlich das vorliegende Buch für Anfänger zu einer höchst lehrreichen, den streng mathematischen Geist immer mehr kräftigenden und weckenden Lectüre macht. Rücksichtlich des Inhalts können wir nur im Allgemeinen bemerken, dass sich derselbe, mit Einschluss der wichtigsten chemischen Lehren, so wie der Grundlehren der Astronomie und der Meteorologie, über das weite Gebiet der ganzen Physik in ziemlich gleichmässiger Ausführung der einzelnen Partieen erstreckt. Eine grosse Anzahl gut ausgeführter Holzschnitte trägt sehr viel sowohl zur Deutlichkeit der mathematischen Beweise als auch zur Veranschaulichung der vielen physikalischen Instrumente und Apparate bei, welche man in diesem schönen Werke beschrieben und erläutert findet. Wir können nicht sagen, wie sehr wir uns über das Erscheinen dieser neuen Auflage des von uns schon in der Anzeige der ersten Auflage so warm empfohlenen Werkes gefreuet haben, da hierin zugleich unser früheres so günstiges Urtheil die beste Bestätigung findet. Dasselbe nimmt in Rücksicht auf wahre Gründlichkeit in theoretischer Beziehung, namentlich aber auch rücksichtlich der überall vorwaltenden mathematischen Strenge, ferner in Bezug auf die Deutlichkeit, mit welcher die verschiedenartigsten Apparate beschrieben und abgebildet sind, und in Bezug auf die Umsicht, mit welcher auch stets Anwendungen, wo sie sich irgend auf dem Gebiete der eigentlichen Praxis darboten, Berücksichtigung gefunden haben, jedenfalls eine der ersten Stellen in der neueren physikalischen Literatur ein, und verdient daher solchen Anfängern, denen es, mit einer gründlichen und möglichst vollständigen Kenntniss der sogenannten Elementar-Mathematik ausgerüstet, um eine entsprechende wahrhaft gründliche Kenntniss der Physik zu thun ist, vorzugsweise zum sorgfältigsten Studium empfohlen zu werden, womit wir nur in erhöhetem Maasse das wiederholen, was wir schon bei der Anzeige der ersten Auflage mit wärmster Anerkennung der Verdienstlichkeit dieses Werkes gesagt haben.

Endlich fügen wir noch hinzu, dass dasselbe wegen seiner grossen Deutlichkeit sich ganz vorzüglich auch zum Selbststudium eignet; und dass namentlich auch alle Lehrer der Physik den reichsten Nutzen aus demselben ziehen können, versteht sich nach dem Obigen ganz von selbst. Möge dem Werke die Anerkennung, welche es nach unserer Meinung in jeder Beziehung so sehr verdient, in reichstem Maasse zu Theil werden.

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXXXI. S. 9.).

No. 4. (Luglio e Agosto 1859.).

Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quarto ordine (e terza classe). Nota del Prof. Luigi Cremona. p. 201. — Note de Géométrie infinitésimale. Par A. Mannheim. p. 208. — Sur quelques formules pour la différentiation. Par M. A. Cayley. p. 214. — Dimostrazione dell' irreduttibilita dell' equazione formata con le radici primitive dell' unita. Nota del Sig. V. A. Lebesgue. p. 232. — Sur les différences de 1^p, et sur le calcul des nombres de Bernoulli. Par E. Catalan. p. 239. — Ricerche analitiche sopra le attrazioni esercitate da una linea piana verso un punto materiale collocato nel suo piano, ed in particolare sull' attrazione del quadrante di un' ellisse verso il centro. Nota del Prof. Barnaba Tortolini. p. 244. — Intorno ad una equazione trinomia. Nota del Prof. A. Genocchi. p. 253. — Applicazione di una formola d'integrale definito multiplo all' integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali, e a coefficienti costanti del Prof. Barnaba Tortolini. p. 260.

Rivista bibliografica. Sopra una nuova espressione pel risultante di due equazioni algebriche. Articolo del Prof. Francesco Brioschi. p. 262. — Pubblicazioni recenti. p. 264.

No. 5. Settembre e Ottobre 1859.

La Teorica dei Covarianti e degli Invarianti delle forme binarie, e le sue principali applicazioni. Monografia del Sig. Prof. F. Brioschi (Continuazione). p. 265. — Sur les lignes de courbure de la surface des ondes par Mr. Ed. Combescure. p. 278. —

Osservazioni sulla precedente Memoria del Sig. Prof. Francesco Brioschi. p. 285. — Fondamenti di una Teorica generale delle funzioni di una variabile complessa di B. Riemann (Traduzione dal Tedesco). p. 288. — Sopra alcune proprietà della propagazione della corrente elettrica nei fili telegrafici, dedotte dalla Teoria di Ohm. Nota del Sig. Filippo Keller. p. 305. — Sopra alcune linee, e superficie derivate. Memoria del Sig. Prof. Barnaba Tortolini. p. 316. — Extrait d'une lettre de Mr. Mich. Roberts a Mr. Tortolini, sur la théorie des equations algébriques. p. 330.

Rivista bibliografica. Sulla riduzione delle equazioni isoperimetriche alla forma canonica. Articolo del Sig. Prof. F. Brioschi. p. 333. — Differential Equations by George Boole. Articolo del Prof. Barnaba Tortolini. p. 336.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXXV. S. 7.).

26me Année, 2me Sér. T. I. 1857. Tremblements de terre en 1855, par M. A. Perrey. Rapport de M. Ad. Quetelet. p. 48. — Occultation de Jupiter par la lune, le 12. janvier 1857; note par M. Ern. Quetelet. p. 50. — Note sur les tremblements de terre ressentis en 1855, avec suppléments pour les années antérieurs; par M. A. Perrey. Deuxième Partie. Tremblements de terre en 1855. p. 64. (Sehr vollständige und fleissige Arbeit). — Note de M. Geniller sur la constitution physique du soleil. Rapport de M. le capitaine Liagre. p. 221. — Sur les triangulations qui ont été faites en Belgique postérieurement à 1830; par M. le général Nerenburger. p. 281. — Observations des passages de la lune et des étoiles de même culmination; par M. A. Quetelet. p. 478.

26me Année, 2me Sér. T. II. 1857. Essais analytiques. Les lignes du troisième ordre; par M. F. Dagoreau. Rapport de M. Brasseur. p. 7. — Détermination de la différence de longitude de Bruxelles et de Berlin; par M. A. Quetelet. p. 17. — Observations des passages de la lune et des étoiles de même culmination faites en 1855 et 1856; par M. A. Quetelet. p. 18. — Théorie géométrique des rayons et centres de courbure; par M. E. Lamarle. p. 33. (Sehr lesenswerthe Abhandlung). — Théorie géométrique des rayons et centres de courbure. Note additionelle. Par M. Lamarle. p. 307. — Variations annuelles des instruments météorologiques à Bruxelles; par M. A. Quetelet. p. 321.

— Variations horaires des instruments météorologiques à Bruxelles. Observations faites dans le royaume. 2me article; par M. A. Quetelet. p. 501. — Théorie géométrique des rayons et centres de courbure. Note additionelle. Courbes reductibles au type cycloïdal. Par M. Lamarle p. 528. (S. oben).

(Fortsetzung im nächsten Hefte.)

Unterrichtswesen.

Als ich in der vorigen Nummer des Literarischen Berichts das Referat über die neu erlassene, nach meiner vollkommensten Ueberzeugung in allen Beziehungen in hohem Grade treffliche „Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung der (preussischen) Realschulen und der höheren Bürgerschulen“ schrieb, lag mir nur das October-Heft. 1859. des „Centralblatts für die gesammte Unterrichts-Verwaltung in Preussen von Stiehl“ vor, welches für's Erste nur unter I. den Lehrplan und die innere Gliederung der Realschulen, unter III. die Unterscheidung der Realschulen und deren Berechtigungen, und hauptsächlich unter II. das Reglement für die Abiturienten-Prüfungen der Realschulen enthält, an welches letztere ich mich daher bei meinem Referat auch nur allein angeschlossen habe und anschliessen konnte. Das November-Heft. 1859. des genannten Journals, welches S. 646. ff. noch Erläuternde Erklärungen zu der eigentlichen Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung mittheilt, war damals noch nicht in meinen Händen. Namentlich in Beziehung auf meine in jenem Referat rücksichtlich des Unterrichts in der höheren Analysis gemachte Bemerkung halte ich mich jetzt für verpflichtet — und thue, wegen des sehr lebhaften Interesses, welches ich an diesem neuen Reglement und den Lehranstalten, die dasselbe betrifft, nehme, dies auch sehr gern, — hier nachträglich zu bemerken, dass die Erläuterungen (S. 668 a. a. O.) noch folgende Bestimmung enthalten: „Besonders befähigte Abtheilungen und **einzelne talentvolle Schüler** in Prima wird der Lehrer auch in die höhere Analysis, die Differential- und Integralrechnung und die sphärische Astronomie einführen **können.**“ — Dass ich auch diese Bestimmung **unter dieser Form** mit dem vollkommensten Beifall begrüsse und in derselben nur noch mehr die grosse Umsicht, mit welcher das fragliche Reglement verfasst ist, freudigst erkenne, versteht sich von selbst. Nur gegen jede obligatorische Einführung des Unterrichts in der höheren Ana-

lysis in den Lehrplan der Realschulen und als eigentlicher Prüfungs-Gegenstand erkläre ich mich nach wie vor in bestimmtester Weise. Mit **einzelnen talentvollen Schülern** den Versuch zu machen, wenigstens dies zu **können**, d. h. dazu die Erlaubniss zu haben, ist ganz in der Ordnung, und kann gegen die hohe Unterrichts-Behörde nur zu neuem aufrichtigen Danke auffordern. Wenn man aber einmal einen solchen Versuch macht, dann thue man es auch in völlig strenger Weise, nicht etwa so à la Lacroix seligen Andenkens, oder nach der Weise mancher deutschen Elementarbücher, welche auch der Differentialrechnung einige Seiten widmen, und zwar den Begriff der Gränze einführen, aber den argen, die ganze Darstellung völlig illusorisch machenden Fehler begehen, dass sie bei ihren sogenannten Gränzen-Bestimmungen oder Gränzen-Ermittelungen die **Existenz** einer Gränze schon stillschweigend voraussetzen, wogegen doch der **Nachweis dieser Existenz einer Gränze** gerade das ist, worauf es zunächst und hauptsächlich ankommt. Wie schädlich ein solcher ganz ungründlicher und fehlerhafter Elementar-Unterricht für den höheren Unterricht ist, und wie entmuthigend er bei diesem letzteren namentlich auch auf die Schüler wirkt, wenn ihnen klar gemacht wird, dass sie das früher Erlernte völlig bei Seite werfen und sich in ganz neue Vorstellungen und Anschauungen finden müssen, kann nur der Lehrer gehörig beurtheilen, welchem bei dem höheren Unterrichte eine reiche und vielfache Erfahrung zur Seite steht, und der es als einen wesentlichen Theil seiner Aufgabe betrachtet, sich im Einzelnen mit den Bedürfnissen seiner Schüler bekannt zu machen, und jeden nach seiner Individualität genau kennen zu lernen. Grunert.

Literarischer Bericht

CXXXVI.

Am 27. Juli 1859 starb zu Saalfeld nach zwei und einvierteljähriger segensreicher amtlicher Wirksamkeit als Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaft an der dortigen Realschule, tief betrauert von seinen Vorgesetzen, Collegen und Schülern,

Dr. Andreas Völler,

welchem das Archiv einige sehr werthvolle Beiträge verdankt. Derselbe war geboren zu Helba am 11. September 1833.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Die Märtyrer unter den Naturforschern. Ein Vortrag zu Gunsten der Humboldt-Stiftung gehalten zu Stettin am 7. Februar 1860. von Dr. H. Emsmann, Professor zu Stettin. Leipzig. O. Wiegand. 1860. 8.

So wie die im Literarischen Bericht Nr. CXXX. S. 1. angezeigte Schrift desselben Herrn Verfassers, enthält auch die vorliegende einen in mehrfacher Beziehung interessanten Beitrag zur Geschichte der Naturwissenschaft, wenn auch die in demselben mitgetheilten Thatsachen schon allgemeiner bekannt sind als die in der früheren Schrift gemachten Mittheilungen. Neben Anaxagoras, Aristoteles, Aristarch, dem Bischof Virgilius von Salzburg im 8ten Jahrhunderte, haben natürlich die bekannten Schicksale Roger Bacon's, des Copernicus, Giordano Bruno's, Kepler's und hauptsächlich Galilei's, mit welchem

das eigentliche Märtyrerthum in den Naturwissenschaften schliesst. die meiste Berücksichtigung gefunden.

Arithmetik.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Doctor J. H. W. Lehmann in Spandau an den Herausgeber.

Der Hauptmann a. D. Adolf von der Schulenburg in Magdeburg hat sich seit Jahren in die Theorie der höheren algebraischen Gleichungen so weit hineingearbeitet, dass es ihm gelungen ist, allgemeine und sehr merkwürdige, mir bisher unbekannte Sätze zu entdecken, welche die Form der Wurzeln aller Gleichungen in Functionen der Coefficienten evident darstellen, indem das $n$fache jeder Wurzel einer Gleichung des $n$ten Grades aus Auflösungssummen zusammengesetzt ist, deren jede gleich ist

$$y\sqrt[n]{1}+v\sqrt[n]{1}+z\sqrt[n]{1}+u\sqrt[n]{1}+\ldots.$$

(wobei $y, v, z, u, \ldots.$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung des $n$ten Grades, $\sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{1}, \ldots.$ aber die n verschiedenen Wurzeln der $n$ten Ordnung aus 1 sind, nämlich, wenn n gerade ist, $+1$ und -1 und $n-2$ imaginäre Wurzeln, und wenn n ungerade ist, $+1$ und $n-1$ imaginäre). Unter diesen Auflösungssummen ist die erste $=y+v+z+u+\ldots.$, indem hier $\sqrt[n]{1}$ überall $=1$ gesetzt wird; sie ist gleich dem Entgegengesetzten des Coefficienten von x^{n-1} in der gegebenen Gleichung; in jeder der übrigen $n-1$ Auflösungssummen aber werden für $\sqrt[n]{1}$ alle n verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{1}$ gesetzt, und zwar für die verschiedenen Auflösungssummen in verschiedener Permutation. Herr von der Schulenburg zeigt alsdann, dass die genannten $n-1$ Auflösungssummen die Formen

$$\sqrt[n]{F},\ C(\sqrt[n]{F})^2,\ D(\sqrt[n]{F})^3,\ E(\sqrt[n]{F})^4,\ \ldots.\ M(\sqrt[n]{F})^{n-1}$$

haben, wobei $\sqrt[n]{F}$ überall mit derselben (reellen oder imaginären) $n$ten Wurzel aus 1 multiplicirt gedacht werden muss (so dass, wenn man nach und nach alle n Wurzeln aus 1 wählt, alle n Wurzeln der gegebenen Gleichung herauskommen), jede der Grössen $F, C, D, E, \ldots.$ aber von der Form

$$G' + \sqrt[n-1]{F'} + C'(\sqrt[n-1]{F'})^2 + D'(\sqrt[n-1]{F'})^3 + E'(\sqrt[n-1]{F'})^4 + \ldots. + M'(\sqrt[n-1]{F'})^{n-2},$$

jede der Grössen G', F', C', D', E', ... aber von der Form

$$G'' + \sqrt[n-2]{F''} + C''(\sqrt[n-2]{F''})^2 + D''(\sqrt[n-2]{F''})^3 + E''(\sqrt[n-2]{F''})^4 + \ldots. + M''(\sqrt[n-2]{F''})^{n-3}$$

ist, u. s. w. Er entwickelt eine Methode, wie man $F, C, D, E, \ldots. M$ vermittelst Gleichungen bestimmen kann, die den $(n-1)$sten Grad nicht übersteigen, und bedient sich dazu nicht nur der vollständigen symmetrischen Functionen von y, v, z, u, ..., sondern auch der getheilten symmetrischen Functionen, auf welche Abel in seinem Beweise der Unmöglichkeit der allgemeinen Auflösung der den 4ten Grad übersteigenden Gleichungen keine Rücksicht genommen; er zeigt, dass die Gleichungen zur Bestimmung der getheilten symmetrischen Functionen, wenn sie auch anfangs vom $n$ten oder einem noch höheren Grad zu sein scheinen, sich doch auf den $(n-1)$sten Grad zurückführen lassen, und legt dadurch die Schwäche des Abel'schen Beweises der Unmöglichkeit der allgemeinen Auflösung dar. Er führt die allgemeine Auflösung der Gleichungen des fünften Grades in extenso durch.

Es ist wegen der grossen Weitläufigkeit dieser Arbeit nicht zu verwundern, dass Herr von der Schulenburg seine Entwickelung noch nicht so weit ausgeführt hat, dass jeder andere Mathematiker von Profession sich daraus vernehmen könnte; die vollständige Ausführung möchte noch ein halbes Jahr auf sich warten lassen, und die Vollendung des Drucks sich bis gegen den Schluss des gegenwärtigen Jahres hinziehen.

Ich habe die moralische Ueberzeugung, dass der Verfasser die Schwäche des Abel'schen Beweises aufgedeckt, die allgemeine Auflösung der Gleichungen des 5ten Grades gefunden, und dadurch ein Problem gelöst hat, woran man seit 250 Jahren vergebens arbeitete, und dass seine Methode sich auf alle höheren Gleichungen ausdehnen lassen würde, wenn nicht die zu grosse Weitläufigkeit die Ausführung verböte. Dass hier nicht von praktischer Anwendung auf numerische Gleichungen die Rede sein könne, versteht sich von selbst; das Interesse ist rein wissenschaftlich; es handelt sich hauptsächlich um Darlegung der Schwäche des Abel'schen Beweises. Meine gründliche Revision der Manuscripte erstreckt sich auf die Theorie der Gleichungen des 3ten und 4ten Grades, und ich finde darin ein abgeschlossenes Ganzes, worin der organische Zusammenhang viel klarer nachgewiesen ist

als von Cardan und Bombelli; ausserdem habe ich das, was der Verfasser von den Gleichungen des 5ten Grades bisher klar übersichtlich entwickelt hat, schon sehr weit verfolgt, und finde darin eine ausnahmslose strenge Consequenz und Schärfe, namentlich eine bewundernswürdige Sicherheit und Leichtigkeit im Gebrauch des Imaginären; mit einem Worte, ich halte den Verfasser für einen Mann, welcher der Aufgabe, die er sich vorgesetzt hat, gewachsen ist. Die geordnete Ausarbeitung der Blätter, welche mir vorgelegen haben, würde an und für sich schon ein gutes Buch werden, auch wenn das Endziel, die allgemeine Auflösung der Gleichungen des 5ten Grades, noch nicht hinzukäme. Ist aber das Endziel erreicht und in die Oeffentlichkeit gegeben, so ist an dem glücklichen buchhändlerischen Erfolge nicht zu zweifeln, insofern man sein Augenmerk nicht auf den Absatz in Deutschland allein, sondern auch auf das ganze wissenschaftliche Europa und Amerika richtet.

Sollten Sie, hochgeehrter Herr Professor, geneigt sein, die von mir hier gegebenen Notizen in Ihre geschätzte Zeitschrift aufzunehmen, so würden Sie dadurch dem Herrn von der Schulenburg und mir einen grossen Gefallen thun; denn es ist nicht zu zweifeln, dass die Bekanntmachung auf den von soliden Buchhandlungen zu fassenden Entschluss des Verlags einen sehr wesentlichen Einfluss haben würde. Ich aber bin bereit, alle Verantwortung zu tragen.

Spandow, den 22. März 1860.

Dr. J. H. W. Lehmann.

Auflösung der algebraischen Gleichungen aller Grade. Von L. Mossbrugger, Lehrer der Mathematik an der Kantonschule zu Aarau. Aarau. Sauerländer. 1859. 4°.

Gegenüber der vorstehenden Anzeige des Herrn Doctor Lehmann, nach welcher Herr von der Schulenburg in Magdeburg die allgemeine Auflösung der Gleichungen gefunden haben soll, halte ich mich für verpflichtet, zu bemerken, dass mit einem „Aarau, den 17ten December 1859“ datirten Briefe die oben genannte Schrift von ihrem geehrten Verfasser mir zugesandt worden, und etwa am Ende des vorigen oder am Anfange des laufenden Jahrs in meine Hände gelangt ist. Leider hat mir bis jetzt die nöthige Zeit und Ruhe gefehlt, diese Schrift einer so sorgfältigen und eingehenden Prüfung zu unterwerfen, wie dieselbe namentlich bei einem Gegenstande von der Art des in Rede ste-

henden unbedingt nöthig ist, wenn ich mich soll für berechtigt halten, ein bestimmtes Urtheil zu fällen, ob Herr Mossbrugger seinen Zweck, die allgemeine Auflösung der Gleichungen zu geben, wirklich erreicht hat. Ich bin also genöthigt, ein solches bestimmtes Urtheil noch zurück- und einer späteren Zeit vorzubehalten, würde auch deshalb über die vorliegende Schrift für jetzt noch geschwiegen haben, wenn mir nicht so eben die vorstehende Ankündigung des Herrn Doctor Lehmann zugegangen wäre, welche unverzüglich zum Druck zu bringen, ich mich für verpflichtet hielt. Dadurch glaubte ich aber nach meinen Grundsätzen in solchen Dingen zugleich auch die Verpflichtung übernommen zu haben, von der obigen seit etwa einem Vierteljahre in meinen Händen befindlichen Schrift für jetzt wenigstens eine vorläufige kurze Anzeige zu liefern, wie ich dies, eine weitere Besprechung mir noch vorbehaltend, jetzt thun werde.

Zuerst sei daher im Allgemeinen bemerkt, dass Herr L. Mossbrugger in §. 7. der obigen Schrift die allgemeine Auflösung der Gleichung des $n$ten Grades gegeben hat, welche er auf die Form

$$x^n = A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots. + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n$$

gebracht und also in gewöhnlicher Weise das zweite Glied aus der Gleichung weggeschafft annimmt, bevor er zu der Auflösung selbst übergeht. Diese Wegschaffung des zweiten Gliedes wird in §. 1. gelehrt. Nach einem für die Gleichungen aller Grade im Allgemeinen übereinstimmenden Verfahren wird nun zuerst in §. 2. die Auflösung der Gleichung des dritten Grades gegeben, welche zu der gewöhnlichen Auflösung des Cardanus, natürlich auf einem besonderen, Herrn Mossbrugger eigenthümlichen Wege führt. In §. 3. wird die Auflösung der Gleichung des vierten, in §. 4. die der Gleichung des fünften Grades, überall in ganz allgemeinen Formeln und, wie schon erwähnt, bei den Gleichungen aller Grade nach einem im Wesentlichen übereinstimmenden Verfahren gegeben. Dann beschäftigt sich in §. 5. Herr Mossbrugger mit der allgemeinen Auflösung der Gleichungen gerader Grade von der Form

$$x^{2m} + A_2x^{2m-2} + A_3x^{2m-3} + \ldots. + A_{2m-1}x + A_{2m} = 0,$$

geht in §. 6. zu der Auflösung der Gleichung des sechsten Grades über, und giebt dann, wie schon oben erinnert, in §. 7. ganz im Allgemeinen die Auflösung jeder beliebigen Gleichung des $n$ten Grades.

Dies ist im Allgemeinen der Inhalt der offenbar mit grosser

Sorgfalt und Genauigkeit verfassten Schrift, und die angewandte, bei den cubischen Gleichungen zu der bekannten cardanischen Auflösung führende Methode für die Gleichungen aller Grade im Wesentlichen dieselbe, was jedenfalls ein günstiges Vorurtheil erwecken muss. Mehr über die Methode hier zu sagen, ist für jetzt nicht möglich, indem wir uns mit der Bemerkung begnügen müssen, dass dieselbe zunächst und hauptsächlich auf die Bildung einer Hülfsgleichung zurückkommt, welche bei der allgemeinen Gleichung des $n$ten Grades vom Grade $n(n-1)$ ist.

Ich wiederhole, dass diese Anzeige für jetzt durchaus nur als eine vorläufige zu betrachten ist, und dass ich mich eines bestimmten Urtheils über den Werth und Erfolg der angewandten Methode ganz enthalte, dasselbe einer späteren Besprechung vorbehaltend. Es würde die jetzige Anzeige auch ganz unterblieben sein, wenn ich nicht durch die so eben eingegangene vorstehende Ankündigung des Herrn Doctor Lehmann genöthigt worden wäre, oder vielmehr durch dieselbe mir die Verpflichtung auferlegt geglaubt hätte, zugleich über Herrn Mossbruggers Schrift im Kurzen zu berichten. Unter allen Bedingungen ist dieselbe der Aufmerksamkeit und Beachtung der Leser zu empfehlen.

Grunert.

Astronomie.

Aufruf.

Joannis Kepleri opera omnia

edidit Chr. Frisch. Francofurti et Erlangae, Heyder et Zimmer. Vol. I. 1858.

Eine Ehre, deren sich mancher wenig bedeutende Schriftsteller in Deutschland rühmt, war einem der grössten Namen unseres Vaterlandes bisher nicht widerfahren: wir besassen keine Gesammtausgabe der Werke Kepler's. Und doch gehört Kepler zu den wenigen Auserwählten, bei denen jedes Epithet überflüssig, die nicht dem Fachmanne allein, sondern jedem Gebildeten bekannte, ruhmgekrönte Gestalten sind. Kein besonderer Gau kann ihn sein eigen nennen, die Orte seiner Geburt, seiner Erziehung und selbstständigen Thätigkeit machen ihn

zum Deutschen im allgemeinsten Sinne des Wortes. Er hat den deutschen Geist für immer und alle Zonen verherrlicht durch Tiefe der Gedanken und unverwüstlichen Humor, durch Ausdauer sonder gleichen und ungebrochene Phantasie, durch unerschütterliche Ehrenhaftigkeit und seltene Urtheilskraft. Und die Producte dieses Geistes existiren grossentheils nur in wenigen Exemplaren oder sind geradezu bloss handschriftlich vorhanden. Sollen die widerlichen Erbärmlichkeiten, welche einen der edelsten Menschen, die es je gab, sein ganzes Leben hindurch verfolgten, sich noch an seinen unsterblichen Arbeiten fortsetzen, und uns Epigonen beschieden sein, die allenthalben zerstreuten Erzeugnisse seiner Hand nach und nach dem Untergange geweiht zu sehen, wie seine Zeitgenossen einst umsonst die Stätte suchten, wo seine irdischen Ueberreste ruhen?

In ächt vaterländischer Weise hat Professor Frisch seit vielen Jahren in aller Stille daran gearbeitet, diese Schmach von uns abzuwenden, und tritt nun mit einem völlig geordneten, aus den verschiedensten Quellen mit bewundernswürdiger Aufopferung gesammelten Materiale für nicht weniger als acht ziemlich starke Bände vor die Verehrer Kepler's hin, deren Zahl Legion — sein sollte. Zwei bereits erschienene, den ersten Band bildende Hefte enthalten: Mysterium Cosmographicum, Apologia Tychonis, Calendaria, Opera Astrologica, mit wichtigen, hauptsächlich aus Kepler's Briefwechsel geschöpften Commentaren, und zeugen für die Umsicht und Sorgfalt, welche hier aufgewendet wurden, um uns die Werke des unvergänglichen Todten in würdiger Gestalt vorzuführen. Aber das treffliche Unternehmen stockt — aus Mangel an Theilnahme. Schon einmal*) erhob ich meine Stimme im Vereine mit meinen Collegen: Argelander, Hansen, Encke, Gould, Peters, Rümker, Struve d. ä. u. j., Zech, leider nicht mit der gewünschten Wirkung zu Gunsten dieser so höchst verdienstlichen Publikation, die nicht nur eine alte Schuld Deutschlands an einen seiner herrlichsten Söhne bezahlen, sondern die heutige Welt in den Stand setzen soll an der Quelle zu schöpfen, was

---

*) Augsburger Allgemeine Zeitung, 14. Juli 1857, Beilage.

ihr nachgerade unzählige Male unlauter geboten wurde. *Ich* wähle heute zu diesem wiederholten Aufrufe ein Organ*), das als Reliquie des deutschen Reiches doppelt berufen ist, sich Sr. Römisch kaiserlichen Majestät Mathematikers anzunehmen. Möge die patriotische Begeisterung für einen anderen grossen Deutschen, deren Nachklänge wir noch vernehmen, sich auch hier bewähren! Kepler litt im Leben hauptsächlich unter der unglückseligsten aller Spaltungen unseres Vaterlandes; möge die Erinnerung an ihn versöhnt werden durch die Einigkeit, mit der wir beitragen zur Errichtung eines Denkmals, das in unseren Tagen von der Presse dauernder und erfolgreicher gegründet wird als durch Meissel und Marmor! Wenn nur einige Länder noch dem von Preussen und Oesterreich gegebenen schönen Beispiele in Unterstützung dieses Unternehmens beitreten, wenn insbesondere öffentliche Bibliotheken es nicht verschmähen, ein Werk zu erwerben, das jeder derselben *zur* Zierde gereichen wird, so ist die Bereicherung nicht bloss der deutschen, sodern der gesammten Literatur um einen wahren Schatz gesichert, dessen universeller Charakter in der glänzenden Liberalität der russischen Regierung einen sprechenden Ausdruck gefunden hat.

Wien, den 17. December 1859. C. v. Littrow.

Physik.

Lehrbuch der Physik zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbstunterrichte von Dr. W. Eisenlohr, Grossherzogl. Bad. Geheimerathe und Professor der Physik an der polytechnischen Schule in Carlsruhe, u. s. w. Achte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 665 Holzschnitten. Stuttgart. Krais und Hoffmann. 1860. 8.

Wenn ein physikalisches Lehrbuch in einem verhältnissmässig kurzen Zeitraume in einer achten Auflage erscheint, — gewiss ein seltener Fall, wenigstens in Deutschland, — so hat durch diesen grossen dem Werke geschenkten Beifall das Publikum über dessen Werth und Vortrefflichkeit ein Urtheil gesprochen, gegen

*) Ursprünglich mitgetheilt in der „Leopoldina. Nr. 9.“

welches jede weitere Kritik auch selbst dann verstummen müsste, wenn dieselbe nicht so vollständig mit der Stimme des Publikums übereinzustimmen sich gedrungen fühlte, wie dies bei dem Unterzeichneten rücksichtlich des vorliegenden Werkes der Fall ist. Der Unterzeichnete kennt und benutzt dieses Werk seit langer Zeit, und bekennt gern und dankbar, aus demselben Vieles gelernt und durch dasselbe vielfach bei seinen Bestrebungen unterstützt worden zu sein. Vor allem ist die grosse Fülle von Thatsachen hervorzuheben, die in diesem Werke enthalten sind, wobei es sich zugleich über das ganze Gebiet der Physik gleichmässig verbreitet, so dass es schwerlich einen Gegenstand geben möchte, über den man nicht eine, wenn auch zuweilen nur kurze, aber für den Kundigeren und Geübteren stets ausreichende Belehrung in demselben fände. Dabei sind die betreffenden numerischen Bestimmungen überall sehr vollständig, genauer als in vielen anderen Werken, und überall nach den neuesten und besten Untersuchungen gegeben. Die zu den Versuchen erforderlichen Instrumente und Apparate sind durchgängig nach ihren neuesten und bessern Einrichtungen sehr deutlich beschrieben und durch sehr gut ausgeführte Holzschnitte erläutert, so wie auch ihre Vorzüge und Mängel stets Berücksichtigung gefunden haben, und zu ihrer Handhabung die nöthigen Fingerzeige gegeben worden sind. Unter den Instrumenten sind nicht gerade bloss die neuesten und besten, sondern auch die älteren, sollten dieselben auch zuweilen nur eine historische Bedeutung haben, wie z. B. das Saussure'sche Haar-Hygrometer und einige andere, beschrieben worden, was jedenfalls vollständig gebilligt werden muss, und von Vielen dankbar erkannt werden wird. Im Ganzen kann man sagen, dass rücksichtlich der Thatsachen und der physikalischen Instrumente das vorliegende Werk eine im höchsten Grade vollständige Darstellung der heutigen Physik liefert, was wenigstens alles Wesentliche und irgend Wichtige oder zu kennen Wünschenswerthe betrifft. Aber auch die darin befolgte wissenschaftliche Darstellung ist eine sehr ansprechende und gründliche, die mit zweckmässiger Kürze sehr grosse Deutlichkeit und Bestimmtheit vereinigt, und überall das, worauf es bei jedem Gegenstande vorzugsweise ankommt, gehörig hervorhebt und in den Vordergrund stellt. Und ist die Darstellung auch nicht vorherrschend eine mathematische, die sie bei der ganzen Anlage des Werkes und dem durch dasselbe zu erreichenden Zweck nicht sein konnte und sollte; so gehört dasselbe doch keineswegs in die grosse Klasse derjenigen physikalischen Bücher, welche vor jeder mathematischen Betrachtung zurückschrecken. Vielmehr muss man dem Herrn Verfasser dass Zeugniss geben, dass er auch in dieser Beziehung so viel

geleistet hat, wie der Zweck des Buches irgend gestattete und forderte. Wo der Gegenstand eine mathematische Behandlung in Anspruch zu nehmen berechtigt war, ist dieselbe auch auf elementarem Wege deutlich und bestimmt, zugleich so einfach wie möglich, gegeben worden, namentlich auch in dem mechanischen Theile der Physik, in welchem bekanntlich so viele andere, selbst beliebte physikalische Bücher sehr schwach sind. Natürlich ist überall nur so weit gegangen worden, wie die vorausgesetzten elementaren Kenntnisse gestatteten, was ganz mit dem vorgesteckten Ziele übereinstimmt, in welcher Beziehung wir z. B. auf die Lehre vom Pendel verweisen, wo nur die bekannte Formel $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ bewiesen worden ist, natürlich nicht bis zu der die Zeit einer Pendelschwingung ausdrückenden unendlichen Reihe fortgeschritten werden konnte, zu der nur auf dem Wege der Integralrechnung zu gelangen möglich ist. Endlich heben wir noch hervor, was wir jederzeit für einen besonderen Vorzug eines physikalischen Lehrbuchs zu halten geneigt sind, dass überall das, was als ausgemachte Thatsache betrachtet werden darf, von dem, was zur Zeit nur hypothetisch ist, streng gesondert worden ist.

Ueber den Inhalt eines Buches, welches in einer achten Auflage vorliegt, im Einzelnen noch etwas sagen zu wollen, würde natürlich ganz unnütze Weitläufigkeit sein. Dass in der neuen Auflage alle neueren Entdeckungen nachgetragen worden sind, versteht sich nach dem Obigen ganz von selbst, wobei übrigens die in der vorhergehenden Auflage befolgte Eintheilung auch in der neuen ganz beibehalten, und nur erst am Schluss ein neuer Paragraph eingeführt worden ist, was die vielen Lehrer, welche das Buch bei ihrem Unterrichte benutzen, dem Herrn Verfasser gewiss besonders Dank wissen werden.

Möge das Buch auch in seiner neuen Gestalt so segensreich wie bisher zur Förderung einer der schönsten und edelsten Wissenschaften wirken, und der Herr Verfasser darin seine beste Belohnung finden für die auf dessen Ausarbeitung und stete, mit der fortschreitenden Wissenschaft gleichmässige Weiterführung verwandte sehr grosse Sorgfalt und Mühe. Vorzugsweise allen Lehrern, aber auch für das Selbststudium, können wir dasselbe nur zu sorgfältigster Beachtung auch in seiner neuen Ausgabe dringend empfehlen.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CXXXV. S. 14.).

26me Année, 2me Ser. T. III. 1857. Sur un mémoire de M. J. F. Rameaux intitulé: Des lois suivant lesquelles les dimensions du corps, dans certaines classes d'animaux, déterminent la capacité et les mouvements fonctionelles des Poumons et du coeur. Rapport de M. Th. Schwann. (Ganz mathematisch gehaltener physiologischer Artikel). p. 94. — Détermination de la différence des longitudes des observatoires de Bruxelles et de Berlin; par M. A. Quetelet. p. 104. — Sur les étoiles filantes et le magnétisme terrestre, extrait d'une lettre de M. Hansteen à M. Ad. Quetelet. p. 105. — Étoiles filantes observées au mois d'août 1857, à Bruxelles et à Gand; note de M. A. Quetelet. p. 116. — Les étoiles filantes du mois d'août 1857; par M. Wartmann, père, de Genève. p. 121. — Recherches sur la persistance des impressions de la rétine; par M. Melsens. p. 214. (Sehr lesenswerth). — Théorie géométrique des rayons et centres de courbure. 2me note additionelle; par M. Lamarle. p. 295. (S. oben). — Note sur la mesure de précision des observations méridiennes faites à l'observatoire royal de Bruxelles; par M. Liagre. p. 330. — Coup d'oeil sur les appareils enregistreurs des phénomènes meteorologiques et projèt d'un nouveau système d'instruments; par M. Ch. Montigny. p. 465.

Monats-Bericht der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Januar 1860.

Durch die Liberalität der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin ist der Herausgeber des Archivs in den Stand gesetzt worden, regelmässig und sogleich nach dem Erscheinen dieser Monats-Berichte deren Inhalt — natürlich nur so weit derselbe in den Kreis des Archivs der Mathematik und Physik gehört, — anzeigen zu können, wofür derselbe hier der Königlichen Akademie seinen verbindlichsten und gehorsamsten Dank auszusprechen nicht unterlassen kann.

Das vorliegende Heft (Januar 1860) enthält streng genommen zwar nur eine in den Kreis des Archivs gehörende Abhandlung, auf welche aber die Leser unserer Zeitschrift besonders aufmerksam gemacht werden müssen, da dieselbe jedenfalls sehr lehr-

reich ist und jedwede Beachtung sehr verdient. Es ist dies die Abhandlung:

Ueber die Prüfungsmittel des Stromes der leydener Batterie. Von Herrn **Riess**. S. 5 — S. 25.

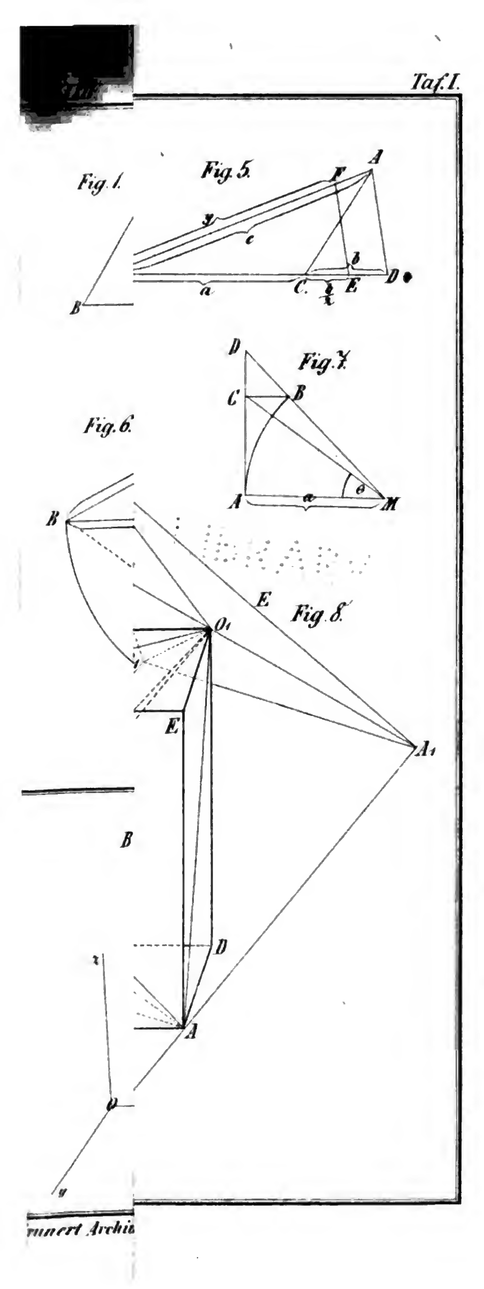
Begreiflicherweise können wir auf Einzelnheiten in diesen Literarischen Berichten nicht eingehen. Indess bemerken wir im Allgemeinen Folgendes. Der Herr Verfasser sagt im Eingange seiner Abhandlnng: „Im elektrischen Strome unterscheidet man die Elektricitätsmenge, Dichtigkeit, Entladungsdauer, Art der Entladung und Richtung des Stroms.“ „Die Elektricitätsmenge wird durch die Anzahl gleichwerthiger Erregungsakte gemessen, welche die Batterie, die Dichtigkeit durch die Anzahl, welche die Flächeneinheit derselben in den elektrischen Zustand versetzt hat. Die Entladung der Batterie geschieht durch ihre Verbindung mit dem Schliessungsbogen, in welchem der Entladungsstrom durch vielfache Wirkungen merklich wird. Aber die Stärke dieser Wirkungen ist im Allgemeinen nicht gegeben durch die Kenntniss der Elektricitätsmenge und Dichtigkeit der Batterie, man muss noch die Dauer und Art der Entladung, in einigen Fällen auch die Richtung des Stromes kennen. Zeit und Art der Entladung sind, bei constanter Elektricitätsmenge und Dichtigkeit, veränderlich mit der Beschaffenheit des Schliessungsbogens; sie werden indirect bestimmt durch Beobachtung der Wirkung des Stromes.“ „Die hauptsächlichsten Prüfungsmittel des Entladungsstroms bezwecken die Kenntniss dieser unbekannten Factoren des Stromes und dürfen nur solchen Wirkungen entnommen sein, welche von der Zeit und Art der Entladung abhangen.“

In dieser Beziehung werden nun nach und nach discutirt: §. 1. Die Elongation der Magnetnadel. — §. 2. Magnetisirung von Eisennadeln. — §. 3. Schlagweite. — §. 4. Erwärmung. — §. 5. Elektrodynamische Abstossung. — §. 6. Mechanische Wirkung. Glühen von Metalldräthen. — §. 7. Chemische Wirkung. Zündung. — §. 8. Polarisirung von Metallplatten. Bildung von Staubfiguren. Durchbohrung von Papier.

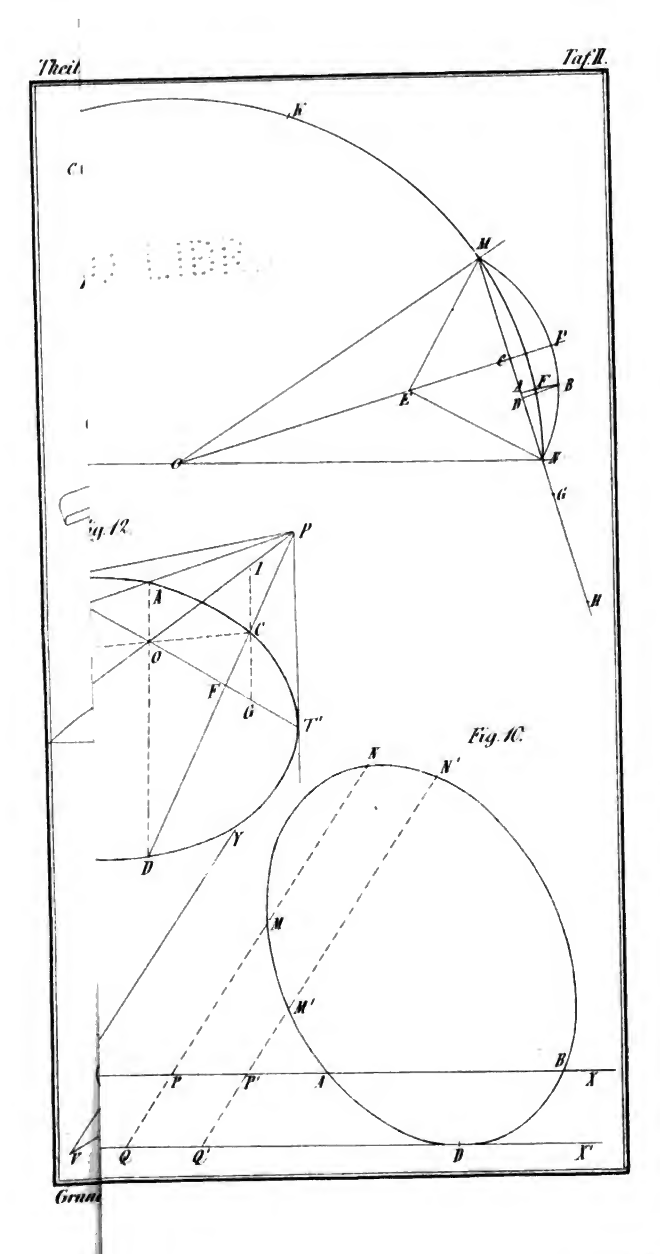
Wenn auch nicht eigentlich in den Kreis des Archivs gehörend, können doch als allgemein interessant hier noch die beiden folgenden Aufsätze erwähnt werden:

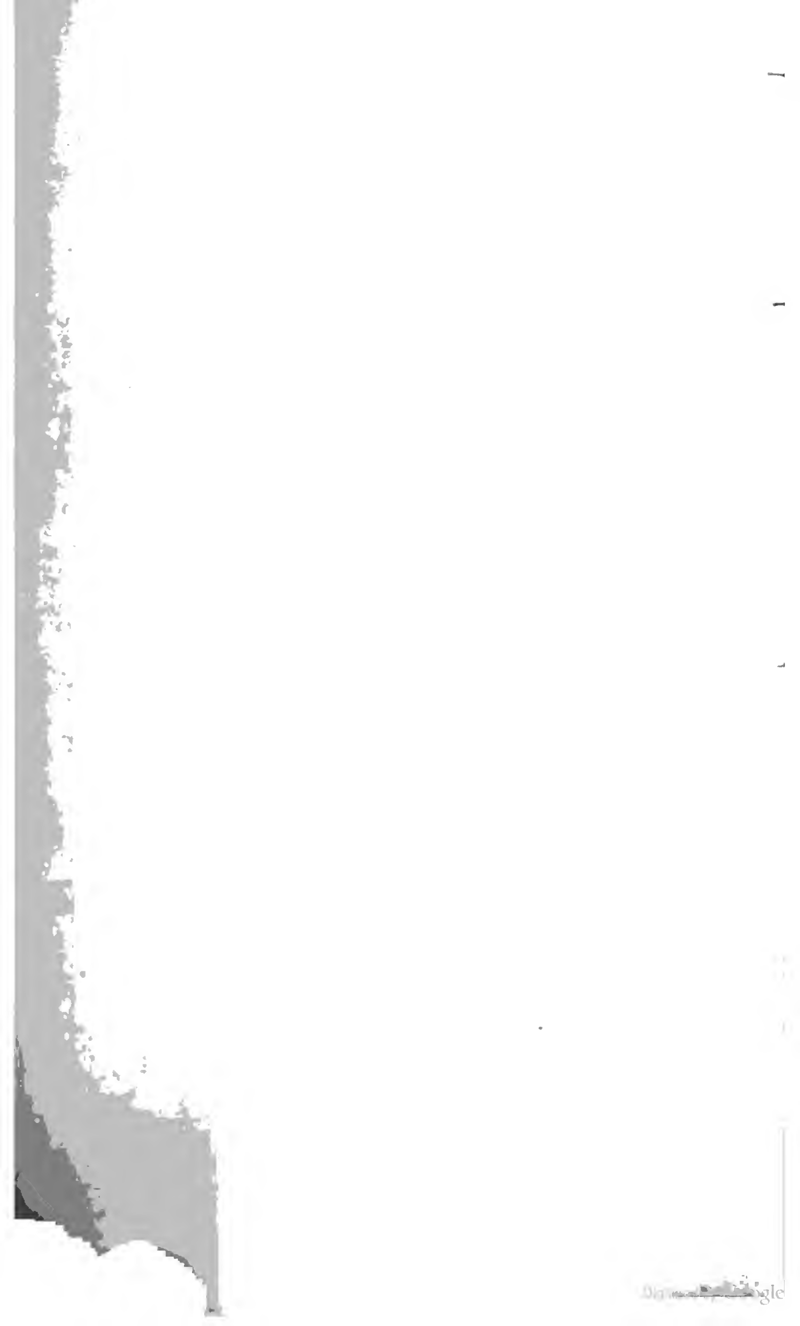
Karsten: Beitrag zur Kenntniss des Verwesungsprozesses. S. 38. — S. 44.

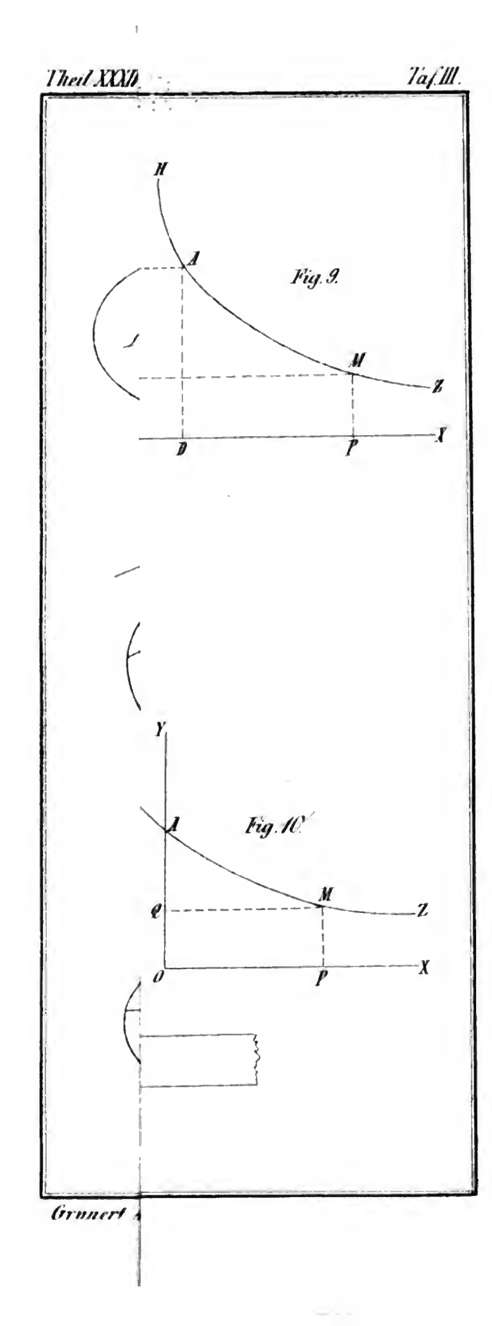
Kühne: Ueber die Wirkung des amerikanischen Pfeilgiftes.


Fig. 1.
B
Fig. 5.
F
A
y
c
b
a
C.
E
D
x
Fig. 7.
D
C
B
A
a
M
Fig. 6.
B
E
Fig. 8.
O₁
E
A₁
B
D
A
O
y




Theil
Taf. II.
Fig. 12.
Fig. 10.
Grun




H
A
Fig. 9.
M
Z
D
P
X
Y
A
Fig. 10.
M
Q
Z
O
P
X



…ische Linie als Curve der

